

К РАСЧЕТУ МЕАНДРОВОЙ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ

В. И. Дядюк, А. Ф. Зоркин

Харьков

Меандровые полосковые линии уже рассматривались ранее [1]. Однако результаты этой работы трудно использовать для инженерных расчетов. В настоящей статье приводятся формулы для расчета дисперсии и волнового сопротивления меандровой линии которые в сочетании с табличными данными позволяют производить инженерные расчеты.

Дисперсионное уравнение

Рассмотрим меандровую несимметричную полосковую линию на магнитодиэлектрической подложке, представленную на рис. 1, где a — меандровый проводник, b — подложка, c — заземленная плоскость. Меандровая линия, образованная идеально проводящими проводниками, лежащими на подложке со скалярными параметрами $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$, бесконечна в направлении x . Считая, что вдоль проводников меандровой линии распространяется квази-ТЕМ-волна и выполняется условие $L - d \ll h$, меандровую линию

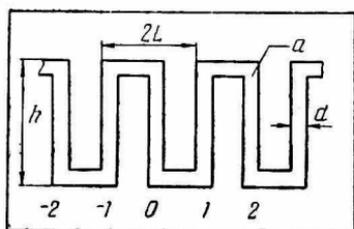
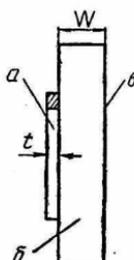


Рис. 1. Меандровая несимметричная полосковая линия.



можно представить как многопроводную линию, состоящую из параллельных металлических лент, концы которых попарно соединены в сечениях $z = 0, z = h$ (рис. 1).

Для решения такой системы применим метод многопроводных линий [2]. Присвоим проводникам многопроводной линии номера $P = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Известно [2], что анализ периодического $2P + 1$ -полюсника можно свести к анализу упрощенного $2(Q + 1)$ -полюсника, содержащего полюса только одного периода. Так как меандровая линия двухступенчата ($Q = 2$), то ее «упрощенная» матрица передачи A' имеет вид

$$A' = \begin{bmatrix} I \cos \gamma h, & i \frac{\omega}{\gamma} L' \sin \gamma h \\ i \frac{\omega}{\gamma} C' \sin \gamma h, & I \cos \gamma h \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Здесь

$$L' = \begin{bmatrix} L'_0 & L'_1 e^{i\varphi} \\ L'_1 e^{-i\varphi} & L'_0 \end{bmatrix}; \quad C' = \begin{bmatrix} C'_0 & C'_1 e^{i\varphi} \\ C'_1 e^{-i\varphi} & C'_0 \end{bmatrix},$$

$$L' C' = I \frac{\gamma^2}{\omega^2},$$

где

- I — единичная матрица;
- ω — круговая частота;
- γ — постоянная распространения вдоль z ;
- $\varphi = \beta L$ — фазовый сдвиг на полпериода системы;
- β — постоянная распространения вдоль x .

Потенциалы $V_0(z)$, $V_1(z)$ и токи $I_0(z)$, $I_1(z)$ на периоде меандровой линии связаны соотношением

$$\begin{bmatrix} V_0(0) \\ V_1(0) \\ I_0(0) \\ I_1(0) \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} V_0(h) \\ V_1(h) \\ I_0(h) \\ I_1(h) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Учитывая граничные условия

$$\begin{aligned} V_1(0) = V_0(0), \quad V_1(h) = V_0(h) e^{-i2\varphi}, \quad I_1(0) = -I_0(0), \\ I_1(h) = -I_0(h) e^{-i2\varphi}, \end{aligned}$$

получаем дисперсионное уравнение

$$\text{ctg}^2 \gamma h = \frac{\omega^2}{\gamma^2 \sin^2 \varphi} (C'_0 \cos \varphi + C'_1) (L'_0 \cos \varphi + L'_1), \quad (3)$$

где

$$\gamma = \omega \sqrt{C'_0 L'_0 + C'_1 L'_1}. \quad (4)$$

Волновое сопротивление «меандра» определим как отношение

$$Z_M = \frac{V_1(h)}{I_1(h)} = \frac{V_0(h)}{I_0(h)} = \sqrt{\frac{L'_0 \cos \varphi - L'_1}{C'_0 \cos \varphi - C'_1}}. \quad (5)$$

Элементы «упрощенных» матриц L' и C' выражаются через волновые проводимости $M(\varphi)$ и сопротивление $K(\varphi)$ регулярной многопроводной линии [2]:

$$\begin{aligned} C'_0 = \frac{\gamma}{2\omega} [M(\varphi) + M(\pi - \varphi)]; \quad L'_0 = \frac{\gamma}{2\omega} [K(\varphi) + K(\pi - \varphi)]; \\ C'_1 = \frac{\gamma}{2\omega} [M(\varphi) - M(\pi - \varphi)]; \quad L'_1 = \frac{\gamma}{2\omega} [K(\varphi) - K(\pi - \varphi)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} M(\varphi) = \epsilon_0 \frac{\omega}{\gamma} \left(C_0 + 4 \sum_{p=1}^{\infty} C_p \sin^2 \frac{p\varphi}{2} \right), \\ K(\varphi) = \mu_0 \frac{\omega}{\gamma} \left(L_0 + 4 \sum_{p=1}^{\infty} L_p \cos^2 \frac{p\varphi}{2} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $C_p = -c_{0p}/\epsilon_0$; $L_p = l_{0p}/\mu_0$ — безразмерные коэффициенты емкости и индуктивности; c_{0p} , l_{0p} — взаимные емкости и индуктивности между 0-м и p -м проводниками.

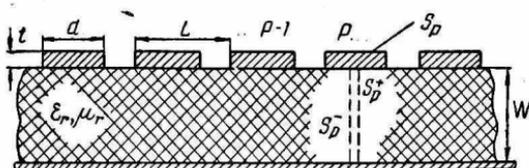
Таким образом, задача расчета дисперсии и волнового сопротивления меандровой линии свелась к вычислению коэффициентов C_p и L_p регулярной многопроводной линии.

Определение коэффициентов C_p

Безразмерные емкостные коэффициенты C_p можно вычислить, решая задачу об определении квазистатического поля регулярной многопроводной линии, поперечное сечение которой показано на рис. 2. Напряженность электрического поля будем искать в виде

$$\vec{E} = -\nabla\varphi(x, y)e^{-\gamma z}.$$

В силу принципа суперпозиции электрической скалярный потенциал $\varphi(x, y)$ представим в виде линейной комбинации



$$\varphi(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \varphi_p(x, y) V_p, \quad (8)$$

Рис. 2. Поперечное сечение многопроводной линии, образованной проводниками «меандра».

где V_p — потенциал на p -м проводнике, а функция

$$\varphi_q(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \oint_{S_p} \frac{\partial \varphi_p(x', y')}{\partial n} G^{\ominus}(x, y, x', y') dS_p, \quad (9)$$

$$q = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

является решением задачи Дирихле в области D уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_q(x, y) = 0 \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\varphi_q = \delta_{kq} = \begin{cases} 1 & q = k, \\ 0 & q \neq k, \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (11)$$

на контуре S_q поперечного сечения q -го проводника и $\varphi_q = 0$ на заземленной плоскости. Здесь D — верхняя полуплоскость с диэлектрическим слоем, за исключением площади поперечного сечения металлических проводников (рис. 2).

В (9) интегрирование производится по координатам источника (x', y') .

Функция Грина $G^{\ominus}(x, y, x', y')$, взятая из работы [3], имеет следующий вид:

$$G^{\ominus} = \begin{cases} G_1^{\ominus}(x, y, x', y'), & y \geq w; \\ G_2^{\ominus}(x, y, x', y'), & y \leq w, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$G_1^{\ominus} = \frac{\epsilon_r + 1}{2} G_2^{\ominus} - \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \right)^{\nu+1} \times$$

$$\times \ln \frac{(x-x')^2 + (y+y'+2(\nu-1)\omega)^2}{(x-x')^2 + (y-y'-2(\nu+1)\omega)^2};$$

$$G_2^{\exists} = \frac{1}{2\pi(\varepsilon_r+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \left(\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r+1} \right)^{\nu} \ln \frac{(x-x')^2 + (y+y'+2\nu\omega)^2}{(x-x')^2 + (y-y'-2\nu\omega)^2}.$$

Для определения неизвестных $\partial\varphi_q/\partial n$ подставим (11) в (9) и получим систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода относительно $\partial\varphi_q(x', y')/\partial n$:

$$\delta_{kq} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \oint_{S_p} \frac{\partial\varphi_q(x', y')}{\partial n} G^{\exists}(x, y, x', y') dS_p. \quad (13)$$

Поскольку уравнения Фредгольма первого рода относятся к классу некорректных задач, целесообразно регуляризовать (13) путем введения малого параметра α [5]:

$$\alpha \frac{\partial\varphi_q(x, y)}{\partial n} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \oint_{S_p} \frac{\partial\varphi_q(x', y')}{\partial n} G^{\exists}(x, y, x', y') dS_p - \delta_{kq}. \quad (14)$$

Алгоритм для решения уравнения типа (14) приводится в работах [5, 6].

Заметим, что ядро уравнения (14) $G^{\exists}(x, y, x', y')$ имеет слабую особенность при $(x, y) \rightarrow (x', y')$. Для устранения этой особенности необходимо преобразовать интегралы, входящие в (14), с помощью приема, предложенного в работе [7]:

$$\int \varphi(x) K(x, y) dx = \int \varphi(x) [K(x, y) - \rho(x, y)] dx + \int [\varphi(x) - \varphi(y)] \rho(x, y) dx + \varphi(y) \int \rho(x, y) dx, \quad (15)$$

где

$$\rho(x, y) = \lim_{x \rightarrow y} K(x, y).$$

Определив $\varphi_q(x, y)$, найдем емкостные коэффициенты C_p :

$$C_p = - \oint_{S_p} \frac{\partial\varphi_p(x, y)}{\partial n} dS_p. \quad (16)$$

Определение коэффициентов индуктивности L_p

Для вычисления L_p решим задачу об определении квазистатического магнитного поля регулярной многопроводной линии (рис. 2). Напряженность магнитного поля ищем в виде

$$\vec{H} = -\nabla\psi(x, y)e^{-t\tau z}.$$

Представим магнитный скалярный потенциал $\psi(x, y)$ аналогично (8):

$$\psi(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \psi_p(x, y) I_p, \quad (17)$$

где I_p — ток на p -м проводнике; $\psi_p(x, y)$ является решением уравнения (10) в области D и удовлетворяет граничному условию $\partial\psi_p(x, y)/\partial n = 0$ на заземленной плоскости, а также соотношению

$$\int_{S_q} \frac{\partial\psi_p(x, y)}{\partial S_q} dS_q = \delta_{pq}. \quad (18)$$

Пользуясь методикой [8], представим (18) в виде

$$\oint_{S_q^+ + S_q^-} \frac{\partial\psi_p(x, y)}{\partial S} dS = \int_{S_q^+}^{S_q^-} d\psi_p(S) = \psi_p(S_q^-) - \psi_p(S_q^+) = \delta_{pq}, \quad (19)$$

где S_q^+ и S_q^- — контуры разрезов (рис. 2).

Применив формулу Грина к $\psi_p(x, y)$ и функции Грина $G^M(x, y, x', y')$, получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно $\psi_q(x, y)$:

$$\psi_q(x, y) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \oint_{S_p} \psi_p(x', y') \frac{\partial}{\partial n} G^M(x, y, x', y') dS_p - f_q(x, y), \quad (20)$$

где

$$f_q(x, y) = \int_{S_q} \frac{\partial}{\partial n} G^M(x, y, x', y') dS_q, \\ q = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Функцию Грина можно построить методом изображений для токов [4]. Она имеет вид

$$G^M = \begin{cases} G_1^M(x, y, x', y'), & y \geq w; \\ G_2^M(x, y, x', y'), & y \leq w, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$G_1^M = \frac{1 + \mu_r}{2\mu_r} G_r^M + \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \mu_r}{1 + \mu_r} \right)^{\nu+1} \times \{ \ln [(x - x')^2 + (y + y' + 2(\nu - 1)w)^2] + \ln [(x - x')^2 + (y - y' - 2(\nu - 1)w)^2] \}; \\ G_2^M = \frac{M_r}{2\pi(1 + \mu_r)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1 - \mu_r}{1 + \mu_r} \right)^{\nu} \times \{ \ln [(x - x')^2 + (y - y' - 2\nu w)^2] + \ln [(x - x')^2 + (y + y' + 2\nu w)^2] \}.$$

Для определения $\psi_p(x, y)$ из уравнения (20) необходимо применить прием (15), поскольку ядро этого уравнения имеет

слабую особенность при $(x, y) \rightarrow (x', y')$. Определив $\psi_p(x, y)$, можно вычислить коэффициенты индуктивности L_p по формуле

$$L_p = \int_{S_p^-} \frac{\partial \psi_p(x, y)}{\partial n} dS_p^- \quad (22)$$

Результаты вычислений

Описанный алгоритм был реализован на ЭВМ «Урал-4» для меандровой линии на диэлектрической подложке с бесконечно тонким ленточным проводником ($t = 0$). Решение производилось с учетом пяти проводников многопроводной линии ($p = 0, \pm 1, \pm 2$). Интегральные уравнения решались хорошо известным алгебраическим методом с применением квадратурной формулы Гаусса—Чебышева [7] с шестью узловыми точками. Параметр регуляризации α был выбран равным 10^{-5} . Результаты вычисления $C_0, C_1, C_2, L_0, L_1, L_2$ сведены в табл. 1—2. Отношение ширины полосы к толщине подложки d/w выбиралось по номограммам работы [9] таким образом, чтобы волновое сопротивление Z_0 одиночной несимметричной полосковой линии, образующей «меандр», равнялось 50 либо 70 ом.

Таблица 1
Значение коэффициентов C_q и L_q ($q = 0, 1, 2$) при $Z_0 = 50$ ом

| | L/d | C_0 | C_1 | C_2 | L_0 | L_1 | L_2 |
|----------------------------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| $\epsilon_r = 3$ $d/w = 2,7$ | 1,25 | 9,645 | 7,857 | 5,954 | 0,1640 | 0,0525 | 0,1347 |
| | 1,5 | 11,83 | 9,526 | 7,048 | 0,1675 | 0,0599 | 0,1334 |
| | 1,75 | 14,15 | 12,50 | 8,215 | 0,1718 | 0,0521 | 0,1327 |
| | 2 | 16,53 | 13,14 | 9,436 | 0,1750 | 0,0459 | 0,1322 |
| $\epsilon_r = 5$ $d/w = 1,85$ | 1,25 | 7,146 | 6,090 | 4,949 | 0,3836 | 0,1087 | 0,2558 |
| | 1,5 | 8,496 | 7,109 | 4,931 | 0,3848 | 0,1171 | 0,2514 |
| | 1,75 | 9,974 | 8,232 | 6,354 | 0,3915 | 0,2095 | 0,2488 |
| | 2 | 11,50 | 9,443 | 7,136 | 0,3971 | 0,0993 | 0,2470 |
| $\epsilon_r = 7$ $d/w = 1,38$ | 1,25 | 6,260 | 5,479 | 4,669 | 0,6275 | 0,1584 | 0,3829 |
| | 1,5 | 7,253 | 6,221 | 5,139 | 0,6296 | 0,1601 | 0,3741 |
| | 1,75 | 8,353 | 7,050 | 5,665 | 0,6350 | 0,1775 | 0,3681 |
| | 2 | 9,548 | 7,953 | 6,238 | 0,6392 | 0,1671 | 0,3639 |
| $\epsilon_r = 9$ $d/w = 1,1$ | 1,25 | 14,28 | 11,78 | 11,51 | 0,8514 | 0,2072 | 0,5066 |
| | 1,5 | 13,09 | 12,14 | 13,31 | 0,8386 | 0,2424 | 0,4596 |
| | 1,75 | 17,34 | 12,62 | 15,27 | 0,8451 | 0,2461 | 0,4026 |
| | 2 | 17,97 | 15,40 | 12,77 | 0,8562 | 0,2381 | 0,4754 |
| $\epsilon_r = 11$ $d/w = 0,9$ | 1,25 | 17,80 | 13,95 | 10,96 | 1,097 | 0,2665 | 0,6606 |
| | 1,5 | 18,41 | 10,85 | 11,61 | 1,074 | 0,3173 | 0,6400 |
| | 1,75 | 19,07 | 11,38 | 12,32 | 1,078 | 0,3504 | 0,6247 |
| | 2 | 19,80 | 11,95 | 13,18 | 1,090 | 0,3277 | 0,6130 |

Таблица 2

Значение коэффициентов C_q и L_q ($q = 0, 1, 2$) при $Z_0 = 70$ ом

| | L/d | C_0 | C_1 | C_2 | L_0 | L_1 | L_2 | |
|-------------------|--------------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| $\epsilon_r = 3$ | 1,25 | 5,465 | 4,780 | 4,041 | 0,4887 | 0,1299 | 0,3104 | |
| | 1,5 | 6,312 | 5,422 | 4,449 | 0,4879 | 0,1441 | 0,3042 | |
| | $d/w = 1,5$ | 1,75 | 7,228 | 6,119 | 4,893 | 0,3742 | 0,1381 | 0,3003 |
| | | 2 | 2,530 | 2,607 | 3,793 | 0,5026 | 0,1274 | 0,2976 |
| $\epsilon_r = 5$ | 1,25 | 4,378 | 4,074 | 3,759 | 1,045 | 0,2532 | 0,6258 | |
| | 1,5 | 4,753 | 4,352 | 3,933 | 1,024 | 0,3005 | 0,6066 | |
| | $d/w = 0,94$ | 1,75 | 5,169 | 4,663 | 4,126 | 1,029 | 0,3116 | 0,5925 |
| | | 2 | 5,521 | 5,003 | 4,338 | 1,041 | 0,3075 | 0,5820 |
| $\epsilon_r = 7$ | 1,25 | 3,251 | 3,267 | 3,350 | 1,494 | 0,3817 | 0,9816 | |
| | 1,5 | 4,354 | 4,129 | 3,871 | 1,446 | 0,4624 | 0,9455 | |
| | $d/w = 0,67$ | 1,75 | 4,639 | 4,317 | 4,408 | 1,444 | 0,4957 | 0,9920 |
| | | 2 | 4,918 | 3,963 | 4,116 | 1,457 | 0,5066 | 0,9013 |
| $\epsilon_r = 9$ | 1,25 | 5,463 | 4,942 | 4,418 | 1,818 | 0,5124 | 1,370 | |
| | 1,5 | 6,106 | 5,409 | 4,716 | 1,743 | 0,6272 | 1,322 | |
| | $d/w = 0,50$ | 1,75 | 6,824 | 5,948 | 5,050 | 1,730 | 0,6807 | 1,285 |
| | | 2 | 7,611 | 6,534 | 5,417 | 1,742 | 0,7075 | 1,263 |
| $\epsilon_r = 11$ | 1,25 | 4,051 | 3,937 | 3,625 | 2,071 | 0,6708 | 1,834 | |
| | 1,5 | 4,171 | 4,029 | 3,883 | 1,957 | 0,8208 | 1,772 | |
| | $d/w = 0,39$ | 1,75 | 4,364 | 4,123 | 3,945 | 1,930 | 0,8951 | 1,723 |
| | | 2 | 4,448 | 4,228 | 4,012 | 1,937 | 0,9376 | 1,682 |

Пользуясь данными, сведенными в таблицы, можно рассчитывать волновое сопротивление Z_M и требуемую ширину меандра h в заданном частотном диапазоне для фиксированных значений φ по формулам

$$Z_M \approx 377 \sqrt{\frac{L_0 + 4L_2 \cos^2 \varphi}{C_0 + 4C_2 \sin^2 \varphi}} \text{ ом}; \quad (23)$$

$$h \approx \frac{4755}{f} [(C_0 + 2C_1 + 4C_2 \sin^2 \varphi) (L_0 + 2L_1 + 4L_2 \cos^2 \varphi) - 4C_1 L_1 \cos^2 \varphi]^{-\frac{1}{2}} \arctg \left\{ \frac{\text{ctg} \sqrt{(C_0 + 4C_2 \sin^2 \varphi) (L_0 + 4L_2 \cos^2 \varphi)} \times [(C_0 + C_1^2 + 4C_2 \sin^2 \varphi) (L_0 + 2L_1 + 4L_2 \cos^2 \varphi) - 4C_1 L_1 \cos^2 \varphi]^{-\frac{1}{2}}}{\text{ctg} \sqrt{(C_0 + 4C_2 \sin^2 \varphi) (L_0 + 4L_2 \cos^2 \varphi)}} \right\} \text{ см} \quad (24)$$

(f — частота, МГц).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. В. Авдеев, И. Л. Чегис. «Радиотехника и электроника» 1971, № 10, с. 1808—1815.
2. Р. А. Силин, В. П. Сазонов. Замедляющие системы. Изд-во «Советское радио», 1966, 632 с.
3. W. Weeks. IEEE Transaction, MTT-18, 1970, № 1, с. 35—43.

4. В. С м а й т. Электростатика и электродинамика. Изд-во иностр. лит-ры, 1954. 487 с.

5. А. Б. Б а к у ш и н с к и й. «Вычислительные методы и программирование», вып. 3. Изд-во МГУ, 1965, с. 94—99.

6. А. Б. Б а к у ш и н с к и й. «Вычислительные методы и программирование», вып. 5. Изд-во МГУ, 1966, с. 403—408.

7. P. C h e s t u n t. IEEE Transaction, MTT-17, 1969, № 10, с. 734—745.

8. R. R. G u r t a. IEEE Transaction, MTT-17, 1969, № 8, с. 479—484.

9. Е. В. А в д е е в, В. И. П о т а п о в а. «Радиотехника», т. 26, № 8, 1971, с. 56—61.