РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФЕЙНСТЕЙНА, КАЙНО В ТЕОРИИ ЛБВМ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ТЕЙЛОРА

Г. А. Алексеев, Л. А. Поспелов

Харьков

Решение нелинейной самосогласованной задачи Фейнстейна и Кайно [1] в теории лучевых приборов магнетронного типа обычно сводится к громоздкому численному расчету с помощью ЭВМ дифференциальных уравнений второго порядка со сложной нелинейной правой частью [2]. Трудности, связанные с численным счетом, осложняют дальнейшее исследование многообразных схем, использующих элементы M-типа, в частности, секционированных и гибридных приборов [3, 4], и вызывают необходимость построения аналитических решений задачи. Различные методы построения таких решений были предложены в работах [5, 6], однако решение, полученное в [5], является по существу квазилинейным, а асимптотическое решение [6] применимо в ограниченной области значений параметров.

В настоящей статье применительно к усилителю типа ЛБВМ предлагается методика построения приближенного решения на основе разложений в ряд Тейлора по параметру группирования электронного потока. Исследование проведено для наиболее простого уравнения, соответствующего случаю отсутствия потерь в замедляющей системе при условии пренебрежения изменением кинетической энергии электронов и влиянием отрицательного электрода. Исходные соотношения в соответствии с [1, 2] имеют вид

$$\frac{d^2F}{dq^2} = G(F); \qquad F(0) = 0; \qquad \left.\frac{dF}{dq}\right|_{q=0} = F_0' = \frac{E(0)}{DE_0}; \tag{1}$$

$$G(F) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\varphi_1(F)}^{\pi} g(\varphi,\ F)\,d\varphi; \quad g(\varphi,\ F) = \sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,(\varphi - F\sin\varphi), \tag{2}$$

где $F = \frac{1}{DE_0}\int\limits_0^q E(z)\,dz$ — параметр группирования электронного потока;

$q = hD\beta z$ — безразмерное расстояние вдоль пространства взаимодействия; $h = \exp\beta(x_0 - d)$;

D — параметр усиления;

E_0 — напряженность постоянного электрического поля;

$E(q)$, β — амплитуда напряженности ВЧ поля на уровне замедляющей системы и фазовая постоянная усиливаемой волны;

$d - x_0$ — расстояние между тонким электронным потоком и замедляющей системой на входе $q = 0$.

Предел интегрирования в (2) определяется либо из решения трансцендентного уравнения

$$h \sin \varphi_1 = \sin (\varphi_1 - F \sin \varphi_1); \quad F > F^* = 1 - h \tag{3}$$

(правая ветвь кривой $G(F)$), либо $\varphi_1 \equiv 0$; $0 \leqslant F \leqslant F^*$ (левая ветвь кривой $G(F)$).

Точка излома F^* соответствует моменту оседания на анод первого электрона. Решение уравнения (1) может быть сведено к квадратурам и имеет вид

$$\frac{dF}{dq} = f(F) = \left[(F_0')^2 + 2 \int_0^F G(F)\, dF \right]^{1/2}; \tag{4}$$

$$q(F) = \int_0^F \left[(F_0')^2 + 2 \int_0^F G(F)\, dF \right]^{-1/2} dF. \tag{5}$$

Воспользовавшись аналитичностью функции $G(F)$ во всей области, кроме особой точки F^*, в которой, как легко показать, производные функций $G(F)$ и $\varphi_1(F)$ не существуют, и аналитичностью функций $f(F)$ и $q(F)$, можно построить решение задачи, основываясь на разложении указанных функций в ряд Тейлора по параметру группирования F вблизи произвольных точек $F_1 < F^*$; $F_2 > F^*$ на левой $G_1(F)$ и правой $G_2(F)$ ветвях кривой $G(F)$.

Предполагая известными коэффициенты $g_{1,2}^{(n)}$ разложения

$$g(\varphi, F) = \sum_{n=0}^{\infty} g_{1,2}^{(n)} (F - F_{1,2})^n$$

и производные функции $\varphi_1(F)$, заданной уравнением (3), получаем

$$G_{1,2}(F) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1,2}^{(n)} (F - F_{1,2})^n; \quad |F - F_{1,2}| < 1, \tag{6}$$

где

$$c_{1,2}^{(n)} = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n} \beta_{1,2}^{(m,\, n-m)};$$

$$\beta_{1,2}^{(0,\, n)} = \int_{\varphi_1(F_{1,2})}^{\pi} g_{1,2}^{(n)}{}_{(F_{1,2})} d\varphi;$$

$$\beta_{1,2}^{(m,\, n)} = - \frac{1}{m!} \frac{d^{m-1}}{dF^{m-1}} \left[g_{1,2}^{(n)} (\varphi_1) \frac{d\varphi_1}{dF} \right] \bigg|_{F=F_{1,2}}; \quad m \geqslant 1 \tag{7}$$

и соответственно

$$f_{1,2}(F) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{1,2}^{(n)} (F - F_{1,2})^n; \quad q_{1,2}(F) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{1,2}^{(n)} (F - F_{1,2})^n, \tag{8}$$

где коэффициенты $f_{1,2}^{(n)}$, $q_{1,2}^{(n)}$ выражаются через коэффициенты $c_{1,2}^{(n)}$ следующими соотношениями:

$$f_{1,2}^{(0)} = f(F = F_{1,2}) = \left[(F_0')^2 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} c_{1,2}^{(n)} (-F_{1,2})^n \right]^{1/2};$$

$$f_{1,2}^{(1)} = \frac{c_{1,2}^{(0)}}{f_{1,2}^{(0)}}; \tag{9}$$

$$f_{1,2}^{(n)} = \frac{1}{nf_{1,2}^{(0)}}\left[c_{1,2}^{(n-1)} - \frac{1}{f_{1,2}^{(0)}}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{3m-n}{n-m}f_{1,2}^{(m)}c_{1,2}^{(n-m-1)}\right], \quad n \geqslant 2$$

$$q_{1,2}^{(0)} = q\,(F = F_{1,2}) = -\frac{1}{f_{1,2}^{(0)}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\zeta_{m-1}}{m}(-F_{1,2})^m; \tag{10}$$

$$q_{1,2}^{(n)} = \frac{1}{f_{1,2}^{(0)}}\frac{\zeta_{n-1}}{n};\ n \geqslant 1;\ \zeta_0 = 1;\ \zeta_m = -\frac{1}{f_{1,2}^{(0)}}\sum_{k=1}^{m}\zeta_{m-k}f_{1,2}^{(k)};\ m \geqslant 1.$$

Точки F_1, F_2 целесообразно выбирать в центре областей задания левой и правой ветвей функции, т. е. $F_1 \sim 0{,}5$, $F_2 \sim 2$. В этом случае областью применимости разложений (6), (8) будет $0 \leqslant F < 3$, однако для определения коэффициентов $c_{1,2}^{(0)} = G\,(F_{1,2})$, $f_{1,2}^{(0)} = f\,(F_{1,2})$, $q_{1,2}^{(0)} = q\,(F_{1,2})$ необходимо проведение численного счета на ЭВМ и суммирование большого количества членов ряда либо использование результатов работ [5, 6].

Не прибегая к дополнительным расчетам, решение с любой степенью точности можно построить в области $0 \leqslant F < 2$, выбрав для левой ветви $F_1 = 0$ (тогда $c_1^{(0)} = 0$, $f_1^{(0)} = F_0'$; $q_1^{(0)} = 0$), а разложение в ряд правой ветви провести вблизи точки F^*, для которой значения $G\,(F^*)$, $f\,(F^*)$, $q\,(F^*)$ можно вычислить приближенно по формулам (6)—(10) при $F_1 = 0$. Ряды Тейлора по параметру F вблизи точки F^*, как было указано ранее, не существуют, однако поскольку функция $\varphi_1(F)$ имеет, как легко убедиться, в данной точке устранимую особенность типа $\sqrt{F - F^*}$, можно построить разложения функций $\varphi_1(F)$, $G\,(F)$, $f\,(F)$, $q\,(F)$ вблизи точки F^* в ряд Тейлора по параметру $(F - F^*)^{1/2}$. Коэффициенты $s^{(n)}$ ряда

$$G_2(F) = \sum_{n=0}^{\infty} s^{(n)}(F - F^*)^{n/2} \tag{11}$$

выражаются тогда соотношениями

$$s^{(n)} = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m} C^k_{\frac{1}{2}(n-m+2k)} \times \alpha_{m,\,\frac{1}{2}(n-m+2k)};$$

где $m = n;\ n-2;\ n-4;\ \ldots;\ C_m^n$ — число сочетаний;

$$\alpha_{0n} = \int_0^{\pi} g_2^{(n)}(\varphi)\,d\varphi;$$

$$\alpha_{mn} = -\frac{1}{m!}\frac{d^{m-1}}{d\,(\sqrt{F - F^*})^{m-1}}\left[g_2^{(n)}(\varphi_1)\frac{d\varphi_1}{d\,(\sqrt{F - F^*})}\right]\Bigg|_{F=F^*},\quad m \geqslant 1. \tag{12}$$

Соответственно для коэффициентов $f^{(n)}$, $q^{(n)}$ разложений

$$f_2(F) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)} (F - F^*)^{\frac{n}{2}}; \quad q_2(F) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n)} (F - F^*)^{\frac{n}{2}};$$

$$0 < F - F^* < 1 \tag{13}$$

справедливы соотношения

$$f^{(0)} = f(F^*); \quad f^{(1)} = 0; \quad f^{(2)} = \frac{s^{(0)}}{f^{(0)}};$$

$$f^{(n)} = \frac{2}{nf^{(0)}} \left[s^{(n-2)} - \frac{1}{f^{(0)}} \sum_{m=1}^{n-2} \frac{3m-n}{n-m} f^{(m)} s^{(n-m-2)} \right], \; n \geqslant 3, \tag{14}$$

$$q^{(0)} = q^*; \quad q^{(1)} = 0; \quad q^{(2)} = \frac{1}{f^{(0)}};$$

$$q^{(n)} = - \frac{1}{nf^{(0)}} \sum_{k=1}^{n-2} (n-k) q^{(n-k)} f^{(k)}, \quad n \geqslant 3. \tag{15}$$

Используя предложенную методику, можно с высокой точностью аналитически рассчитать распределение амплитуды сигнала в пространстве взаимодействия в широкой области изменений параметра группирования в нелинейном режиме с учетом такого существенно нелинейного эффекта, как оседание электронов потока на замедляющую систему. Обобщение результатов для приборов типа ЛОВМ, учет малых потерь энергии в замедляющей системе и малого изменения кинетической энергии электронов не представляет трудностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Feinstein, G. Kino. Proc. IRE. 45, № 10 (1957).
2. Г. Г. Моносов, «Радиотехника и электроника», 7, № 7, (1962).
3. J. M. Osepchuk. Frequency, 5, № 3, (1967).
4. Л. А. Поспелов, А. Я. Усиков. УФЖ, 15, № 5, (1970).
5. Д. И. Трубецков, Ю. П. Шараевский. «Радиотехника и электроника», 15, № 11, (1970).
6. Л. А. Поспелов. «Электронная техника», серия 1. Электроника СВЧ, № 1, (1972).