

МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ СПЕКТРА ФИНИТНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

В. И. Чайковский

Киев

Преобразование Фурье формально является функциональным преобразованием, сводящимся к интегрированию некоторого сигнала с комплексным весом

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1)$$

Преобразование Фурье можно также рассматривать как процесс определения параметров, образующих исследуемый сигнал, и реально существующих ортогональных составляющих. Распределение амплитуд и фаз этих составляющих называют комплексным спектром сигнала.

Интерес к спектрам сигналов со стороны исследователей, работающих в самых различных отраслях науки и техники, объясняется прежде всего информационной полнотой отображения сигналов в спектральной области и определенной спецификой этого отображения, позволяющей в ряде случаев легко идентифицировать особенности сигналов, не проявляющиеся наглядно во временном представлении. Например, простота обнаружения периодичности в сложном сигнале или выделение гармонического сигнала на фоне шума при исследовании спектров. Определение спектра может представлять самостоятельный интерес при проектировании согласованных систем передачи информации, а также определения информационной емкости сигналов. Наконец, определение спектра может рассматриваться как некоторый подготовительный этап к сложной функциональной обработке сигнала.

Решение перечисленных выше и многих других задач требует экспериментального определения (измерения) спектра сигналов с помощью специализированных устройств, называемых анализаторами спектра*. Функционирование любого анализатора спектра, независимо от его типа и схемного исполнения, может быть сведено, по крайней мере в основной части, к процессу узкополосной фильтрации сигнала или процессу моделирования преобразования Фурье, т. е. к выполнению функциональных преобразований в соответствии с алгоритмом [1]. В первом случае анализ работы устройства выполняется на основе спектральных характеристик, что согласуется с представлением о преобразовании Фурье на фиксированной частоте, как об идеализированном процессе выделения отдельной составляющей спектра исследуемого сигнала. Во втором случае анализ сводится к оценке соответствия реально выполняемых функциональных преобразований сигнала алгоритму преобразования Фурье [1]. Естественно, что такой подход согласуется с представлением о преобразовании Фурье на фиксированной частоте, как о некотором функционале сигнала.

Рассмотрим на основании спектральных представлений работу анализатора спектра как устройства, обладающего частотной избирательностью и реализующего выделение спектральных составляющих сигнала в узкой полосе на частоте настройки ана-

* В зависимости от определяемых параметров спектра различают анализаторы спектра амплитуд, спектра фаз и анализаторы ортогональных составляющих или анализаторы комплексного спектра. При отсутствии специальных оговорок под анализатором будем понимать анализатор комплексного спектра.

лизирующего тракта. Функциональная схема устройства в таком представлении имеет вид, показанный на рис. 1, и состоит из избирательного элемента ИЭ и измерителя И, определяющего в зависимости от назначения анализатора амплитуду или фазу выделенной составляющей. Анализатор спектра выделяет вместо единственной множество составляющих спектра, попадающих в полосу прозрачности анализирующего тракта. Это определяет результат измерения как некоторую совокупность, в спектральном представлении описываемую выражением:

$$F_a(\omega_0) = F(\omega) K_0(\omega), \quad (2)$$

где $F(\omega)$ — аналитический спектр исследуемого сигнала;
 $K_0(\omega)$ — частотная характеристика анализирующего тракта, настроенного на произвольную частоту;



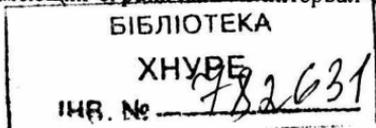
Рис. 1.

$F_a(\omega_0)$ — выходной сигнал анализатора в спектральном представлении.

Выражение (2) устанавливает связь выходных показаний анализатора спектра с истинным (аналитическим) спектром сигнала. Однако укоренившиеся традиции и отсутствие строго разработанной спектральной теории работы анализатора не позволяют достоверно оценить погрешность измерения и правильно сформулировать рекомендации по выбору параметров анализатора спектра. Анализ выражения (2), основанный на простейших качественных соображениях, не всегда приводит к правильным выводам. Например, принято считать, что результаты экспериментального анализа сплошного спектра могут совпадать со значениями аналитического спектра только при использовании для эксперимента идеального анализирующего тракта с бесконечно узкой полосой прозрачности. В такой постановке при конечной полосе анализирующего тракта величина погрешности измерения, очевидно, должна определяться степенью различия идеального и реального трактов. Далее, рекомендуемой формой частотной характеристики, обеспечивающей якобы наилучшее разделение гармоник, является прямоугольная форма. Естественным следствием приведенных соображений является тенденция повышения разрешающей способности проектируемых анализаторов спектра за счет сужения полосы и повышения прямоугольности частотной характеристики анализирующего тракта.

Необходимо отметить, что для анализаторов спектра весьма широкого класса финитных* сигналов в целях повышения

* К классу финитных принадлежит практическое большинство реальных детерминированных сигналов, имеющих ограниченный интервал существования.



точности анализа нецелесообразно ограничиваться простым увеличением разрешающей способности анализа. Тенденция минимизации погрешности анализа сплошного спектра в этом случае оказывается совершенно иной, требующей, вопреки изложенному выше, не бесконечного сужения полосы прозрачности анализирующего тракта, а только выбора определенной формы его частотной характеристики. Идеализированная форма частотной характеристики, вопреки существующему мнению, отличается от прямоугольной.

Для доказательства приведенных выше утверждений рассмотрим соотношение (2). Поскольку $F_a(\omega_0)$ есть спектр выходного сигнала анализатора, то сам сигнал $F_a(\omega_0; t)$ в произвольный момент времени t может быть найден с помощью обратного преобразования Фурье:

$$F_a(\omega_0; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) K_0(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

В соответствии с теоремой о спектре свертки [1]

$$F_a(\omega_0; t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g_0(t - \tau) d\tau, \quad (3)$$

где $f(\tau)$ — исследуемый сигнал, аналитический спектр которого $F(\omega)$;

$g_0(\tau)$ — обратное преобразование Фурье-частотной характеристики анализирующего тракта

$$g_0(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (4)$$

Известно, что для узкополосных трактов с симметричной частотной характеристикой, настроенных на частоту ω_0 :

$$g_0(\tau) = h(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

где $h(\tau)$ — медленно меняющаяся огибающая импульсной характеристики анализирующего тракта. Таким образом, выходной сигнал анализирующего тракта

$$F_a(\omega_0; t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) \cos \omega_0(t - \tau) d\tau, \quad (5)$$

а его огибающая, как это следует из (5), описывается выражением, совпадающим с записью модуля преобразования Фурье исследуемого сигнала с наложенным весом $h(t - \tau)$:

$$|F_a(\omega_0; t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) e^{-j\omega_0\tau} d\tau \right|. \quad (6)$$

Из выражения (6) следует, что результаты экспериментального анализа спектра искажаются из-за дополнительного взвешивания сигнала по закону функции $h(t - \tau)$, полностью определяемому частотной характеристикой анализирующего тракта. Если час-

тотную характеристику тракта $K_0(\omega)$ выбрать таким образом, чтобы огибающая импульсной характеристики $h(\tau)$ на интервале исследуемого сигнала (0: T) удовлетворяла условиям

$$\left. \begin{aligned} h(\tau) &= 1 \text{ при } 0 < \tau < T \\ h(\tau) &= 0 \text{ при } \tau \leq 0; \tau \geq T \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

то огибающая выходного сигнала анализатора $|F_a(\omega_0; T)|$ в момент T будет тождественно равна модулю преобразования Фурье исследуемого сигнала:

$$\begin{aligned} |F_a(\omega_0; T)| &= \left| \int_0^T f(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega_0 t} dt \right| = |F(\omega_0)|. \end{aligned} \quad (8)$$

Легко показать, что огибающая импульсной характеристики вида (7) имеет полосовой фильтр с частотной характеристикой

$$K_0(\omega) = T \frac{\sin \frac{T(\omega - \omega_0)}{2}}{T(\omega - \omega_0)} e^{-j\frac{\omega_0 T}{2}}. \quad (9)$$

Полученные выражения (8) и (9) доказывают несостоятельность рекомендаций по выбору параметров частотной характеристики анализирующего тракта для финитных сигналов, выработанных на основании поверхностного анализа выражения (2) и до недавних пор считавшихся классическими. Из выражения (8) следует, что для точного экспериментального определения спектра финитного сигнала нет необходимости использовать фильтр с бесконечно узкой полосой пропускания. Очевидно также, что по отношению минимума погрешности измерения спектра является не прямоугольная частотная характеристика, а характеристика вида $\sin x/x$.

В заключение критики классического подхода к анализу работы анализаторов спектра отметим еще один существенный недостаток. Метрологическими характеристиками анализатора спектра в классическом представлении являются разрешающая способность тракта и прямоугольность его частотной характеристики. Эти параметры работы анализатора спектра нельзя количественно увязать с погрешностью измерения спектра исследуемого сигнала, и, следовательно, результаты измерения нельзя использовать как оценку аналитического спектра сигнала. В такой ситуации определение экспериментального спектра, за исключением ряда тривиальных случаев, либо теряет смысл либо требует

* Это утверждение становится очевидным, если учесть, что огибающая импульсной характеристики узкополосного фильтра и частотная характеристика его низкочастотного эквивалента связаны парой преобразований Фурье [2].

разработки специальных методов его применения. Разработка таких методов в общем случае не представляется целесообразной ввиду трудностей оценки по таким косвенным характеристикам, как разрешающая способность и прямоугольность спектрального окна; погрешностей, возникающих при эквивалентном (замещающем аналитический) использовании экспериментального спектра.

Таким образом, отсутствие количественной оценки погрешностей определения экспериментального спектра, которую невозможно получить на основе классического спектрального подхода

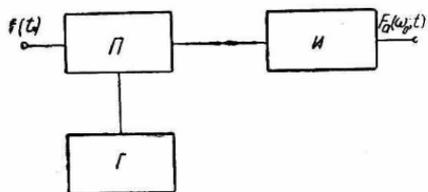


Рис. 2.

к исследованию работы анализатора, является одной из основных причин, существенно ограничивающих возможности практического применения экспериментального спектра.

Указанные недостатки классической трактовки работы анализатора и, в частности, трудности оценки погрешностей результатов

экспериментального анализа можно устранить, рассматривая преобразование Фурье как функционал сигнала, а анализатор спектра как моделирующее устройство, выполняющее функциональные преобразования сигнала в соответствии с алгоритмом преобразования Фурье. Функциональная схема анализатора спектра в таком представлении состоит из интегратора И, осуществляющего усреднение (интегрирование) выходного сигнала перемножителя П, ко входам которого подаются исследуемый сигнал $f(t)$ и сигнал $p(t)e^{-j\omega t}$ от генератора взвешивающей функции Г. К такой функциональной схеме (рис. 2) может быть сведен анализатор любого, в том числе и фильтрующего, типа. Различие типов анализаторов спектра проявляются в изменении характера весовой функции анализа $p(t)$.

С учетом всех приближений сигнал на выходе анализатора спектра, рассматриваемого как моделирующее устройство, в произвольный момент времени t , отсчитываемый от момента появления исследуемого сигнала, совмещаемого с началом координат, отождествляется с измеренным значением комплексного* спектра $F_a(\omega_0; t)$ и представляется в виде

$$F_a(\omega_0; t) = \int_0^t f(\tau) p(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau, \quad (10)$$

где $p(\tau)$ — огибающая весовой функции модели, учитывающая модуляцию опорных сигналов, приближенный характер интегрирования и, если это имеет место, предыскажение сигнала на входе

* Анализ комплексного спектра сводится к реализации двух каналов с ортогональными весовыми гармоническими функциями.

анализатора. Как отмечалось, огибающую весовой функции модели удобно называть весовой функцией спектрального анализа.

Если исследуемый сигнал финитен и его интервал существования определен как отрезок оси времени $(0; T)$, то экспериментальный спектр $F_a(\omega_0; t)$ при соответствующем выборе интервала анализа $[0; T]$ и весовой функции анализа $p(\tau)$ может стать тождественно равным аналитическому спектру $F(\omega)$. Действительно, если интервал анализа перекрывает интервал существования сигнала

$$[0, t] \in (0; T) \quad (11)$$

и весовая функция анализа постоянна на всем интервале анализа

$$p(\tau) = 1 \quad \text{при} \quad \tau \in (0; t), \quad (12)$$

то, как это следует из (10),

$$F_a(\omega_0; T) = \int_0^T f(\tau) e^{-i\omega_0 \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega_0 t} dt = F(\omega_0), \quad (13)$$

что свидетельствует о равенстве экспериментального и аналитического спектров.

Как отмечалось, условия (11) и (12) идеального (без погрешностей)* измерения спектра финитного сигнала сводятся к стабилизации весовой функции анализа на интервале существования сигнала и согласованию интервала анализа с интервалом существования сигнала. В отличие от условия бесконечного сужения полосы анализирующего тракта эти условия практически выполнимы при любом конечном интервале анализа. Стабилизация весовой функции может быть выполнена с заданной точностью путем соответствующего выбора постоянной времени интегрирующей цепи либо введением компенсирующих предсказаний исследуемого сигнала, согласованных с импульсной характеристикой интегратора. Согласование интервалов осуществляется путем соответствующей синхронизации момента отсчета показаний.

Если в силу технических причин стабилизацию весовой функции анализа осуществить не удастся, т. е. если выполняется приближенное определение спектра то по отклонению весовой функции анализа можно выполнить оценку достижимой точности измерения. Сопоставляя выражения (10) и (13), легко установить, что погрешность измерения спектра

$$\Delta F(\omega) = F(\omega) - F_a(\omega; T) = \int_0^T [1 - p(\tau)] f(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau. \quad (14)$$

В соответствии с теоремой о спектре произведения функций [1] погрешность можно выразить в терминах спектральной плотности:

$$\Delta F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) P(\omega - \nu) d\nu, \quad (15)$$

* В данном случае учитываются инструментальные погрешности прибора, неизбежно существующие и снижающие точность анализа.

где $P(\nu)$ определяется как преобразование Фурье-функции $[1 - p(\tau)]$. Естественно, что при известной весовой функции анализа $P(\nu)$ легко вычисляется по формуле

$$P(\nu) = \int_0^T [1 - p(\tau)] e^{-j\nu\tau} d\tau. \quad (16)$$

Исследование работы анализатора спектра на основе его представления в виде моделирующего устройства является весьма прогрессивным и позволяет в отличие от классического спектрального метода установить принципиальную возможность сколь угодно точного измерения комплексного спектра финитного сигнала с помощью практически реализуемых средств и определить параметры такого идеального анализа спектра. Знание этих параметров, определяемых условиями (11) и (12), даже при их нереализуемости позволяет грамотно определять предельную точность экспериментального анализа спектров и выбирать параметры анализаторов спектра с позицией минимизации погрешностей анализа. Кроме того, анализ работы моделей преобразования Фурье позволяет выполнить количественную оценку погрешностей экспериментального определения спектра, что устраняет необходимость характеризовать качество работы анализатора такими косвенными параметрами, как разрешающая способность и прямоугольность частотной характеристики.

Возможность оценки величины погрешности экспериментального определения спектра имеет большое значение, так как это позволяет пользоваться результатами экспериментального анализа так же свободно, как и результатами аналитических исследований. Оценка погрешностей (определение области разброса прибора) позволяет использовать экспериментальный спектр в тех же целях и теми же методами что и аналитический. Поэтому возможности применения экспериментального и аналитического спектров качественно полностью совпадают. Отличие определяется достижимой в результате использования того и другого спектра точностью конечных результатов. Естественно, что при этом исчезает необходимость в разработке специальных методов использования экспериментальных спектральных характеристик, что, как известно, необходимо в рамках классической трактовки результатов аппаратного спектрального анализа.

Различие, а в некоторых случаях и противоречивость, результатов и рекомендаций, получаемых при исследовании работы анализатора спектра классическим методом, рассматривающим анализатор как фильтр, и методом оценки параметров модели преобразования Фурье не должно служить основанием для противопоставления анализаторов спектра фильтрующего и моделирующего типов. Анализатор фильтрующего типа всегда можно рассматривать как моделирующее преобразование Фурье-устройство со скользкой весовой функцией, а анализатор моделирующего типа как фильтр с определенной частотной характерис-

тикой. Правильный выбор параметров анализаторов спектра того или другого типа всегда обеспечивать заданную точность измерения. Некоторые трудности, возникающие при выборе параметров анализатора спектра фильтрующего типа, определяются не особенностями схемы, а недостаточной разработкой спектральной теории его работы. Этим же, вероятно, следует объяснить ошибочность некоторых положений классической теории работы анализаторов спектра фильтрующего типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Харкевич. Спектры и анализ. ГИТТЛ, М., 1957.
2. К. Хелстром. Статистическая теория обнаружения сигналов. Изд-во иностр. лит-ры, 1963.