К ТЕОРИИ ДЛИННЫХ ЛИНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Е. Т. Нижник, Ю. П. Никитин, В. К. Сирик

Херсон

Теория длинных линий с периодической неоднородностью (в дальнейшем их будем называть просто линии) широко применяется при расчетах коаксиальных, двухпроводных и многопроводных линий передач, линейных вибраторных антенн и т. д. Несмотря на то, что теория этих линий имеет важное значение для решения ряда технических задач, она разработана недостаточно.

В настоящей статье предлагается метод анализа линий для гармонического режима. Рассматриваем линию конечной длины l, в которой генератор синусоидальной э. д. с. $u_н(t)$ включен в начале, а в конце линии включена нагрузка, состоящая из произвольной комбинации сосредоточенных сопротивлений, емкостей и индуктивностей с параметрами, не зависящими от времени. Предлагаемая методика приводит к простым и наглядным выражениям и может явиться основой общего метода расчета линий при любых режимах.

Электрические процессы в двухпроводных линиях описываются системой дифференциальных уравнений [1]:

$$-\frac{d\dot{U}(x)}{dx} = z(x)\dot{I}(x); \tag{1}$$

$$-\frac{d\dot{I}(x)}{dx} = y(x)\dot{U}(x),$$

где $\dot{U}(x)$, $\dot{I}(x)$ — соответственно комплексы значений напряжения и тока в данном сечении линии;

$z(x) = j\omega L(x) + R(x)$;

$y(x) = j\omega C(x) + G(x)$;

$L(x)$, $R(x)$, $C(x)$, $G(x)$ — погонные параметры;

x — расстояние от начала линии до данного сечения;

ω — круговая частота напряжения, вырабатываемая источником питания.

На коэффициенты системы (1) из физических соображений наложим следующие ограничения при $x \in [0, l]$:

1) функция $z(x) \geqslant 0$, $y(x) \geqslant 0$ непрерывны, однозначны, определенны и имеют производные до третьего порядка включительно;

2) функции $z(x)$, $y(x)$, а также их производные ограничены по абсолютной величине;

3) $z(x) = z(x + ml_0)$, $y(x) = y(x + ml_0)$, $l = nl_0$ (m, n — целые положительные числа).

Перейдем от системы (1) к двум уравнениям, каждое из которых содержит только один комплекс неизвестной функции $\dot{U}(x)$ или $\dot{I}(x)$ и их производные (в дальнейшем для сокращения записи указывать аргументы функций не будем, если в этом не будет необходимости):

$$\frac{d^2\dot{U}}{dx^2} - \frac{d}{dx}(\ln z)\frac{d\dot{U}}{dx} - zy\dot{U} = 0; \qquad (2)$$

$$\frac{d^2\dot{I}}{dx^2} - \frac{d}{dx}(\ln y)\frac{d\dot{I}}{dx} - xy\dot{I} = 0. \qquad (3)$$

Решаем уравнение (2) при следующих граничных условиях:

$$\dot{U}(x)\big|_{x=0} = \dot{U}_н, \quad \dot{U}(x)\big|_{x=l} = \dot{I}(x)\big|_{x=l} z_н,$$

где $\dot{U}_н$ — комплекс $U_н(t)$, а $z_н$ — комплекс сопротивления нагрузки.

В уравнении (2) произведем замену переменного, для чего положим

$$\dot{U}(x) = w(x)\exp\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{dz(s)}{z(s)}\right) = w(x)\sqrt{\frac{z(x)}{z(0)}} = w(x)N_1(x). \qquad (4)$$

После соответствующих упрощений

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \nu^2 w = 0, \qquad (5)$$

где

$$\nu^2 = zy + \left(\frac{1}{2z}\frac{dz}{dx}\right)^2 - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2z}\frac{dz}{dx}\right).$$

Положим

$$w = w_1, \quad \frac{dw}{dx} = w_2, \quad \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{dw_2}{dx} = \nu^2 w_1$$

и приведем уравнение (5) к однородной системе уравнений, которую запишем в матричной форме:

$$\frac{dw}{dx} = WT, \tag{6}$$

где $W = \begin{pmatrix} w_{11}, & w_{12} \\ w_{21}, & w_{22} \end{pmatrix}$ — матрица фундаментальной системы решений системы уравнений (6);

$T = \begin{pmatrix} 0, & \nu^2 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ — транспонированная матрица коэффициентов этой системы.

Наряду с (6) будем рассматривать систему

$$\frac{dW}{dx} = \varepsilon W T_1 \tag{7}$$

(ε — вещественный параметр, а $T = \varepsilon T_1$).

Согласно [2], уравнению (7) формально удовлетворяет ряд

$$W = W_0\left(E + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \varepsilon^k\right) = W_0 W_{1\varepsilon}, \tag{8}$$

где $W_0 = W(0) = E$; E — единичная матрица;

$$W_1 = E + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k \varepsilon^k;$$

$$\Omega_k = \underbrace{\int_0^x \ldots \int_0^s}_{k \text{ раз}} T(s)\, \underbrace{ds \ldots ds}_{k \text{ раз}}.$$

В силу периодичности коэффициентов системы (1) матрицы $W_1(x)$, $W_1(x + l_0), \ldots$ будут интегральными, поэтому фундаментальная система решений уравнения (7) $W_1(x + l_0)$ выражается через $W_1(x)$ равенством

$$W_1(x + l_0) = VW_1(x), \tag{9}$$

где V — матрица, у которой $\det V \neq 0$ при $x = 0$; при $x = 0$ $W_1(l_0) = V$. В соответствии с (8) имеем

$$V = E + \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(l_0)\, \varepsilon^k,$$

где $\Omega_k(l_0)$ означает, что интегрирование ведется в пределах от 0 до l_0.

Решение (7) будем искать в виде

$$W(x) = \exp(Bx)\, D(x), \tag{10}$$

где B — матрица, не зависящая от x; $D(x)$ — периодическая матрица.

Матрицы B и D можно представить в виде рядов

$$B = \frac{1}{l_0} \ln V = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \varepsilon^k; \qquad (11)$$

$$D = E + \sum_{k=1}^{\infty} D_k(x) \varepsilon^k. \qquad (12)$$

Подставим (11) в (7) и получим выражение, которое после умножения слева на $\exp(-Bx)$ примет вид

$$\frac{dD}{dx} = DT_1\varepsilon - BD. \qquad (13)$$

Подставим в (13) соотношения (11), (12). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем

$$\frac{dD_k}{dx} = D_{k-1}T_1 - D_k - \sum_{m=1}^{k-1} B_m D_{k-m}. \qquad (14)$$

T_1, D_k — периодические матрицы; выбираем D_k таким, чтобы

$$\int_0^{l_0} D_k dx = 0,$$

тогда получим

$$B_k = \frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} \left(D_{k-1}T_1 - \sum_{m-1}^{k-1} B_m D_{k-m} \right) dx; \qquad (15)$$

$$D_k = \int_0^{x} \left(D_{k-1}T_1 - \sum_{m=1}^{k-1} B_m D_{k-m} \right) dx. \qquad (16)$$

Таким образом, коэффициенты рядов (11) и (12) будут найдены, и эти ряды будут сходиться при некоторых значениях.

Ограничимся определением коэффициентов B_1, B_2, D_1, D_2, которые равны

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{111}, & b_{112} \\ b_{121}, & b_{122} \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_{211}, & b_{212} \\ b_{221}, & b_{222} \end{pmatrix};$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_{111}, & d_{112} \\ d_{121}, & d_{122} \end{pmatrix}; \quad D_2 = \begin{pmatrix} d_{211}, & d_{212} \\ d_{221}, & d_{222} \end{pmatrix};$$

$$b_{111} = b_{122} = b_{212} = b_{221} = 0;$$

$$d_{111} = d_{121} = d_{122} = d_{212} = d_{221} = 0;$$

$$b_{121} = \frac{1}{\varepsilon}, \; b_{112} = \frac{1}{\varepsilon l_0} \int_0^{l_0} \nu^2 dx;$$

$$b_{211} = -b_{222} = \frac{1}{\varepsilon^2 l_0} \int_0^{l_0} \left(\int_0^{x} \nu^2 dx - \frac{x}{l_0} \int_0^{l_0} \nu^2 dx \right) dx;$$

$$d_{112} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^x \nu^2 dx - \frac{x}{l_0}\int_0^{l_0} \nu^2 dx\right);$$

$$d_{211} = -d_{222} = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x \left(\int_0^x \nu^2 dx - \frac{x}{l_0}\int_0^{l_0} \nu^2 dx\right) dx -$$

$$- \frac{x}{\varepsilon^2 l_0}\int_0^{l_0}\left(\int_0^x v^2\, dx - \frac{x}{l_0}\int_0^{l_0} \nu^2 dx\right) dx.$$

Значения матриц определим по формулам (11) — (12)

$$B = \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \ldots, \quad D = E + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \ldots$$

Рассмотрим матрицу D_1, элемент которой d_{112} можно записать следующим образом:

$$d_{112} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^{ml_0 + l_1} \nu^2 dx - \frac{ml_0 + l_1}{l_0}\int_0^{l_0} \nu^2 dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^{l_1} \nu^2 dx - \frac{l_1}{l_0}\int_0^{l_0} \nu^2 dx\right), \ 0 \leqslant l_1 \leqslant l_0,$$

отсюда следует

$$d_{112} \leqslant (\nu_1^2 - \nu_2^2)\, l_1,$$

$$\nu_1^2 = \sup_{x \in [0,\ l_0]} |\nu^2(x)|; \quad \nu_2^2 = \sup_{x \in [0,\ l_1]} |\nu^2(x)|;$$

Из этого выражения видно, что при $l_1 \approx 0$, $l_1 \approx l_0$ $d_{112} \approx 0$ при слабой неоднородности линии $\nu_1^2 \approx \nu_2^2$ и $d_{112} \approx 0$. Очевидно, что при перечисленных условиях элементы матрицы D считаем равными нулю и мы можем ее заменить нуль-матрицей; тогда матрицы B_2, B_3, ... и D_2, D_3, ... также будут нулевыми. Таким образом, в качестве приближенного решения уравнения (6) можно взять соотношение

$$W = \exp(Bx), \tag{17}$$

где

$$B = \varepsilon B_1.$$

Поскольку решение уравнения (6) мажорируется рядом

$$W = \exp(M_1 x),$$

где M_1 — постоянная матрица, элементы которой являются положительными числами, равными максимальным значениям модулей соответствующих элементов матрицы T, т. е. $T(x) \leqslant M_1$, произведем оценку точности полученного приближенного решения соотношением

$$\exp(M_2 x) \leqslant \exp(Bx) \leqslant \exp(M_1 x),$$

где M_2 — постоянная матрица, элементы которой являются числами, равными минимальным значениям соответствующих элементов матрицы T, т. е. $T(x) \geqslant M_2$.

Воспользуемся формулой Сильвестра [3] и определим значение $\exp(Bx)$, которое равно

$$\exp(Bx) = P_1 \exp(\lambda_1 x) + P_2 \exp(\lambda_2 x),$$

где λ_1, λ_2 — характеристические числа матрицы B, определяемые из уравнения $\det(B - \lambda E) = 0$, или

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} \nu^2 dx} = \pm \lambda.$$

Матрицы P_1 и P_2 равны

$$P_1 = \frac{B - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad P_2 = \frac{B - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda^2 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix},$$

тогда

$$\exp(Bx) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \exp(\lambda x) + \exp(-\lambda x) & \lambda \exp(\lambda x) \exp(-\lambda x) \\ \frac{\exp(\lambda x) - \exp(-\lambda x)}{1} & \exp(-\lambda x) \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (2) имеет вид

$$U = N_1 (A_1 \exp(\lambda x) + A_2 \exp(-\lambda x)), \tag{18}$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные. При данном λ (18) является точным решением уравнения (2) в точках с координатами $x = ml_0$.

Полученное решение (18), состоящее из двух независимых решений, можно интерпретировать как две независимые характеристические волны напряжения, распространяющиеся в линии в противоположных направлениях, что соответствует физическим явлениям, происходящим в ней.

Внесем однозначность в определения функций комплексного переменного λ и N_1, для чего условимся понимать под этими функциями те значения корней, которым соответствуют положительные вещественные части, т. е. положим $\operatorname{Re}(\lambda) \geqslant 0$,

$$\operatorname{Re}(N_1) \geqslant 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg \lambda \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg N_1 \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Используя граничные условия, определяем комплексы напряжения и тока в линии и запишем их через гиперболические функции в форме Фурье:

$$U(x) = U_{\text{н}} N_1(x) \frac{\operatorname{sh} \lambda (l - x) + \alpha \operatorname{ch} \lambda (l - x)}{\operatorname{sh} \lambda l + \alpha \operatorname{ch} \lambda l}; \tag{19}$$

$$I(x) = \frac{U_{\text{н}} N_1(x)}{z(x)} \times$$

$$\times \frac{\left(\lambda - \frac{\alpha}{2z(x)} \cdot \frac{dz(x)}{dx}\right) \operatorname{ch} \lambda (l - x) + \left(\lambda\alpha - \frac{1}{2z(x)} \cdot \frac{dz(x)}{dx}\right) \operatorname{sh} \lambda (l - x)}{\operatorname{sh} \lambda l + \alpha \operatorname{ch} \lambda l}, \quad (20)$$

где

$$\alpha = \frac{\lambda z_{н}}{z(l) + \frac{z_{н}}{z(l)} \cdot \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=l}}.$$

Решения (19)—(20) являются общими и простыми приближенными решениями системы (1), физический смысл которых состоит в следующем. Если рассмотреть линию, состоящую из очень большого числа отрезков однородных линий, то распространение электромагнитной волны сопровождается бесконечным числом отражений от границ этих отрезков вследствие неоднородности линии. Наши приближения получаются в том случае, если пренебречь повторными отражениями. Более высокое приближение получается, если мы учтем вклады волн, отразившихся два, три и более раз. Эти решения тем точнее, чем медленнее изменяются параметры линии по длине, а для однородной линии комплексы напряжения и тока совпадают. Таким образом, эти приближения могут служить решением системы (1) для линии со слабой неоднородностью; дают хорошие приближения для вычисления комплексов напряжения и тока для малых временных интервалов и в точках линий с координатами.

Используя соотношения (19)—(20), свяжем входные и выходные значения комплексов напряжения и тока для отрезка линии длиной

$$\dot{U}(0) = A\dot{U}(l_0) + BI(l_0);$$

$$I(0) = C\dot{U}(l_0) + D\dot{I}(l_0); \quad (21)$$

$$A = D = \operatorname{ch} \lambda l_0; \quad B = \frac{z(l_0)}{\lambda - \frac{\alpha}{2z(l_0)} \cdot \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=l_0}};$$

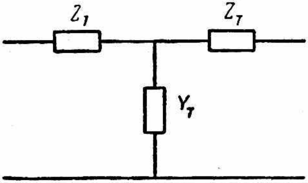
$$C = \left(\lambda\alpha - \frac{1}{2z(l_0)} \cdot \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=l_0}\right) \frac{\operatorname{sh} \lambda l_0}{\alpha z(l_0)}.$$

Для отдельных типов линий (высоковольтные линии электропередач, некоторые замедляющие системы, представляющие собой периодическую систему типа коаксиал с диафрагмами на центральном проводе и т. д.), для которых точки с координатами $x = ml_0$ являются экстремальными для функций $z(x)$ или $y(x)$, соблюдается условие $AD - BC = 1$. В этом случае отрезок линии длиной l_0 может быть заменен симметричным Т- или П-образным четырехполюсником с параметрами $Z_т$, $Y_т$, $Z_п$ и $Y_т$ (рис. 1, 2), значения которых даны в [4]. Полоса пропускания такого отрезка определяется условием [4]:

$$-1 < \cos \gamma l_0 < 1, \quad (22)$$

где $\gamma = \sqrt{zy}$ — постоянная распространения; γl_0 — сдвиг фазы на отрезок линии длиной l_0. Поэтому некоторые типы периодически неоднородных линий можно представить в виде эквивалентной схемы, состоящей из цепочки симметричных четырехполюсников; эти линии могут пропускать волны в пределах изменений сдвига фазы на отрезок длиной l_0 от 0 до π и от 0 до $-\pi$.

Предлагаемая методика позволяет произвести приближенный анализ гармонических процессов в периодически неоднородных длинных линиях при произвольных граничных условиях и любых законах изменения погонных параметров.



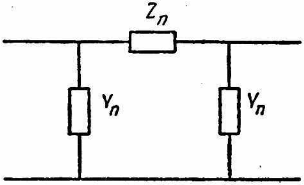


Рис. 1. *T*-образный симметричный четырехполюсник.

Рис. 2. П-образный симметричный четырехполюсник.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Н. Литвиненко, В. И. Сошников. Теория неоднородных линий и их приложение в радиотехнике. Изд-во «Советское радио», 1964. 342 с.
2. Н. П. Еругин. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. АН БССР, Минск, 1963. 280 с.
3. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. Изд-во «Наука», 1966. 300 с.
4. Г. В. Зевеке и др. Основы теории цепей. Изд-во «Энергия», 1965. 340 с.