К РАСЧЕТУ ПОЛЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА В ПРИБОРАХ *М*-ТИПА

А. В. Сова, В. В. Старостенко, А. А. Шадрин, А. Г. Шеин

Харьков

Нелинейный анализ процессов в приборах СВЧ связан, как правило, с необходимостью вычисления полей пространственного заряда. Модели таких зарядов могут быть различными в зависимости от типа приборов и размерности взаимодействия. Так, в случае приборов O-типа — это диски, парциальные пучки и т. п., используемые при анализе одномерного и двумерного взаимодействий [1—5]. В приборах M-типа обычно выбираются стержни или объемные заряды — «электроны» [2, 5] для двумерного и трехмерного взаимодействий.

Поскольку решение системы нелинейных уравнений, используемых для анализа нелинейных явлений в приборах СВЧ, обычно связано с численными расчетами на ЭВЦМ, причем большая часть машинного времени идет на вычисление полей пространственного заряда, не интересуясь достоинствами и недостатками самих методов, сравним основные способы расчета полей пространственного заряда и проследим влияние различных факторов на точность вычисления полей.

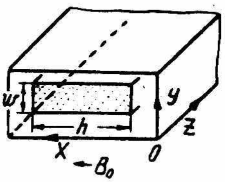

Рис. 1.

Наиболее часто применяемый метод вычисления полей пространственного заряда основан на решении уравнений Пуассона с помощью функций Грина [2—5]. Для прямоугольного ленточного пучка в волноводе, являющегося эквивалентом замедляющей системы (рис. 1), Дж. Роу [2, 5] получены следующие выражения для полей пространственного заряда:

$$E_x = \frac{2|\rho_0|wh\overline{u_0}}{\pi\varepsilon_0\omega}\left(\frac{\pi}{ab'}\right)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{1}{s}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{s}+\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{1}{\delta}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\delta}+\frac{1}{2}} F_{3-x}\left(\frac{u_{zi}}{u_z}\right)\mathrm{d}g_0\,\mathrm{d}\rho_0\,\mathrm{d}\Phi_0; \tag{1}$$

$$E_y = \frac{2|\rho_0|wh\overline{u_0}}{\pi\varepsilon_0\omega}\left(\frac{\pi}{ab'}\right)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{1}{s}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{s}+\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{1}{\delta}+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\delta}+\frac{1}{2}} F_{3-y}\left(\frac{u_{zi}}{u_z}\right)\mathrm{d}g_0\,\mathrm{d}\rho_0\,\mathrm{d}\Phi_0; \tag{2}$$

$$E_z = -\frac{2|\rho_0|wh\overline{u_0}}{\pi\varepsilon_0\omega}\left(\frac{\pi}{ab'}\right)\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{1}{s}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{s}+\frac{1}{2}}\int\limits_{\frac{1}{\delta}-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\delta}+\frac{1}{2}} F_{3-z}\left(\frac{u_{zi}}{u_z}\right)\operatorname{sign}(\Phi-\Phi')\,\mathrm{d}g_0\mathrm{d}\rho_0\mathrm{d}\Phi_0, \tag{3}$$

где

$$\operatorname{sign}(\Phi-\Phi') = \begin{cases} 1 \text{ при } \Phi > \Phi' \\ -1 \text{ при } \Phi < \Phi', \end{cases}$$

а F_{3-x}, F_{3-y}, F_{3-z} — весовые функции пучка, которые задаются выражениями

$$F_{3-x} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} k\left[m^2\left(\frac{a}{b'}\right)^2 + k^2\right]^{-1/2}\sin\pi m\frac{\beta y}{\beta b'}\sin\pi m\frac{\beta y'}{\beta b'}\times$$

$$\times \cos \pi k \frac{\beta x}{\beta a} \sin \frac{\beta x'}{\beta a} \exp \left\{ -\frac{\pi}{\beta a} \left[m^2 \left(\frac{a}{b'} \right)^2 + k^2 \right]^{1/2} | \Phi - \Phi' | \right\}; \quad (4)$$

$$F_{3-y} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} m \left[m^2 + \left(\frac{b'}{a} \right)^2 k^2 \right]^{-1/2} \cos \pi m \frac{\beta y}{\beta b'} \sin \pi m \frac{\beta y'}{\beta b'} \times$$

$$\times \sin \pi k \frac{\beta x}{\beta a} \sin \pi k \frac{\beta x'}{\beta a} \exp \left\{ -\frac{\pi}{\beta a} \left[m^2 \left(\frac{a}{b'} \right)^2 + k^2 \right]^{1/2} | \Phi' - \Phi | \right\}; \quad (5)$$

$$F_{3-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \pi m \frac{\beta y}{\beta b'} \sin \pi m \frac{\beta y'}{\beta b'} \sin \pi k \frac{\beta x}{\beta a} \sin \pi k \frac{\beta x'}{\beta a} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{\pi}{\beta a} \left[m^2 \left(\frac{a}{b'} \right)^2 + k^2 \right]^{1/2} | \Phi - \Phi' | \right\}. \quad (6)$$

В (1)—(6) введены такие обозначения:

$\overline{u}_0$ — средняя скорость пучка по оси z;
u_{zi} — начальная нормированная скорость группы зарядов по z;
u_z — нормированная скорость группы зарядов по оси z;
$\overline{y}_0$, $\overline{x}_0$ — среднее положение пучка по осям y и x;
w, h — размеры пучка по y и x;
$p_0 = y_0/w$; $g_0 = x_0/h$ — безразмерные начальные координаты пучка;
$s = w/\overline{y}_0$; $r = \overline{y}_0/b'$; $\bar{a} = \overline{x}_0/a$; $\delta = h/\overline{x}_0$ — безразмерные геометрические параметры пучка;
β — постоянная распространения;
Φ и Φ', x и x', y и y' — фазы и координаты интересующей нас точки и текущих точек.

Из приведенных соотношений следует, что значение полей пространственного заряда в значительной мере определяется количеством членов ряда в весовых функциях (4)—(6). Представить выражения (4)—(6) в аналитическом виде в общем случае невозможно точно так же, как ускорить сходимость медленно сходящихся рядов с помощью известных методов [6].

Поскольку выражения (1)—(3) рассчитываются по известным формулам приближенного вычисления интегралов [2], естественно, что сетка пространства переменных g, p и Φ также существенно влияет на точность вычисления полей пространственного заряда. Сейчас остановимся только на исследовании влияния количества членов ряда и $|\Phi - \Phi'|$ на значения весовых функций F_{3-x}, F_{3-y}, F_{3-z}.

На рис. 2 представлены графики зависимости F_{3-z} от количества членов ряда $m = k$ для «электронов», бесконечно малых по координатам p, g с конечными размерами ($d\Phi_0 \leqslant \pi/16$) вдоль Φ_0, причем $x = x' = \overline{x}_0 = 4$; $y = y' = \overline{y}_0 = 1$; $a = 8$; $b' = 2$; $|\Phi - \Phi'| = \pi/16$.

Из графиков следует, что только при $m = k \geqslant 80$ можно получить значения весовых функций с погрешностью в десятые и сотые доли процента. Расчеты F_{3-x} и F_{3-y} для этих же «электронов» должны дать значения функций, равные нулю. Поскольку расчет синусов и косинусов в (4)—(6) производился с точностью 10^{-7}, то и функции F_{3-x}, и F_{3-y} имели значения, отличные от нулевых (порядок F_{3-x} и F_{3-y} был 10^{-9}).

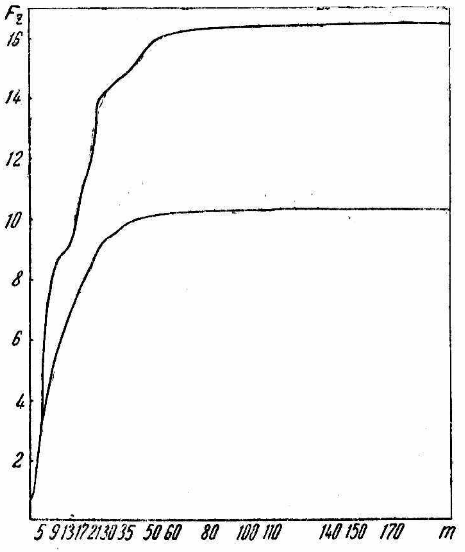

Рис. 2.

На том же рисунке представлены графики весовых функций, которые рассчитывались по приближенным формулам:

$$F^{(2)}_{3-x,\,3-y,\,3-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/ma \\ 1/kb' \end{pmatrix} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \pi m \frac{\beta y}{\beta b'} \sin \pi m \frac{\beta y'}{\beta b'} \times$$

$$\times \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \pi k \frac{\beta x}{\beta a} \sin \pi k \frac{\beta x'}{\beta a} \exp\left\{ -\frac{\pi}{ab'\beta} (ma + kb') \,|\, \Phi - \Phi' \,|\right\}; \qquad (7)$$

$$F^{(3)}_{3-x,\,3-y,\,3-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{ma + kb'} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \pi m \frac{\beta y}{\beta b'} \sin \pi m \frac{\beta y'}{\beta b'} \times$$

$$\times \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \pi k \frac{\beta x}{\beta a} \sin \pi k \frac{\beta x'}{\beta a} \exp\left\{ -\frac{\pi}{ab'\beta} (ma + kb') \,|\, \Phi - \Phi' \,|\right\}; \qquad (8)$$

$$F^{(4)}_{3-x,\,3-y,\,3-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[m^2 \left(\frac{a}{b'} \right)^2 + k^2 \right]^{-1/2} \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \pi m \frac{\beta y}{\beta b'} \sin \pi m \frac{\beta y'}{\beta b'} \times$$

$$\times \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \pi k \frac{\beta x}{\beta a} \sin \pi k \frac{\beta x'}{\beta a} \exp\left\{ -\frac{\pi}{ab'\beta} (ma + kb') \,|\, \Phi - \Phi' \,|\right\}. \qquad (9)$$

Приближения, подобные сделанным в (7)—(9), использовались в расчетах полей пространственного заряда Ганди и Роу [2, 5] при анализе двумерной ЛБВМ. Данные приближения дают возможность представить в ряде случаев весовые функции в виде аналитических выражений, однако их значения отличаются от рассчитанных по соотношениям (4)—(6) для трехмерного пучка почти в два раза.

Порядок значений функций F_{3-x}, F_{3-y} в плоскости $\Phi_0 = \text{const}$ такой же, как и у функции F_{3-z}. И в этом случае $k = m \geqslant 80$

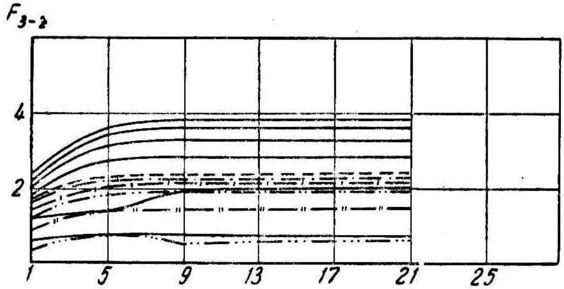

Рис. 3.

дает погрешность в вычислении весовых функций не более десятых долей процента. Следует отметить, что не обязательно $k = m$ обеспечивает заданную точность. Соотношеное k/m зависит от геометрии пространства взаимодействия b'/a. Расчеты показывают, что для наиболее употребимых соотношений $b'/a = 1 \div 0,1$ количества членов $k = m \geqslant 80$ для «электронов» с протяженностью по Φ_0, равной $\pi/16$, вполне достаточно.

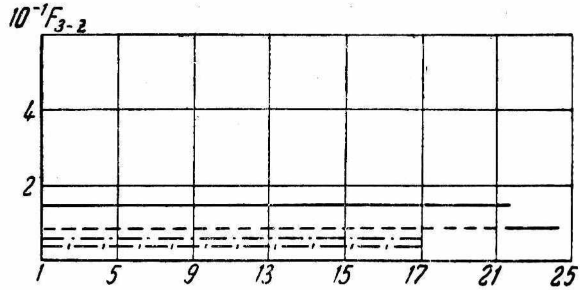

Рис. 4.

На рис. 3, 4 приведены графики зависимости F_{3-z} при $|\Phi - \Phi'| = 2\pi/16$ и $|\Phi - \Phi'| = 8\pi/16$. Из рисунков следует, что величина F_{3z} быстро спадает с ростом расстояния по оси z (z однозначно связано с $|\Phi - \Phi'|$) между двумя «электронами». Для $|\Phi - \Phi'| = 2\pi/16$ достаточно брать $k = m = 20$, чтобы получить ту же точность, что и в случае $|\Phi - \Phi'| = \pi/16$, а для $|\Phi - \Phi'| = \pi/2$ достаточно ограничиться $k = m = 1$. Вклад «электронов», удаленных от рассматриваемого более чем на $\pi/2$, в поле пространственного заряда весьма незначителен, и его можно не учитывать.

Исследование влияния различных факторов (количества частиц, их местоположения и т. д.) на точность вычисления полей пространственного заряда и сравнение с другими методами расчета представляет самостоятельную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nordsieck A. T. Theory of the large-signal behavoir of traveling-wave amplifiers. Proc. IRE, **41**. № 5, 1953.
2. Дж. Роу. Теория нелинейных колебаний в приборах сверхвысоких частот. Изд-во «Советское радио», 1969.
3. М. Б. Цейтлин, А. М. Кац. Лампа с бегущей волной. Изд-во «Советское радио», 1964.
4. Г. Ф. Филимонов, Ю. Н. Бадлевский. Нелинейное взаимодействие электронных потоков и радиоволн в ЛБВ. Изд-во «Советское радио», 1970.
5. О. Ганди, Дж. Роу. Сб. «Электронные сверхвысокочастотные приборы со скрещенными полями». Изд-во иностр. лит-ры, т. 1, 1961.
6. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. ОНТИ, 1936.