ЭЛЕКТРОНИКА СВЧ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИТЦА В ЗАДАЧАХ ОБ АМПЛИТУДНОМ СПЕКТРЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГАРМОНИК В ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

А. Г. Шеин, Г. Я. Красовский

Харьков

При конструировании замедляющих систем для приборов наряду с дисперсионными характеристиками и сопротивлением связи необходимы сведения об амплитудном спектре пространственных гармоник в наиболее длинноволновых полосах пропускания. Особенно важны эти сведения при создании приборов, работающих на высших пространственных гармониках. Проблеме вычисления амплитудного спектра посвящен ряд работ [1, 2]. В них существенно используется метод частичных областей.

Рис. 1. Одноступенчатая по пространству взаимодействия замедляющая система.

В данной статье предлагается методика приближенного вычисления амплитудного спектра, основанная на использовании в обратном преобразовании Фурье приближенного решения соответствующей краевой задачи, точно удовлетворяющего ее граничным условиям. Этому же вопросу посвящена работа [3].

Рассмотрим класс резонаторных замедляющих систем со сложной формой образующих поверхностей [3]. Согласно теореме Флоке, решения уравнения Гельмгольца для области v_1 пространства взаимодействия (рис. 1), представляются в виде

$$u(x, y, z) = u_0(x, y, z)\, e^{-j\beta_0 z}. \qquad (1)$$

Поскольку $u_0(x, y, z)$ периодична вдоль оси $0z$ с периодом L, ее можно разложить в ряд Фурье. Тогда (1) представляется как

$$u(x, y, z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s(x, y)\, e^{-j\left(\beta_0+\frac{2\pi s}{L}\right)z}, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2\ldots \qquad (2)$$

Функции поперечных координат $a_s(x, y)$, определяющие изменение поля в поперечной плоскости называются амплитудами пространственных гармоник [4]. Они характеризуют эффективность взаимодействия электронного потока, находящегося в плоскости (x_0, y), с электромагнитным полем при заданном значении потока энергии. Очевидно, что значения амплитуд пространственных гармоник $a_s(x_0, y)$ легко определяются из (2) обратным преобразованием Фурье. Для этого необходимо знать точное решение $u(x_0, y, z)$ краевой задачи, соответствующей рассматриваемому типу колебаний. Для областей сложной формы такое решение получить нельзя. Однако всегда есть возможность получить некоторое приближенное решение $u_n(x_0, y, z)$, например, решение вариационной задачи, эквивалентной рассматриваемой краевой, используя при этом системы координатных функций $\{\varphi_i\}$, точно удовлетворяющих всем граничным условиям краевой задачи [5]. Для замедляющих систем алгоритм построения таких функций описан в [3].

Приближенное решение $u_n(x_0, y, z)$, согласно методу Ритца, представляется в виде

$$u_n(x_0, y, z) = \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x_0, y, z). \tag{3}$$

Коэффициенты a_i являются произвольными численными коэффициентами и определяются из уравнения

$$B^{-1} A a = k^{-2} I a, \tag{4}$$

где A и B — матрицы Ритца с элементами

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \int_{V_0} \varphi_i \varphi_j^* dV; \\ b_{ij} &= \int_{V_0} \nabla\varphi_i \nabla\varphi_j dV; \end{aligned} \tag{5}$$

I — единичная матрица; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$;

V_0 — область ячейки замедляющей системы.

Пусть

$$a_s(x, y) = a_s f(x, y), \tag{6}$$

где a_s — некоторые константы, а $f(x, y)$ нормирована условием

$$f(x_0 y) = 1. \tag{7}$$

В этом случае, если функцию u в (2) заменить ее приближенным значением (3), вычисление амплитуд пространственных гармоник сведется к вычислению интегралов типа

$$a_s = \frac{1}{L}\int_0^L \sum_{i=1}^{N} a_i \varphi_i(x_0, y, z)\, e^{j\beta_s z} dz. \tag{8}$$

Здесь

$$\beta_s = \beta_0 + \frac{2\pi s}{L}.$$

Чаще, однако, оказываются необходимыми сведения об амплитудном спектре не решения краевой задачи, а его производных. Например, при исследовании LE-волн в резонаторных системах краевая задача формулируется относительно составляющей магнитного поля, а изучается взаимодействие пучка с составляющей электрического поля. Нетрудно получить интегралы типа (8) для расчета амплитудного спектра произвольной координатной составляющей электромагнитного поля в системе. Ее приближенное распределение вычисляется соответствующим дифференцированием (3).

На точность вычисления амплитудного спектра описанной методикой влияет два фактора: точность вычисления приближенного решения (3) и точность вычисления интегралов (8). При вычислении амплитуд пространственных гармоник с номером, близким к нулю, удобно вычислять интегралы (8), заменяя их интегральной суммой. В этом случае шаг интегрирования должен лежать в пределах $(0{,}01 - 0{,}02)\,L$.

Точность вычисления (3) зависит от количества учитываемых координатных функций $\{\varphi_i\}$, формы ячейки замедляющей системы и точности вычисления коэффициентов матриц Ритца. Если форма ячейки такова, что в ней нет неоднородностей с характеристическими размерами, значительно меньшими периода L, то собственные частоты и поля с точностью 1—3% можно рассчитать, используя 24—36 координатных функций, предложенных в [3]. Интегралы (5) при этом необходимо вычислять с шагом $(0{,}025 - 0{,}05)\,L$.

Для проверки описанной методики рассчитывался амплитудный спектр продольной E_z составляющей LE-волны в замедляющей системе типа гребенка в волноводе. Приближенное решение (3) находилось с использованием 24 координатных функций. Элементы матриц Ритца вычислялись методом прямоугольников с шагом $0{,}05L$. Интегралы (8) вычислялись с шагом $0{,}01L$.

На рис. 2 сплошными линиями представлены графики зависимости амплитуд нулевой и минус первой гармоники от фазового сдвига $\beta_0 L$ в первых двух полосах пропускания, вычисленные при условии

$$|u_n|^2\, dV = 1.$$

Амплитуды пространственных гармоник с номерами $+1$, ± 2... значительно меньше амплитуды нулевой и на графике не представлены. При условии $\beta_0 = k \left(\frac{c}{v_ф} = 1\right)$ амплитуда нулевой гармоники обращается в нуль. На рис. 3 приводится зависимость амплитуды минус первой гармоники, нормированной к амплитуде нулевой, от фазового сдвига $\beta_0 L$. Бесконечные разрывы соответствуют значению $\beta_0 L$, для которого амплитуда нулевой гармоники обращается в нуль. Проведенные расчеты показали, что предлагаемая методика правильно отражает известные закономерности поведения амплитуд пространственных гармоник в рассматриваемой замедляющей системе, описанные в [1, 2].

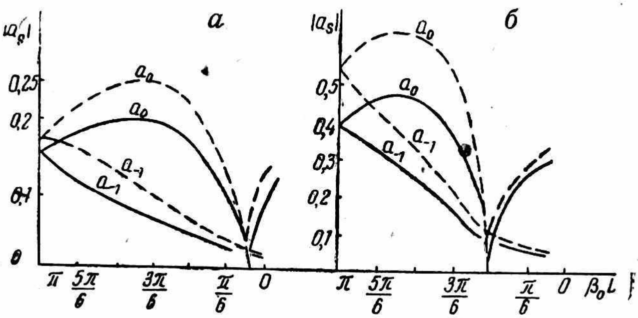

Рис. 2. Зависимость амплитуд пространственных гармоник от фазового сдвига $\beta_0 L$:

(сплошные линии для одноступенчатой гребенки: $h = 4L$; $l = 0{,}5L$; $w = 0{,}5L$; ширина $10L$; штриховые линии для двухступенчатой гребенки: $h = 4L$, $l = 0{,}5L$, $a = 0{,}2L$, $w = 0{,}5L$, ширина $10L$).

а — первая полоса; *б* — вторая полоса.

При помощи данной методики был рассчитан амплитудный спектр двухступенчатой по пространству взаимодействия гребенчатой замедляющей системы (рис. 4). Результаты расчета представлены на графиках (рис. 2, 3) штриховыми линиями. Как

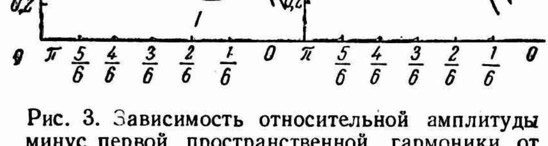

Рис. 3. Зависимость относительной амплитуды минус первой пространственной гармоники от фазового сдвига $\beta_0 L$ (в одноступенчатой — кривые *1*, двухступенчатой — кривые *2*)

а — первая полоса; *б* — вторая полоса.

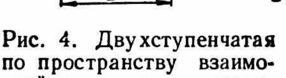

Рис. 4. Двухступенчатая по пространству взаимодействия замедляющая система.

видно из рисунков, введение двухступенчатости по пространству взаимодействия несколько увеличивает амплитуды гармоник, но общие закономерности зависимости сохраняются.

Таким образом, можно сделать вывод о возможности применения вариационного метода Ритца не только для расчета интегральных характеристик замедляющих систем (дисперсионные зависимости) но и для расчета структуры полей и амплитуд пространственных гармоник. Использование этой методики наиболее целесообразно в том случае, когда применение полевого метода невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Гвоздовер, В. М. Лопухин, ЖТФ, т. 20, № 8, 1950.

2. Л. М. Бузик, В. В. Гаплевский. «Электронная техника, серия 1. Электроника СВЧ», вып. 12, сер. 36, 1967.

3. Г. Я. Красовский, А. И. Стрельченко. «Электронная техника, сер. 1. Электроника СВЧ», 1972, № 12.

4. Р. А. Силин, В. П. Сазонов. Замедляющие системы. Изд-во «Советское радио», 1966.

5. В. Л. Рвачев. Материалы семинара по численным методам решения краевых задач электродинамики. М., Изд-во ин-та «Электроники», 1971.