МОМЕНТ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СИСТЕМУ ДВУХ ЖЕСТКО СВЯЗАННЫХ ТЕЛ ПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ (РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТЕЛАМИ МЕНЬШЕ ДЛИНЫ ВОЛНЫ)

Н. А. Хижняк. Л. К. Гал. В. С. Жилков, А. В. Орлова, Г. П. Щербинин

Харьков

Рассматривается пондеромоторное действие электромагнитной волны на систему двух диэлектрических эллипсоидов, жестко связанных коромыслом, длина которого меньше длины волны в прямоугольном волноводе.

Пусть $oy_{в}$, $ox_{в}$, $oz_{в}$ — оси системы координат, связанной с волноводом; oy', ox', oz' — оси системы координат, связанной с эллипсоидами, φ — угол наклона коромысла k оси oy'; Θ — угол наклона коромысла к оси $oy_{в}$. Эллипсоиды характеризуются диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Будем рассматривать эллипсоиды вращения, уравнения поверхности которых имеют вид

$$\frac{x^{(\prime)2} + y^{(\prime)2}}{a^2} = \frac{z^{(\prime)2}}{b^2} = 1.$$

Построение полей, рассеянных диэлектрическими эллипсоидами

Момент пондеромоторных сил, действующих на данную систему, определяется аналогично случаю, когда длина коромысла больше длины волны в волноводе. Размеры диэлектрических эллипсоидов малы по сравнению с длиной волны; внутренние поля диэлектрических эллипсоидов, построенные на основе интегральных уравнений макроскопической электродинамики, эквивалентных уравнениям Максвелла [1], имеют вид

$$E_{x_{вн}}(\vec{r}_1') = \frac{E_{ox}(\vec{r}') + E^{II}_{x\,рас}(\vec{r}_1')}{A};$$

$$E_{y_{вн}}(\vec{r}_1') = \frac{E_{oy}(\vec{r}') + E_{y\,рас}(\vec{r}_1')}{B}; \qquad (1)$$

$$E_{z_{вн}}(\vec{r}_1') = \frac{E_{oz}(\vec{r}') + E^{II}_{z\,рас}(\vec{r}_1')}{A};$$

$$E_{x_{вн}}(\vec{r}_2) = \frac{E_{ox}(\vec{r}_2) + E^{I}_{x\,рас}(\vec{r}_2)}{A};$$

$$E_{y_{вн}}(\vec{r}_2) = \frac{E'_{oy}(\vec{r}_2) + E^{I}_{y\,рас}(\vec{r}_2)}{B}, \qquad (2)$$

$$E_{z_{\text{вн}}}(\vec{r}_2) = \frac{E_{oz}(\vec{r}_2) + E^{\mathrm{I}}_{z\,\text{рас}}(\vec{r}_2)}{A},$$

где $E^{\mathrm{I}}_{i\,\text{рас}}(\vec{r}_1)$ — поле, рассеянное вторым эллипсоидом во внутренней точке первого эллипсоида;

$$A = 1 - (\varepsilon - 1)\, I_0^{200};\ B = 1 - (\varepsilon - 1)\, I_0^{002};$$

I_0^{200}, I_0^{002} — ньютоновские потенциалы эллипсоида [2];

E_{oi} — падающее невозмущенное поле.

Однако поля, рассеянные обоими эллипсоидами, расстояние между которыми меньше длины волны, имеют иной вид, чем в случае, когда $l/\lambda > 1$. Поле, рассеянное вторым эллипсоидом во внутренних точках первого эллипсоида:

$$\vec{E}_{\text{рас}}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2) \int\limits_{v_2} (\varepsilon - 1)\, \vec{E}_{\text{вн}}(\vec{r}_2) \times$$

$$\times \frac{e^{ik\,|\vec{r}_1 - \vec{r}_2{}'|}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2{}'|}\, d\vec{r}_2{}'. \tag{3}$$

Рассеянное поле определено в системе координат, связанной со вторым эллипсоидом; $\vec{r}_1{}'$ — расстояние от центра второго эллипсоида до некоторой внутренней точки первого эллипсоида; $\vec{r}_2$ — расстояние между центром второго эллипсоида и его внутренней точкой.

Так как расстояние между эллипсоидами мало, $|\vec{r}_{01}|/\lambda < 1$. Следовательно, поля можно разложить в ряд по малому параметру. Формально разложение проводим по параметру ik:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^{(0)}(\vec{r}) + (ik)\, \vec{E}^{(1)}(\vec{r}) + (ik)^2\, \vec{E}_2(\vec{r}) + \ldots;$$

$$f = \frac{e^{-ikx}}{x} = \frac{1}{x} - (ik) + (ik)^2 \frac{1}{2} + \ldots \tag{4}$$

Поле на расстоянии l будем считать статическим. Для первого члена разложения

$$\vec{E}^{\mathrm{II}}_{\text{расс}}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}\operatorname{div} \int\limits_{v_2} (\varepsilon - 1)\, \vec{E}_{\text{вн}}(\vec{r}_2)\, \frac{d\vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \tag{5}$$

Учитывая, что эллипсоиды малы, т. е. $|\vec{r}_1| \gg |\vec{r}_2|$, можем пренебречь величиной $|\vec{r}_2|$ и записать поле рассеяния:

$$\vec{E}^{\mathrm{II}}_{\text{расс}}(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad}\operatorname{div} \int\limits_{v_2} (\varepsilon - 1)\, \vec{E}_{\text{вн}}(\vec{r}_2)\, \frac{d\vec{r}_2}{|\vec{r}_1|}. \tag{6}$$

Поле, рассеянное первым эллипсоидом в центре второго, имеет аналогичный вид:

$$\vec{E}^{\mathrm{I}}_{\text{расс}}(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \operatorname{div} \int\limits_{v_1} (\varepsilon - 1) \vec{E}_{\text{вн}}(\vec{r}_1) \frac{d\vec{r}_1}{|\vec{r}_2|}. \tag{7}$$

После операций интегрирования и дифференцирования в формулах (6) — (7), учитывая, что $|\vec{r}_1| \approx |\vec{r}_{01}|$, где x_{01}, y_{01}, z_{01} — координаты центра первого эллипсоида, для компонент рассеянного поля будем иметь следующие выражения:

$$\begin{aligned}
E^{\mathrm{II}}_{x\,\text{расс}}(\vec{r}_{01}) &= -\frac{(\varepsilon-1)v}{4\pi} r_{01}^{-3} E_{x_{\text{вн}}}(\vec{r}_{02});\\
E^{\mathrm{II}}_{y\,\text{расс}}(\vec{r}_{01}) &= \frac{(\varepsilon-1)v}{4\pi} r_{01}^{-5}\,[E_{y_{\text{вн}}}(\vec{r}_{02})(3y_{01}^2 + r_{01}^2) +\\
&\quad + E_{z_{\text{вн}}}(\vec{r}_{02})\, 3y_{01}z_{01}];\\
E^{\mathrm{II}}_{z\,\text{расс}}(\vec{r}_{01}) &= \frac{(\varepsilon-1)v}{4\pi} r_{01}^{-5}\,[E_{y_{\text{вн}}}(r_{02})\, 3y_{01}z_{01} + E_{z_{\text{вн}}}(\vec{r}_{02}) \times\\
&\quad \times (3z_{01}^2 - r_{01}^2)];
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
E^{\mathrm{I}}_{x_{\text{расс}}}(\vec{r}_{02}) &= -\frac{(\varepsilon-1)V}{4\pi} r_{02}^{-3} E_{x_{\text{вн}}}(\vec{r}_{01});\\
E^{\mathrm{I}}_{y_{\text{расс}}}(\vec{r}_{02}) &= \frac{(\varepsilon-1)v}{4\pi} r_{02}^{-5}\,[E_{y_{\text{вн}}}(\vec{r}_{01})(3y_{02}^2 - r_{02}^2) +\\
&\quad + E_{z_{\text{вн}}}(\vec{r}_{01})\, 3y_{02}z_{02}];\\
E^{\mathrm{I}}_{z_{\text{расс}}}(\vec{r}_{02}) &= \frac{(\varepsilon-1)v}{4\pi} r_{02}^{-5}\,[E_{y_{\text{вн}}}(\vec{r}_{01})\, 3y_{02}z_{02} +\\
&\quad + E_{z_{\text{вн}}}(\vec{r}_{01})(3z_{02}^2 - r_{02}^2)].
\end{aligned} \tag{9}$$

В формулах (8) — (9) учтено, что все системы координат выбраны таким образом, что в любой из них $x_{01} = x_{02} = x_0 = 0$. При

$$y_{01} = -l\cos\varphi,\; y_{02} = l\cos\varphi,\; z_{01} = +l\sin\varphi,\; z_{02} = -l\sin\varphi,$$

выражения для составляющих рассеянных полей можем записать в виде

$$\begin{aligned}
E^{\mathrm{II}}_{x\,\text{расс}}(\vec{r}_{01}) &= A_1 E_{x_{\text{вн}}}(\vec{r}_{02});\\
E^{\mathrm{II}}_{y\,\text{расс}}(\vec{r}_{01}) &= B_1 E_{y_{\text{вн}}}(\vec{r}_{02}) + B_2 E_{z_{\text{вн}}}(\vec{r}_{02});\\
E^{\mathrm{II}}_{z\,\text{расс}}(\vec{r}_{01}) &= B_2 E_{y_{\text{вн}}}(\vec{r}_{02}) + C_3 E_{z_{\text{вн}}}(\vec{r}_{02});\\
E^{\mathrm{I}}_{x_{\text{расс}}}(\vec{r}_{02}) &= A_1 E_{x_{\text{вн}}}(\vec{r}_{01});
\end{aligned} \tag{10}$$

$$E^{\mathrm{I}}_{y_{\text{расс}}}(\vec{r}_{02}) = B_1 E_{y_{\text{вн}}}(\vec{r}_{01}) + B_2 E_{z_{\text{вн}}}(\vec{r}_{01});$$

$$E^{\mathrm{I}}_{z_{\text{расс}}}(\vec{r}_{02}) = B_2 E_{y_{\text{вн}}}(\vec{r}_{01}) + C_3 E_{z_{\text{вн}}}(\vec{r}_{01}), \tag{11}$$

где

$$A_1 = -\frac{(\varepsilon - 1)\,v}{4\pi} l^{-3}, \quad B_1 = \frac{(\varepsilon - 1)\,v}{4\pi}(3\cos^2\varphi - 1)\,l^{-3};$$

$$B_2 = -\frac{(\varepsilon - 1)\,v}{4\pi} l^{-3}\, 3\sin\varphi\cos\varphi, \quad C_3 = \frac{(\varepsilon - 1)\,v}{4\pi} l^{-3}(3\sin^2\varphi - 1).$$

Определение внутренних полей диэлектрических эллипсоидов

Подставляя значения рассеянных полей (10) — (11) в формулы (1) — (2), получим систему уравнений для определения внутренних полей диэлектрических эллипсоидов. Решая эту систему уравнений относительно искомых внутренних полей, получаем следующие значения составляющих:

$$E_{x_{\text{вн}}}(\vec{r}_{01}) = E_{x_{\text{вн}}}(\vec{r}_{02}) = 0;$$

$$E_{y_{\text{вн}}}(\vec{r}_{01}) = \frac{1}{B} E_{0y}(\vec{r}_{01}) + \frac{(\varepsilon - 1)\,vl^{-3}}{4\pi B^2}(3\cos^2\varphi - 1)\,E_{0y}(\vec{r}_{02}) - \frac{3(\varepsilon - 1)\,vl^{-3}}{4\pi AB}\sin\varphi\cos\varphi E_{0z}(\vec{r}_{02});$$

$$E_{y_{\text{вн}}}(\vec{r}_{02}) = \frac{1}{B} E_{0y}(\vec{r}_{02}) + \frac{(\varepsilon - 1)\,vl^{-3}}{4\pi B^2}(3\cos^2\varphi - 1)\,E_{0y}(\vec{r}_{01}) - \frac{3(\varepsilon - 1)\,vl^{-3}}{4\pi AB}\sin\varphi\cos\varphi E_{0z}(\vec{r}_{01});$$

$$E_{z_{\text{вн}}}(\vec{r}_{01}) = \frac{1}{A} E_{0z}(\vec{r}_{01}) - \frac{3(\varepsilon - 1)\,vl^{-3}}{4\pi AB}\sin\varphi\cos\varphi E_{0y}(\vec{r}_{02}) + \frac{(\varepsilon - 1)\,vl^{-3}}{4\pi A^2}(3\sin^2\varphi - 1)\,E_{0z}(\vec{r}_{02}); \tag{12}$$

$$E_{z_{\text{вн}}}(\vec{r}_{02}) = \frac{1}{A} E_{0z}(\vec{r}_{02}) - \frac{3(\varepsilon - 1)\,vl^{-3}}{4\pi AB} E_{0y}(\vec{r}_{01}) + \frac{(\varepsilon - 1)\,vl^{-3}}{4\pi A^2}(3\sin^2\varphi - 1)\,E_{0z}(\vec{r}_{01}).$$

Если в формулах (12) под $\vec{r}_{01}$ и $\vec{r}_{02}$ понимать расстояние от центра коромысла, соединяющего два эллипсоида, до соответствующих центров первого и второго эллипсоидов, то внутренние поля определены в системе координат, связанной с центром коромысла.

Запишем составляющее невозмущенного и падающего поля в системе координат, связанной с центром коромысла. Предположим, что частота падающей волны такова, что в волноводе может распространяться лишь основная TE-волна, которая оказывает пондеромоторное действие на систему двух эллипсоидов.

Составляющие падающего поля имеют вид

$$E_{y}(\vec{r}_{01}) = -\frac{ik}{k_x} H_0 e^{-i\beta_{10}\frac{l}{2}\sin\varphi} \cos(\Theta - \varphi);$$

$$E_{0z}(\vec{r}_{01}) = -\frac{ik}{k_x} H_0 e^{-i\beta_{10}\frac{l}{2}\sin\varphi} \sin(\Theta - \varphi);$$

$$E_{0y}(\vec{r}_{02}) = -\frac{ik}{k_x} H_0 e^{i\beta_{10}\frac{l}{2}\sin\varphi} \cos(\Theta - \varphi); \tag{13}$$

$$E_{0z}(\vec{r}_{02}) = -\frac{ik}{k_x} H_0 e^{i\beta_{10}\frac{l}{2}\sin\varphi} \sin(\Theta - \varphi),$$

где

$$k_x = \frac{\pi}{d}, \quad \beta_{10} = \sqrt{x^2 - k_x^2}.$$

Момент сил, действующих на систему двух тел

Определив внутреннее поле каждого диэлектрического эллипсоида, строим векторы поляризации и таким образом находим выражения для момента сил

$$M = \frac{1}{2} \int_v \{[\vec{P}\vec{E}_0^*] + [\vec{r}(\vec{P}\nabla)\vec{E}_0^*]\}\, dv = M_1 + M_2. \tag{14}$$

Момент сил в случае двух диэлектрических эллипсоидов, расположенных на расстоянии $l < \lambda$, имеет следующий вид:

$$M_{x_1} = \frac{(\varepsilon - 1) k^2 v}{4\pi k_x^2} H_0 H_0^* \left\{ \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{\pi}\right) \cos(\Theta - \varphi) \sin(\Theta - \varphi) + \right.$$

$$+ \frac{(\varepsilon - 1) v l^{-3}}{4\pi} \left(\frac{3\cos^2\varphi - 1}{B^2} - \frac{3\sin^2\varphi - 1}{A^2}\right) \cos(\Theta - \varphi) \sin(\Theta - \varphi) +$$

$$\left. + \frac{3(\varepsilon - 1) v l^{-3}}{4\pi AB} \sin\varphi \cos\varphi \cos 2(\Theta - \varphi) \right\}; \tag{15}$$

$$M_{x_2} = -\frac{(\varepsilon - 1)^2 v^2 k^2 \beta_{10}^2}{64\pi^2 l k_x^2} H_0 H_0^* \sin^2\Theta \left\{ \sin 2(\Theta - \varphi) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{3\cos^2\varphi - 1}{B^2} - \frac{3\sin^2\varphi - 1}{A^2}\right) + \frac{3\sin^2\varphi \cos 2(\Theta - \varphi)}{AB} \right\}. \tag{16}$$

Устремив в формулах (15) — (16) $\varepsilon \to \infty$, получим момент сил, действующих на систему жестко связанных металлических эллипсоидов. В этом случае $A = -\varepsilon I_0^{002}$, $B = -\varepsilon I_0^{200}$.

Для момента сил имеем следующее выражение:

$$M_x = -\frac{a^4 b^2 k^2 \beta_{10}^2}{36 k_x^2 l} H_0 H_0^* \sin^2\Theta \left\{ \sin 2(\Theta - \varphi) \left[\frac{3\cos^2\varphi - 1}{(I_0^{200})^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{3\sin^2\varphi - 1}{(I_0^{002})^2} \right] + \frac{3\sin 2\varphi \cos 2(\Theta - \varphi)}{I_0^{200} I_0^{002}} \right\} + \frac{a^2 b k^2}{6 k_x^2} H_0 H_0^* \left\{ \sin 2(\Theta - \varphi) \times \right.$$

$$\times\left(\frac{1}{I_0^{002}}-\frac{1}{I_0^{200}}\right)+\frac{a^2b}{3l^3}\sin 2(\Theta-\varphi)\left[\frac{3\cos^2\varphi-1}{(I_0^{200})^2}-\frac{3\sin^2\varphi-1}{(I_0^{002})^2}\right]+$$
$$\left.+\frac{a^2b}{l^3}\frac{\sin 2\varphi\cos 2(\Theta-\varphi)}{I_0^{200}I_0^{002}}\right\}. \tag{17}$$

Допустим, что эллипсоиды ориентированы таким образом, что угол $\varphi=0$. Если одну из полуосей эллипсоида положить равной другой ($a=b$), из формул (15) — (16) получим момент сил для системы двух диэлектрических шариков. В этом случае $A=$ $=B=\frac{\varepsilon+2}{3}$ и момент сил имеет вид

$$M_x=\frac{3(\varepsilon-1)^2a^6k^2}{(\varepsilon+2)^2k_x^2l^3}\left[1-\frac{\beta_{10}^2l^2}{2}\sin^2\Theta\right]H_0H_0^*\sin\Theta\cos\Theta. \tag{18}$$

Полагая в формуле (17) одну из полуосей эллипсоида равной нулю, получаем момент сил, действующих на систему двух жестко связанных металлических дисков:

$$M_x=\frac{32ka^3}{3cS\beta_{10}}\Pi\left[1-\frac{2\beta_{10}^2a^3}{3l}\sin^2\Theta(3\cos^2\varphi-1)+\right.$$
$$\left.+\frac{4a^3}{3c^3}\cdot(3\sin^2\varphi-1)\right]\sin 2(\Theta-\varphi), \tag{19}$$

где Π — мощность, проходящая по волноводу и переносимая волной H_{10}.

Из формулы (19) следует, что максимальный момент пондеромоторных сил, действующих на систему, при ориентации дисков находится под углом $\Theta-\varphi=\pi/4$ к оси oy волновода.

Полученные соотношения использовались при расчете характеристик двухпластинчатых пондеромоторных ваттметров сантиметрового и дециметрового диапазонов. Результаты расчета дали хорошее совпадение с экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Хижняк. ЖТФ, 28, 1958.
2. О. Е. Лысенко. Рассеяние электромагнитных волн на анизотропном эллипсоиде. Автореф. канд. дисс., Харьков, 1970.