ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В ЛУЧЕВЫХ ПРИБОРАХ *М*-ТИПА

А. Г. Шеин

Харьков

Одной из важных проблем современной радиоэлектроники является изучение причин, приводящих к появлению целой гаммы колебаний с различными частотами в приборах СВЧ диапазона в целях управления уровнем этих колебаний (так называемых побочных колебаний).

Наряду с причинами, вызванными непосредственным взаимодействием электронного потока с высокочастотными полями синхронных пространственных гармоник в различных полосах пропускания [1], побочные колебания в СВЧ приборах могут появляться за счет самого электронного потока и внешних физических условий, приводящих к появлению неустойчивостей различного происхождения. Это, например, электронно-циклотронные и электронно-плазменные колебания, колебания, возникающие в результате существования большого количества ионов в приборе (ионно-циклотронные, ионно-плазменные колебания, колебания фона остаточных газов и т. п.). В своем большинстве (исключая электронные циклотронные колебания) частоты перечисленных выше колебаний лежат в низкочастотной области, они малы по амплитуде и не связаны с замедляющей системой. Однако их присутствие в электронном потоке может весьма сказаться на спектре частот вблизи основной частоты усиливаемого или генерируемого сигнала в результате параметрической связи между ними и мощным ВЧ колебанием на частоте ω.

В таком приближении сформулируем следующую задачу: необходимо определить условия существования процессов на частоте $\omega_2 = \omega - \omega_1$, лежащей в полосе пропускания замедляющей системы, при наличии колебаний основной частоты ω, принимаемых в дальнейшем за сигнал накачки, и некоторых малых неустойчивостей плазменного происхождения на частоте ω_1.

Для анализа выберем плоско-параллельную замедляющую систему, неограниченную вдоль направления x $(\partial/\partial x = 0)$, помещенную в скрещенные статические электрическое и магнитное поля. Уравнения движения ленточного потока в такой системе распишем в скалярной форме:

$$\frac{dv_y}{dt} = \eta E_y + \omega_c v_z;$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \eta E_z - \omega_c v_y. \qquad (1)$$

Здесь составляющие поля E_y и E_z включают в себя поля накачки и поля сигнала с ω_2.

В общем случае поле накачки может быть представлено в виде

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\left\{\overline{E}(y, t)\, e^{j(\omega t - \beta z)} + \overline{E}^*(y, t)\, e^{-j(\omega t - \beta z)}\right\}. \qquad (2)$$

Раскладывая амплитуду ВЧ поля накачки в ряд в окрестности невозмущенной координаты y_0, с учетом только двух членов разложения имеем

$$\overline{E}(y, z) = \overline{E}(y_0) + \left.\frac{\partial \overline{E}}{\partial y}\right|_{y_0} \tilde{y}_1, \qquad (3)$$

где $\tilde{y}_1$ — переменная составляющая смещения электрона. В связи с наличием в электронном потоке полей с различными частотами переменные составляющие скоростей электронов и смещений являются суперпозицией колебаний всех частот и могут быть представлены в виде

$$a(y, t) = a_0(y) + \sum_i a_i(y)\, e^{j\omega_i t} + \sum_i a_i^*(y)\, e^{-j\omega_i t}. \qquad (4)$$

Здесь индексация определяется номером соответствующей частоты.

Кроме ВЧ полей замедляющей системы в (1) необходимо учесть поля пространственного заряда, существующие на частоте ω:

$$\overline{E}_{\text{п. з}} = \frac{1}{2}\left\{\overline{E}_{\text{п. з}}(y, t)\, e^{j(\omega t-\beta z)} + \overline{E}^{*}_{\text{п. з}}(y, t)\, e^{-j(\omega t-\beta z)}\right\}, \tag{5}$$

причем амплитуды полей $E_{z\,\text{п. з}}$ и $E_{y\,\text{п. з}}$ определяются следующим образом [2, 3]:

$$E_{z\,\text{п. з}} = -2U_0\beta_c\beta_s\,(jg\tilde{y}_1 - m_1\tilde{z}_1); \tag{6}$$

$$E_{y\,\text{п. з}} = -2U_0\beta_c\beta_s\,(-jg\tilde{z}_1 + m_2\tilde{y}_1), \tag{7}$$

где

$$\beta_s = \frac{(-\sigma_0)\,\eta\beta}{2\varepsilon_0\omega_c v_0} = \frac{\beta}{2\varepsilon_0\omega_c l}\,\frac{|I_0|}{2U_0} - \tag{8}$$

диокотронная постоянная распространения [4];

$\beta_c = \dfrac{\omega_c}{v_0}$ — электронная циклотронная постоянная распространения;

$\omega_c = \eta B_0$ — циклотронная частота;

$|I_0|$ — анодный ток;

U_0 — анодное напряжение;

l — ширина электронного потока вдоль x, $\eta = \left|\dfrac{e}{m}\right|$.

Величины g, m_1 и m_2, характеризующие местоположение потока относительно замедляющей системы, равны [3]

$$g = \frac{\operatorname{th}\beta(d-y_0) - \operatorname{th}\beta y_0}{\operatorname{th}\beta(d-y_0) + \operatorname{th}\beta y_0};$$

$$m_1 = \frac{2\operatorname{th}\beta y_0\cdot\operatorname{th}\beta(d-y_0)}{\operatorname{th}\beta(d-y_0) + \operatorname{th}\beta y_0}; \tag{9}$$

$$m_2 = \frac{2}{\operatorname{th}\beta(d-y_0) + \operatorname{th}\beta y_0}.$$

Учитывая (2)—(7), после подстановки их в (1) и выделяя только те члены, которые содержат $\exp\{j\omega_2 t\}$ и $\exp\{-j\omega_1 t\}$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dv^{*}_{1y}}{dt} &= -\omega_c v^{*}_{1z} - \eta\left[\frac{\partial E^{*}_y}{\partial y}\frac{y_2}{2} - U_0\beta_c\beta_s\,(jgz_2 + m_2y_2)\right]e^{j\beta z};\\
\frac{dv^{*}_{1z}}{dt} &= \omega_c v^{*}_{1y} - \eta\left[\frac{\partial E^{*}_z}{\partial y}\frac{y_2}{2} + U_0\beta_c\beta_s\,(jgy_2 + m_1z_2)\right]e^{j\beta z};\\
\frac{dv_{2y}}{dt} &= -\eta E_{2y} - \omega_c v_{2z} + 2U_0\beta_c\beta_2\eta\,(-jgz_2 + m_2y_2) +\\
&\quad + \eta\left[U_0\beta_c\beta_s\,(-jgz^{*}_1 + m_2y^{*}_1) - \frac{\partial E_y}{\partial y}\frac{y^{*}_1}{2}\right]e^{-j\beta z};\\
\frac{dv_{2z}}{dt} &= -\eta E_{2z} + \omega_c v_{2y} + 2U_0\beta_c\beta_2\eta\,(jgy_2 - m_1z_2) +
\end{aligned} \tag{10}$$

$$+\eta\left[U_0\beta_c\beta_s(jgy_1^* - m_1z_1^*) - \frac{\partial E_z}{\partial y}\frac{y_1}{2}\right]e^{-j\beta z}.$$

Кроме того, необходимо добавить еще четыре уравнения

$$\frac{dy_1^*}{dt} = v_{1y}^*;\quad \frac{dy_2}{dt} = v_{2y};$$

$$\frac{dz_1^*}{dt} = v_{1z}^*;\quad \frac{dz_2}{dt} = v_{2z}. \tag{11}$$

Совокупность уравнений (10)—(11) определяет полную систему уравнений, необходимую для решения задачи.

Преобразуем уравнения (10) и (11) вводом кинетических потенциалов пучка

$$V_{i\xi} = -\frac{v_{i\xi}v_0}{\eta} \tag{12}$$

($v_{i\xi}$ — соответствующая переменная составляющая скорости) и потенциалов смещения

$$U_{i\xi} = 2U_0\beta_c\xi_i \tag{13}$$

(ξ_i — переменная составляющая смещения, соответствующая частоте ω_i). Приведем их к форме нормальных волн относительно амплитуд циклотронных и синхронных волн. В результате простых, но громоздких преобразований, получаем

$$\left\{\frac{d}{dz} + j\left[\beta_{e2} \mp \beta_c - \beta_{s2}g \pm \beta_{s2}\left(\frac{m_2 - m_1}{2}\right)\right]\right\}a_{12}^{\pm} =$$

$$= -j\beta_{s2}\left[g \mp \frac{(m_2 - m_1)}{2}\right]a_{22}^{\pm} \pm j\beta_{s2}\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right)(a_{22}^{\mp} - a_{12}^{\mp}) + F_{1\pm}^*;$$

$$\left\{\frac{d}{dz} - j(\beta_{e1} \pm \beta_c)\right\}a_{11}^{*\pm} = F_{2\pm};$$

$$\left\{\frac{d}{dz} + j\left[\beta_{e2} + \beta_{s2}g \mp \beta_{s2}\left(\frac{m_2 - m_1}{2}\right)\right]\right\}a_{22}^{\pm} =$$

$$= j\beta_{s2}\left[g \mp \left(\frac{m_2 - m_1}{2}\right)\right]a_{12}^{\pm} \pm j\beta_{s2}\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right)(a_{22}^{\mp} - a_{12}^{\mp}) + F_{1\pm}^*;$$

$$\left\{\frac{d}{dz} - j\beta_{e1}\right\}a_{21}^{*\pm} = F_{2\pm};$$

$$F_{1\pm}^* = \frac{k_2}{2}E_2^{\pm} + j\frac{K_2}{K_1}\left\{\frac{dE^{\pm}}{dy}\cdot\frac{(a_{21}^{*+} - a_{11}^{*+} - a_{11}^{*-} + a_{11}^{*-})}{8U_0\beta_c} - \right. \tag{14}$$

$$\left. -\frac{\beta_s}{2}\left[g \mp \left(\frac{m_2 - m_1}{2}\right)\right](a_{21}^{*\mp} - a_{11}^{*\mp}) \mp \beta_s\left(\frac{m_2 + m_1}{2}\right)(a_{21}^{*\pm} - a_{11}^{*\pm})\right\}e^{j\beta z};$$

$$F_{2\pm} = -j\frac{K_1}{K_2}\left\{\frac{dE_{\pm}^*}{dy}\frac{(a_{22}^{+} - a_{12}^{+} - a_{22}^{-} + a_{12}^{-})}{8U_0\beta_c} - \right.$$

$$-\frac{\beta_s}{2}\left[g \mp \left(\frac{m_2-m_1}{2}\right)\right](a_{22}^{\mp}-a_{12}^{\mp}) \mp \frac{\beta_s}{2}(m_2+m_1)(a_{22}^{\pm}-a_{12}^{\pm})\Big\}e^{-j\beta z},$$

$$E_{\pm} = E_y \pm jE_z.$$

Здесь $a_{li}^{\pm}$ имеют следующий смысл:

$$a_{1i}^{\pm} = \frac{K_i}{2}(V_{iy} \pm jV_{iz}) \tag{15}$$

— амплитуды быстрой (a_{1i}^{+}) и медленной (a_{11}^{-}) циклотронных волн на частоте ω_i; $(a_{1i}^{\pm})^{*}$ — их комплексно-сопряженные величины;

$$a_{2i}^{\pm} = a_{1i}^{\pm} \pm j(U_{iy} \pm jU_{iz})\frac{K_i}{2} \tag{16}$$

— амплитуды синхронных волн;

$K_i = \sqrt{\frac{\omega_i}{\omega_e}\frac{|I_0|}{2U_0}}$ — нормировочные коэффициенты.

Легко заметить, что при отсутствии накачки $\left(\frac{dE_{\pm}}{dy}=0\right)$ уравнения (14) описывают восемь независимых волн, распространяющихся в системе: четыре нормальные волны на частоте ω_1 и четыре волны, связанные с замедляющей системой на частоте ω_2.

Необходимо отметить, что уравнение (14) при $\frac{dE_{\pm}}{dy}=0$ в результате иного определения амплитуд нормальных волн a_{22}^{+} имеют иной вид по сравнению с известными данными [3, 4]. Действительно, в [4] амплитуды синхронных волн составлены таким образом, что появляются нарастающая и затухающая диокотронные волны. В уравнении (14) появляются две синхронные волны, связанные между собой активно, что приводит к появлению нарастающего решения [5], т. е. к диокотронному усилению волн пространственного заряда. Введение амплитуд в виде (16), следуя [5], логичнее, чем в [3, 4], тем более, что для объяснения физических процессов в различных случаях В. С. Стальмахов вынужден пользоваться различными формами записи амплитуд синхронных волн, что не всегда удобно.

Для составления полной системы уравнений воспользуемся самосогласованной формой записи уравнения замедляющей системы [4]:

$$\left(\frac{d}{dz} \pm j\beta_{02}\right)a_{02}^{\pm} = \mp\frac{1}{2\sqrt{Z_{02}}}\frac{\partial i_z}{\partial Z};$$

$$a_{02} = \frac{1}{2\sqrt{Z_{02}}}(V_л \pm Z_0 I_л),$$

где $V_л$ и $I_л$ — напряжение и ток в системе.

Используя соотношение [5]

$$\frac{\partial i_2}{\partial z} = \frac{1}{V_л^*}\left(E_{2y}^* I_{2y} + E_{2z}^* I_{2z}\right),$$

позволяющее через заданные величины составляющих поля в замедляющей системе E_{2y}, E_{2z} и через переменные составляющие конвекционного тока

$$I_{2y} = -jK_2^2 U_{2y};$$

$$I_{2z} = -jK_2^2 U_{2z}$$

получить в форме нормальных волн еще два уравнения, находим

$$\left(\frac{d}{dz} \pm j\beta_{02}\right) a_{02}^{\pm} = \mp K\left[(\alpha_2 + 1)\left(a_{22}^{+} - a_{12}^{+}\right) + (1 - \alpha_2)\left(a_{22}^{-} - a_{12}^{-}\right)\right]. \tag{17}$$

Здесь и в (14)

$$K = \frac{\beta_2}{2} K_2 \sqrt{Z_{02}} \tag{18}$$

— коэффициент связи; $\alpha_2 = \operatorname{cth} \beta_2 y_0$.

Система десяти дифференциальных уравнений первого порядка может быть решена путем экспоненциальной подстановки вида $\frac{d}{dz} = -j\Gamma$ и приравнивания детерминанта системы нулю для получения нетривиального решения. В результате получаем алгебраическое уравнение десятого порядка относительно неизвестной постоянной распространения Γ:

$$\begin{gathered}(\Gamma + \beta_{e1} + \beta_c)(\Gamma + \beta_{e1} - \beta_c)(\Gamma + \beta_{e1})^2 T(6) - \\ - \beta_s^2\beta_c^2(\Gamma + \beta_{e1})(\Gamma + \beta_{e1} - \beta_c) A(4) - \\ - |\Delta|^2 \beta_c^2 (\beta_{02} + \Gamma)(\beta_{02} - \Gamma)\left[-\beta_s^2\beta_c^2 + \right. \\ \left. + (\beta_{e2} - \Gamma + \beta_c)(\beta_{e2} - \Gamma)(\beta_{e1} + \Gamma)(\beta_{e1} + \Gamma + \beta_c)\right] = 0;\end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered}T(6) = (\beta_{e2} - \Gamma)^2(\beta_{02} - \Gamma)(\beta_{02} + \Gamma)(\beta_{e2} - \Gamma - \beta_c)(\beta_{e2} - \Gamma + \beta_c) - \\ - \beta_c^2\beta_{s2}^2(\beta_{02} - \Gamma)(\beta_{02} + \Gamma) - 8K^2\beta_c\beta_{02}(\beta_{e2} - \Gamma)(\beta_{e2} - \Gamma + \beta_c); \\ A(4) = (\beta_{02} + \Gamma)(\beta_{02} - \Gamma)(\beta_{e2} - \Gamma)(\beta_{e2} - \Gamma - \beta_c) - 8K^2\beta_{02}\beta_c; \\ |\Delta|^2 = \left|\frac{dE}{dy}\frac{1}{4U_0\beta_c}\right|^2; \quad \beta_{e2} = \frac{\omega_2}{v_0}; \quad \beta_{e1} = \frac{\omega_1}{v_0}.\end{gathered} \tag{19a}$$

Естественно, что анализ уравнения (19) представляет сложную задачу, поэтому упростим его. Во-первых, анализ уравнения (14) показывает, что параметр $\beta_s(m_1 + m_2) \ll \frac{dE}{dy} \cdot \frac{1}{4U_0\beta_c}$, так как m_1 и m_2 примерно равны единице, а $\beta_s \ll 1$. Во-вторых, предположим, что электронный поток распространяется по середине замедляющей системы, т. е. $g = 0$, а коэффициент замедления достаточно велик. Тогда $E_- = 0$, а $E_+ \approx 2_j E_z$. В этом случае одна из синхронных волн и медленная циклотронная волна на частоте ω_1 оказываются несвязанными и (19) переходит в уравнение восьмой степени. Кроме того, нас интересует процесс вблизи ω_2. Полагая

$$\Gamma = \beta_{e2}(1 + D_2\delta),$$

где $D_2 = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_c}\frac{|I_0|Z_{02}}{4U_0}}$ — параметр усиления, а

$$\beta_{e1} \ll \beta_{e2}, \quad \beta_{e1} \ll \beta_c, \quad -\Gamma + \beta_{e2} \ll \beta_c; \; \beta_{02} + \Gamma \approx 2\beta_{02}\,(D_2 b_{02} \ll 1),$$

преобразуем (19) к виду

$$T(6) = -2\beta_{02}\beta_c^2(\beta_{e2}D_2)^3[\delta^2(b_{02} - \delta) - \delta + S^2(b_{02} - \delta)]. \qquad (20)$$

Поскольку

$$\Gamma + \beta_{e1} \approx \beta_{e2}, \text{ а } \Gamma + \beta_{e1} - \beta_c \approx \beta_{e2}\left(1 - \frac{\beta_c}{\beta_{e2}}\right), \; D_2\delta \ll 1,$$

уравнение (19) с учетом (20) после некоторых преобразований приводится к следующей форме:

$$\delta^3 - \delta^2(b_{02} + P) + \delta(1 + S^2 + b_{02}P) - S^2 b_{02} = 0. \qquad (20а)$$

Здесь

$$P = \frac{|\Delta|^2\beta_c}{D(\beta_e - \beta_c)}; \quad D_2 S = \frac{\beta_{s2}}{\beta_{e2}};$$

S — параметр пространственного заряда.

Уравнение (20) при отсутствии накачки ($P = 0$) совпадает с обычным дисперсионным уравнением ЛБВМ [6]. Для получения простых аналитических соотношений положим $S = 0$, что физически соответствует отсутствию связи между синхронными волнами, в результате чего одна из волн остается несвязанной. При этом один из корней уравнения (20) есть $\delta_1 = 0$, два других

$$\delta_{2,3} = \frac{b_{02} + P}{2} \pm j\sqrt{1 - \left(\frac{b_{02} - P}{2}\right)^2}. \qquad (21)$$

Сравнивая (21) с решением для обычной ЛБВМ [6] (при $S = 0$)

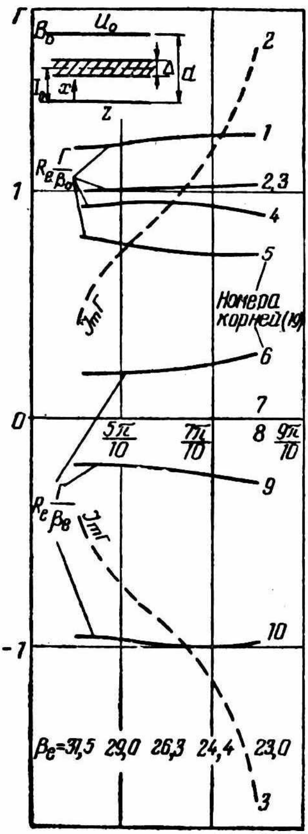
$$\delta_{2,3} = \frac{b_{02}}{2} \pm j\sqrt{1 - \left(\frac{b_{02}}{2}\right)^2}, \qquad (22)$$

мы видим, что наличие накачки приводит к следующим явлениям.

1. Изменяется постоянная распространения «горячего» сигнала, которая зависит теперь не только от величины параметра холодного рассинхронизма, но и от величины накачки.

2. Поскольку для системы с положительной нормальной дисперсией $b_{02} < 0$ при $\omega_2 < \omega$, то для $\omega_c > \omega_2$ ($P < 0$) появляется нарастающая волна даже в тех случаях, когда $|b_{02}| > 2$, т. е. за пределами зоны усиления ЛБВМ. Если же дисперсия

аномальная (что часто наблюдается при работе на $(+1)$-ой пространственной гармонике); нарастающее решение существует и при $P > 0$ $(\omega_c < \omega_2)$.



Для подтверждения сказанного, на рисунке приводятся результаты расчета уравнения (19) в полосе пропускания замедляющей системы, из которого следует, что нарастающее решение существует всегда, причем постоянная распространения нарастающей волны почти совпадает с постоянной распространения электронного потока.

Для расчета величины мощности сигнала на частоте ω_2 необходимо решать задачу определения амплитуд нормальных волн. Эта проблема представляет самостоятельный интерес и здесь не рассматривается.

Таким образом, из результатов анализа следует, что наличие каких-либо неустойчивостей в электронном потоке на сравнительно низких частотах приводит к появлению колебаний с частотами $\omega \pm \omega_1$. Для случая $\omega_2 = \omega - \omega_1$ возможны комплексные решения, т. е. существует нарастающая электромагнитная волна вблизи основной частоты. Это явление принципиально неустранимо в лучевых приборах M-типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Побочные колебания в сверхвысокочастотных электровакуумных приборах (под ред. Ю. Н. Хлопова). Обзоры по ЭТ «Серия электроника СВЧ», вып. № 2 (166), 1970.

2. R. Hutter. Beam and Wave Electronics in Microwave Mubes, Mo, Grow Hill, N. Y., 1960. 334 с.

3. В. С. Стальмахов. Электронные волны в сверхвысокочастотных лучевых приборах со скрещенными полями. Изд-во СГУ, 1970. 288 с.

4. A. Sasaki. T. Van Durer, IEEE Trans. on El. Dev., ED-13, 5. 1966, p. 494—502.

5. У. Люиселл. Связанные и параметрические колебания в электронике. Изд-во иностр. лит-ры, 1961. 351 с.

6. В. Н. Шевчик, Д. И. Трубецков. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. Изд-во «Советское радио», 1970. 584 с.