МОМЕНТ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА СИСТЕМУ ДВУХ ЖЕСТКО СВЯЗАННЫХ ТЕЛ ПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ (РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТЕЛАМИ БОЛЬШЕ ДЛИНЫ ВОЛНЫ)

Н. А. Хижняк, Л. К. Гал, В. С. Жилков, А. В. Орлова, Г. П. Щербинин

Харьков

Предположим, что внутри прямоугольного волновода (стенки волновода определяются плоскостями $x=0$, $x=d$, $y=0$, $y=k$, ось z направлена по оси волновода) расположена система из двух жестко связанных диэлектрических эллипсоидов, характеризуемых диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью $\mu=1$. Расстояние между эллипсоидами соизмеримо с длиной волны, длина коромысла равна l. Пусть координаты центра первого эллипсоида — x_0, y_{01}, z_{01}, второго — x_0, y_{02}, z_{02}. Главные направления эллипсоидов ox, oy, oz составляют некоторый угол ψ с осями координат x, y, z, связанными с волноводом, ось oz' направлена вдоль коромысла, соединяющего два тела. В качестве эллипсоидов рассмотрим эллипсоиды вращения, уравнения поверхности которых

$$\frac{x^{(')2}+z^{(')2}}{a^2}+\frac{y^{(')2}}{b^2}=1. \tag{1}$$

Предположим, что частота падающей волны такова, что в волноводе может распространяться только основной тип колебаний TE, обусловливающий пондеромоторное действие на систему из двух эллипсоидов.

Определим момент сил, а также исследуем характер зависимости его от частоты размеров тела, расстояния между телами и т. д.

Интегральные уравнения задачи рассеяния

Известно [1], что выражение для момента сил, обусловленного пондеромоторным действием электромагнитного поля на диэлектрическое тело, находящееся в этом поле, имеет вид

$$M=\frac{1}{2}\int\limits_V\left[\vec{P}\vec{E}_0^*\right]dv+\frac{1}{2}\int\limits_V\left[\vec{r}\left(\vec{P}\nabla\right)\vec{E}_0^*\right]dv=\vec{M}'+\vec{M}'', \tag{2}$$

где P — вектор диэлектрической поляризации, который можно выразить через внутреннее поле диэлектрического тела;

$$\vec{P}=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\vec{E}_{\text{вн}}; \tag{3}$$

V — объем тела; E_0 — падающее невозмущенное поле (будем считать, что поля зависят от времени как $e^{i\omega t}$).

Определение момента сил сводится к построению внутренних полей первого и второго эллипсоида. Внутренние поля эллипсоидов определяем на основании интегральных уравнений микроскопической электродинамики, эквивалентных уравнениям Максвелла и уравнений, полученных в работе [2].

В общем случае, когда размеры рассеивающего тела сравнимы с длиной рассеиваемой волны, интегральные уравнения слишком сложны для непосредственного анализа. Однако практически размеры тела, помещенного в волновод, всегда меньше длины волны, поэтому представляет интерес случай, когда $\frac{a}{\lambda} < 1$, где a — наибольшие линейные размеры тела, λ — длина рассеиваемой волны. Внутренние поля и функцию Грина можно разложить в ряд по малому параметру [2]. Тогда в нулевом приближении внутреннее поле определяется электростатическими уравнениями, где под $\vec{E}_0(\vec{r})$ и $\vec{H}_0(\vec{r})$ следует понимать электрическое и магнитное поле падающей на эллипсоид волны:

$$\vec{E}_1(\vec{r}_1) = \vec{E}_{01}(\vec{r}_1) + \frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_{V_1}(\varepsilon - 1)\vec{E}_1(\vec{r}_1)\frac{d\vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_1'|};$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}_2) = \vec{E}_{02}(\vec{r}_2) + \frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_{V_2}(\varepsilon - 1)\vec{E}_2(\vec{r}_2')\frac{d\vec{r}_2'}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_2'|}. \tag{4}$$

В уравнениях (4) $\vec{E}_{01}(\vec{r}_1)$ — поле падающей на первый эллипсоид волны. Оно состоит из падающего невозмущенного поля и поля волны, рассеянной вторым эллипсоидом. Аналогично $\vec{E}_{02}(\vec{r}_2)$ представляет суперпозицию падающих невозмущенного поля и поля рассеяния первого эллипсоида.

Решая интегральные уравнения (4), будем иметь

$$E_{x_{\text{вн}}}(\vec{r}_1) = \frac{E_{0x}(\vec{r}_1) + E^{\text{II}}_{x_{\text{расс}}}(\vec{r}_1)}{A};$$

$$E_{y_{\text{вн}}}(\vec{r}_1) = \frac{E_{0y}(\vec{r}_1) + E^{\text{II}}_{\text{расс}}(\vec{r}_1)}{B}; \tag{5}$$

$$E_{z_{\text{вн}}}(\vec{r}_1) = \frac{E_{0z}(\vec{r}_1) + E^{\text{II}}_{z_{\text{расс}}}(\vec{r}_1)}{A};$$

$$E_{x_{\text{вн}}}(\vec{r}_2) = \frac{E_{0x}(\vec{r}_2) + E^{\text{I}}_{x_{\text{расс}}}(\vec{r}_2)}{A};$$

$$E_{y_{\text{вн}}}(\vec{r}_2) = \frac{E_{0y}(\vec{r}_2) + E^{\text{I}}_{y_{\text{расс}}}(\vec{r}_2)}{D}; \tag{6}$$

$$E_{z_{\text{вн}}}(\vec{r}_2) = \frac{E_{0z}(\vec{r}_2) + E^{\text{I}}_{z_{\text{расс}}}(\vec{r}_2)}{A},$$

где $E_{i_{\text{расс}}}^{\text{II}}\left(\vec{r}_1\right)$ — поле, рассеянное вторым эллипсоидом во внутренней точке первого эллипсоида;

$$A = 1 - (\varepsilon - 1)\, I_0^{200};\quad B = 1 - (\varepsilon - 1)\, I_0^{002};$$

I_0^{200}, I_0^{002} — ньютоновские потенциалы эллипсоида [3].

Таким образом, для определения внутренних полей необходимо знать значения рассеянных диэлектрическими эллипсоидами полей.

Так как расстояние между эллипсоидами больше длины волны $\left(\frac{l}{\lambda} > 1\right)$, поле рассеянного излучения на больших расстояниях от рассеивающего тела можно описать с помощью дипольных членов потенциалов Герца:

$$\vec{\Pi}_d = \vec{d} f\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right), \tag{7}$$

где $\vec{r}_0$ — координата центра рассеивающего тела; d — дипольный момент, индуцированный в теле падающей волной

$$\vec{d} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_V (\varepsilon - 1)\, \vec{E}_{\text{вн}}\left(\vec{r}'\right) d\vec{r}'. \tag{8}$$

Рассеянное поле через потенциалы Герца определяется следующим образом:

$$\vec{E}_{\text{расс}} = (\text{grad div} + k^2\varepsilon_1\mu_1)\, \vec{\Pi}_d. \tag{9}$$

Под $f\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right)$ следует понимать такую функцию, которая определяет поля, удовлетворяющие граничным условиям на поверхности волновода. Искомые функции Грина построены в работе [4]. Следует отметить, что отраженная волна имеет вид суперпозиции бесконечного числа волн лишь формально. В действительности поле на больших расстояниях от рассеивающего тела представляет собой конечную сумму волн, так как не затухнут лишь те из них, для которых

$$\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 < k^2\varepsilon_1\mu_1.$$

Поэтому, если в волноводе может распространяться лишь основная TE-волна, то и отраженная волна первым эллипсоидом во внутренних точках второго, и наоборот, будет состоять из одной основной TE-волны.

Поле, рассеянное диэлектрическим эллипсоидом

Компоненты функции Грина для H_{10}-волны ($m = 1$, $n = 0$)

$$f_y = -\frac{8\pi i}{ah\beta_{10}} \sin\frac{\pi}{d} x_0 \sin\frac{\pi}{d} x e^{i\beta_{10}z},$$

$$f_x = f_z = 0. \tag{10}$$

Определим поле, рассеянное диэлектрическим эллипсоидом:

$$E^{\mathrm{I}}_{x\,\text{расс}}\left(\vec{r}_2\right) = E^{\mathrm{II}}_{x\,\text{расс}}\left(\vec{r}_1\right) = 0;$$

$$E^{\mathrm{I}}_{z\,\text{расс}}\left(\vec{r}_2\right) = E^{\mathrm{II}}_{z\,\text{расс}}\left(\vec{r}_1\right) = 0, \tag{11}$$

так как для волны H_{10}

$$f_x = f_z = 0,\ \frac{\partial}{\partial y} = 0,\ k_y = 0;$$

$$E^{\mathrm{I}}_{y\,\text{расс}}\left(\vec{r}_2\right) = \xi E_{y\,\text{вн}}\left(\vec{r}_1\right);$$

$$E^{\mathrm{II}}_{y\,\text{расс}}\left(\vec{r}_1\right) = \xi_1 E_{y\,\text{вн}}\left(\vec{r}_2\right), \tag{12}$$

где

$$\xi = -\frac{2iv\,(\varepsilon - 1)\,k^2}{ah\beta_{10}} \sin^2 k_x x_0 e^{-i\beta_{10} z_{02}};$$

$$\xi_1 = -\frac{2iv\,(\varepsilon - 1)\,k^2}{ah\beta_{10}} \sin^2 k_x x_0 e^{i\beta_{10} z_{01}}; \tag{13}$$

$$k_x = \frac{\pi}{a},\ \beta_{10} = \sqrt{k^2 - \frac{\pi^2}{d^2}}.$$

Подставляя в (12) значения внутренних полей, найденные в предыдущем параграфе, получим систему уравнений для определения рассеянного поля. Решая эту систему, получим следующие искомые значения рассеянного поля:

$$E^{\mathrm{I}}_{y\,\text{расс}}\left(\vec{r}_2\right) = \alpha_1 E_{0y}\left(\vec{r}_1\right) + \beta_1 E_{0y}\left(\vec{r}_2\right);$$

$$E^{\mathrm{II}}_{y\,\text{расс}}\left(\vec{r}_1\right) = \alpha_2 E_{0y}\left(\vec{r}_1\right) + \beta_2 E_{0y}\left(\vec{r}_2\right); \tag{14}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\eta}{1 - \eta\eta_1};\ \alpha_2 = \beta_1 = \frac{\eta\eta_1}{1 - \eta\eta_1};\ \beta = \frac{\eta_1}{1 - \eta\eta_1};$$

$$\eta = \xi\left(\frac{\cos^2\psi}{B} + \frac{\sin^2\psi}{A}\right);\ \eta_1 = \xi_1\left(\frac{\cos^2\psi}{B} + \frac{\sin^2\psi}{A}\right).$$

Определив рассеянные диэлектрическими эллипсоидами поля, можем найти внутренние поля первого и второго эллипсоидов, приставленные в формулах (5)—(6). Если под $\vec{r}_1$ понимать вектор, равный $\vec{r}_1 = \vec{r}_{01} + \vec{r}_1{}'$, то $\vec{r}_{01}$ — расстояние от центра коромысла до центра первого эллипсоида, $\vec{r}_1{}'$ — от центра первого эллипсоида до любой его внутренней точки, в которой ищется поле. Так как эллипсоиды малы, поле на протяжении объема эллипсоида можно считать однородным, поэтому поле в точке $\vec{r}_1$ равно полю в точке $\vec{r}_{01}$.

Можем, таким образом, записать

$$E_{i\,\text{вн}}\left(\vec{r}_1\right) = \frac{E_{0i}\left(\vec{r}_{01}\right) + E^{\mathrm{II}}_{i\,\text{расс}}\left(\vec{r}_{01}\right)}{A}. \tag{15}$$

Однако в формуле (15) поле записано в системе координат, связанной с коромыслом. Используя формулы перехода от одной системы координат к другой, получаем значения полей в системе координат, связанной с волноводом:

$$E_{y_{\text{вн}}}\left(\vec{r}_{01}\right) = \frac{E_{0y}\left(\vec{r}_{01}\right) + E^{\text{II}}_{y_{\text{расс}}}(r_{01})}{B} \cos\psi;$$

$$E_{z_{\text{вн}}}\left(\vec{r}_{01}\right) = \frac{E_{0y}\left(\vec{r}_{01}\right) + E^{\text{II}}_{y_{\text{расс}}}\left(\vec{r}_{01}\right)}{A} \sin\psi.$$

$$E_{y_{\text{вн}}}\left(\vec{r}_{02}\right) = \frac{E_{0y}\left(\vec{r}_{02}\right) + E^{\text{I}}_{y_{\text{расс}}}\left(\vec{r}_{02}\right)}{B} \cos\psi. \tag{16}$$

$$E_{z_{\text{вн}}}\left(\vec{r}_{02}\right) = \frac{E_{0y}\left(\vec{r}_{02}\right) + E^{\text{I}}_{y_{\text{расс}}}\left(\vec{r}_{02}\right)}{A} \sin\psi.$$

Рассеянные поля определены выше, а составляющие падающего поля для H_{10}-волны в прямоугольном волноводе имеют вид

$$H_{0z}\left(\vec{r}_{01}\right) = H_0 \cos k_x x_0 e^{-i\beta_{10} z_{01}};$$

$$H_{0x}\left(\vec{r}_{01}\right) = \frac{i\beta_{10}}{k_x} H_0 \sin k_x x_0 e^{-i\beta_{10} z_{01}};$$

$$E_{0y}\left(\vec{r}_{01}\right) = \frac{ik}{k_x} H_0 \sin k_x x_0 e^{-i\beta_{10} z_{01}}. \tag{17}$$

Аналогично имеем для второго эллипсоида.

Под $\vec{r}_{01}$ понимаем расстояние от начала координат системы, связанной с волноводом до центра первого эллипсоида.

Построение момента сил

Определив таким образом значения внутренних полей диэлектрических эллипсоидов, можем построить векторы поляризации и записать выражения для момента сил, действующих на систему двух жестко связанных эллипсоидов.

После всех преобразований, выделив реальную часть моментов, будем иметь

$$H_x'' = -\frac{(\varepsilon - 1)^2 k^4 v^2 l}{8\pi d h k_x^2 A}\left(\frac{\sin^2\psi}{A} + \frac{\cos^2\psi}{B}\right) H_0 H_0^* \sin\psi \cos\psi \times$$

$$\times \sin^2 k_x x_0 \left[1 - \cos\left(\beta_{10} l \cos\psi\right)\right]. \tag{18}$$

(систему координат, связанную с волноводом, выбрали таким образом, что $z_{01} = 0$ $z_{02} = l\cos\psi$).

Выразим момент сил через величину мощности, проходящей по волноводу и переносимой волной H_{10}.

Известно, что

$$H_0 H_0^* = \frac{16\pi k_x^2}{cSk\beta_{10}} \Pi,$$

где Π — мощность, проходящая через поперечное сечение волновода; S — площадь поперечного сечения.

Составляющая момента сил

$$M''_x = -\frac{(\varepsilon-1)^2 k^3 v^2 l}{cS\beta_{10}A}\left(\frac{\sin^2 x}{A}+\frac{\cos^2 x}{B}\right)\Pi\sin 2\psi\,[1-\cos(\beta_{10}l\cos\psi)]. \quad (19)$$

Предполагаем, что коромысло закреплено в точке $x_0 = \frac{d}{2}$.

В выражении (19) для момента сил сохранены члены с точностью до величин порядка $\left(\frac{a^2}{dh}\right)^2$, так как размеры эллипсоидов малы по сравнению с размерами волновода, членами порядка $\left(\frac{a^2}{dh}\right)^k$, где $k > 2$ пренебрегли.

Аналогично определяется величина M'_x:

$$M'_x = \frac{(\varepsilon-1)kv}{cS\beta_{10}}\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\Pi\sin 2\psi. \quad (20)$$

Таким образом, полный момент сил, вызванный пондеромоторным действием электромагнитного поля на систему двух жестко связанных эллипсоидов, равен

$$M_x = \frac{(\varepsilon-1)kv}{cS\beta_{10}}\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{\pi}\right)\Pi\sin 2\psi - \frac{(\varepsilon-1)^2 k^3 v^2 l}{cS\beta_{10}\pi}\left(\frac{\sin^2\psi}{\pi}+\frac{\cos^2\psi}{B}\right)\Pi\sin 2\psi\,[1-\cos(\beta_{10}l\cos\psi)]. \quad (21)$$

Полагая в формуле (21) $\varepsilon \to \infty$, получим момент сил, действующих на систему двух жестко связанных металлических эллипсоидов.

Для металлических эллипсоидов

$$A = -\varepsilon I_0^{200};\quad B = -\varepsilon I_0^{002}.$$

Выражение для составляющей момента сил имеет вид

$$M_x = \frac{kv}{cS\beta_{10}}\left(\frac{1}{I_0^{200}}-\frac{1}{I_0^{002}}\right)\Pi\sin 2\psi - \frac{k^3 v^2 l}{cS\beta_{10}I_0^{200}}\left(\frac{\sin^2\psi}{I_0^{200}}+\frac{\cos^2\psi}{I_0^{002}}\right)\Pi\sin 2\psi\,[1-\cos(\beta_{10}l\cos\psi)]. \quad (22)$$

Момент сил для двух диэлектрических шаров и круглых металлических дисков

Если в качестве системы, для которой производится расчет пондеромоторного действия электромагнитной волны, взято два диэлектрических шарика, жестко связанных между собой, выражение для момента получим из формулы (21), положив полуось эллипсоида a, равной B. В этом случае величины A и B равны между собой:

$$A = B = \frac{\varepsilon+2}{3}.$$

Момент сил, действующих на систему двух шариков:

$$M_x = -\frac{9(\varepsilon-1)^2 k^3 v^2 l}{cS^2\beta_{10}(\varepsilon+2)^2}\,\Pi \sin 2\psi\,[1-\cos(\beta_{10} l \cos\psi)]. \tag{23}$$

Полагая одну из полуосей эллипсоида равной нулю и устремляя $\varepsilon \to \infty$, получим систему из двух жестко связанных металлических дисков.

Если устремить к нулю полуось $в$, будем иметь следующие значения ньютоновских потенциалов:

$$I_0^{200} = -\frac{в\pi}{4a};\ I_0^{002} = 1. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (22), получим выражение для момента сил, действующих на систему двух жестко связанных металлических дисков:

$$M_x = -\frac{16ka^3}{3cS\beta_{10}}\,\Pi\left\{1+\frac{32k^2a^3l}{3S}\sin^2\psi\sin^2\frac{\beta_{10}l\cos\psi}{2}\right\}\sin 2\psi. \tag{25}$$

Если металлические диски ориентированы произвольным образом и система координат, связанная с ними, не параллельна системе координат, связанной с центром коромысла, момент сил выражается следующим образом:

$$M_{x_1} = M_x \sin 2\Theta, \tag{26}$$

где Θ — угол между осью у волновода и осью y' эллипсоида. В этом случае ψ — угол между осью у коромысла и осью волновода.

Из формулы (26) следует, что максимальный момент сил, действующих на систему двух дисков, будет при ориентации диска под углом 45° к оси oy системы координат, связанной с волноводом.

Необходимо отметить, что полученные соотношения могут быть использованы при расчете характеристик двухпластинчатых пондеромоторных ваттметров СВЧ диапазона.

Как показали результаты сравнения значений M_x, вычисленных из формул (23), (25) и измеренных в соответствии с методикой Каллена [5], погрешность расчетных формул не превышает $\sim 6\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. ФН, М., (1959).
2. Н. А. Хижняк, ЖГФ, 28, 1958.
3. О. Е. Лысенко. Рассеяние электромагнитных волн на анизотропном эллипсоиде. Автореф. канд. дисс., Харьков, 1970.
4. Н. А. Хижняк. Сб. «Радиотехника», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.
5. A. L. Cullen. A general methog for the absolute measurement of microwaves power. Proc. IEE, 99, pt. IV, p. 122, 1952.