

# ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ЛБВМ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНОВ

*Г. А. Алексеев, Л. А. Поспелов*

Х а р ь к о в

Нелинейная теория приборов *M*-типа даже в простейшей постановке задачи [1, 2] связана с проведением громоздкого численного счета. Это осложняет анализ явлений в приборах данного типа и вызывает необходимость построения приближенных решений.

В работах [3, 4] были предложены методы построения аналитических решений дифференциальных уравнений Фейнштейна, Кайно [1] применительно к нелинейной самосогласованной теории ЛБВМ и ЛОВМ. Однако решение, полученное в [3], является по существу квазилинейным, а асимптотическое решение [4] проведено для наиболее простого исходного уравнения. Настоящая работа является продолжением и развитием работы [4] в целях учета влияния на распределение амплитуды усиливаемого сигнала слабого изменения кинетической энергии электронов, которое может происходить при взаимодействии электронного потока с ВЧ полем в приборах типа ЛБВМ. Результаты данной работы будут получены, как и в [1, 3, 4], при условии пренебрежения влиянием отрицательного электрода на распределение ВЧ поля в пространстве взаимодействия. Исходное дифференциальное уравнение с учетом изменения кинетической энергии было получено в работе [2] и имеет вид

$$\frac{d^2F}{dq^2} + 2D^2 \frac{\beta U_c}{E_0} H(F) \left( \frac{dF}{dq} \right)^2 = G(F), \quad (1)$$

где  $F(q) = \frac{1}{DE_0} \int_0^q E(z) dz$  — параметр группирования электронного потока;  $q = hD\beta z$  — безразмерное расстояние вдоль пространства взаимодействия;  $D$  — параметр усиления;  $E(z)$ ,  $\beta$  — амплитуда напряженности поля на уровне замедляющей системы и фазовая постоянная усиливаемого сигнала;  $U_0$  — потенциал синхронизма [2];  $h = \exp \beta(x_0 - d)$ . Остальные обозначения приведены на рис. 1.



Рис. 1.

Воспользовавшись результатами работ [1, 2] для функций  $G(F)$  и  $H(F)$ , определяющих вклад в интеграл взаимодействия в результате изменения соответственно потенциальной и кинетической энергии электронов, можно записать соотношения

$$G(F) = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1(F)}^{\pi} \sin \varphi \operatorname{ctg}(\varphi - F \sin \varphi) d\varphi; \quad (2)$$

$$H(F) = \frac{h^2}{\pi} \int_{\varphi_1(F)}^{\pi} \frac{\sin^3 \varphi \cos(\varphi - F \sin \varphi)}{\sin^3(\varphi - F \sin \varphi)} d\varphi, \quad (3)$$

причем нижний предел интегрирования в (2), (3) определяется из решения трансцендентного уравнения

$$h \sin \varphi_1 = \sin(\varphi_1 - F \sin \varphi_1); \quad F > F^* = 1 - h \quad (4)$$

либо  $\varphi_1 \equiv 0$ ;  $0 \leq F \leq F^*$ .

Точка излома  $F^*$  на кривых  $G(F)$ ,  $H(F)$  соответствует моменту оседания на анод первого электрона. Оседание электронов на отрицательный электрод в (2), (3) не учитывается, так как при пренебрежении влиянием холодного электрода (случай  $\beta x_0 \gg 1$ ) этот учет не корректен. Следуя методике [4] построения приближенных аналитических выражений  $G(F)$ ,  $H(F)$ , разобьем область задания этих функций на четыре участка: 1)  $0 \leq F \leq F^0$ , 2)  $F^0 \ll F \leq F^*$ ; 3)  $F^* \leq F \leq 1$ ; 4)  $F \gg 1$ .

На первом (квазилинейном) участке, проводя разложение функций (2), (3) в ряд Тейлора по параметру группирования и ограничиваясь первыми двумя членами, легко получить

$$G(F) = F + \frac{2}{3} F^3; \quad 0 \leq F \leq F^0. \quad (5)$$

$$H(F) = h^2 \left( 2F + \frac{11}{2} F^3 \right);$$

В работах [4, 5] показано, что такая точность дает удовлетворительное описание функций вплоть до  $F^0 \sim 0,7$ .

На втором участке, предполагая  $h \ll 1$  и в соответствии с асимптотической оценкой [4] проводя разложение подынтегральных выражений в (2), (3) вблизи особой точки знаменателя  $\varphi^* = 0$ , после интегрирования получим

$$G(F) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1 - F \diamond \frac{1}{6} \varphi^3} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1-F}}; \quad F^0 \leq F \leq F^*, \quad (6)$$

$$H(F) = \frac{h^2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\left(1 - F \diamond \frac{1}{6} \varphi^2\right)^3} = \frac{\alpha_2}{(1-F)^{\frac{5}{2}}};$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  — константы, являющиеся результатом усреднения медленных сомножителей:

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{6}}{\pi (F^* - F^0)} \int_{F^0}^{F^*} \arctg \frac{\pi}{\sqrt{6(1-F)}} dF; \quad (7)$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{4} h^2 \left\{ \frac{1}{2} \alpha_1 + \frac{3}{F^* - F^0} \int_{F^0}^{F^*} \frac{(10 \diamond \pi^2 - 10F)(1-F)^{\frac{1}{2}}}{(6 \diamond \pi^2 - 6F)^2} dF \right\}.$$

На третьем участке в соответствии с методикой [5] разложения функций (2), (3) вблизи точки излома в ряд Тейлора по параметру  $\sqrt{F - F^*}$  можно искать решение в виде

$$G(F) = G^* (1 - \alpha_3 \sqrt{F - F^*}); \quad F^* \leq F \leq 1. \quad (8)$$

$$H(F) = H^* (1 - \alpha_4 \sqrt{F - F^*});$$

Здесь  $G^* = \alpha_1 \cdot h^{-\frac{1}{2}}$ ;  $H^* = \alpha_2 h^{-\frac{5}{2}}$ ; коэффициенты  $\alpha_3, \alpha_4$  будут определены из условия сшивания функций в точке  $F = 1$ .

На четвертом участке после разложений вблизи точки  $\varphi_1$ , определяемой уравнением

$$\varphi_1 - (F + h) \sin \varphi_1 = 0,$$

получим по аналогии со вторым участком, полагая  $h \ll 1$ , асимптотические соотношения:

$$G(F) = \frac{1}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{d\varphi}{g(\varphi, F)} = \frac{\alpha_5}{F^{\frac{3}{2}}}; \quad (9)$$

$$H(F) = \frac{h^2}{\pi} \int_{\varphi_1}^{\pi} \frac{d\varphi}{g^3(\varphi, F)} = \frac{\alpha_6}{F^{\frac{5}{2}}};$$

$$g(\varphi, F) = h + A(F+h)^2(\varphi - \varphi_1) + B(F+h)^2(\varphi - \varphi_1)^2;$$

$$A(F) = \frac{1}{F+h - \cos \varphi_1}; \quad B(F) = \frac{(F+h)(1 + \cos^2 \varphi_1) - 2 \cos \varphi_1}{2\varphi_1^2}.$$

Как и на втором участке, в выражениях (9) выделены множители  $\alpha_5, \alpha_6$ , соответствующие медленным функциям от  $F$  по сравнению с  $F^2$  и являющиеся результатом их усреднения:

$$\alpha_5 = \frac{2}{\pi(F_{\max} - 1)} \int_1^{F_{\max}} \frac{1}{V|\Delta|} \left\{ \arctg \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{A + 2B(\pi - \varphi_1)}{V|\Delta|} \right] - \operatorname{Arth} \left[ \frac{A}{V|\Delta|} \right] \right\} dF. \quad (10)$$

В (10)  $\Delta = A^2 - \frac{4Bh}{(F+h)^2}$ , функция  $\arctg$  действует при  $\Delta < 0$ , функция  $-\operatorname{Arth}$  — при  $\Delta > 0$ .

$$\alpha_6 = \frac{6h^2}{F_{\max} - 1} \int_1^{F_{\max}} \frac{B^2}{\Delta^2} \left\{ \frac{A \left[ \Delta - \frac{6Bh}{(F+h)^2} \right]}{12\pi h^2 B^2} + \frac{\alpha_5}{(F+h)^4} + \right. \\ \left. + \frac{(\pi - \varphi_1 + \frac{A}{2B}) \left[ \frac{g(\pi, F)}{(F+h)^2} - \frac{\Delta}{6B} \right]}{\pi g^2(\pi, F)} \right\} dF. \quad (10a)$$

$F_{\max}$  — максимальное значение параметра группирования ( $F_{\max} \sim 4$ ). Константы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6$  необходимо определить исходя из соотношений (7), (10) приближенным численным методом или с помощью ЭВМ. Например, для случая  $h = 0,05$ ;  $F^0 = 0,7$  константы равны  $\alpha_1 \approx 1$ ;  $\alpha_2 \approx 0,46h^2$ ;  $\alpha_5 \approx 2,27$ ;  $\alpha_6 \approx 0,34$  и соответственно  $\alpha_3 \approx 2,2$ ;  $\alpha_4 \approx 3,73$ .

Графики функций  $G(F)$ ,  $H(F)$ , построенные с помощью соотношений (5), (6), (8), (9), приведены на рис. 2. Полученные аналитические зависимости позволяют, как было указано в [4], найти решение задачи также в аналитическом виде. Для учета слабого изменения кинетической энергии электронов будем считать член с функцией  $H(F)$  малым и воспользуемся методом итераций при решении уравнения (1). В этом случае исходное уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2 F}{d\varphi^2} = \mathcal{J}(F) = G(F) - \delta \left[ (F_0')^2 + 2 \int_0^F G(F) dF \right] H(F). \quad (11)$$

Здесь  $\delta = 2D^2 \frac{\beta U_c}{E_0}$  — параметр изменения кинетической энергии;  $F_0' = \frac{E(0)}{DE_0}$ ;  $E(0)$  — амплитуда усиливаемого сигнала на входе ЛБВМ.

В общем случае (произвольное  $\delta$ ) точное решение уравнения (1) также сводится к квадратурам [6], однако представление интегралов в элементарных функциях возможно только при условии  $\delta \ll 1$  с точностью до членов порядка  $\delta^2$ . Легко показать, что получающееся при этом решение будет совпадать с результатом используемой ниже итерации.

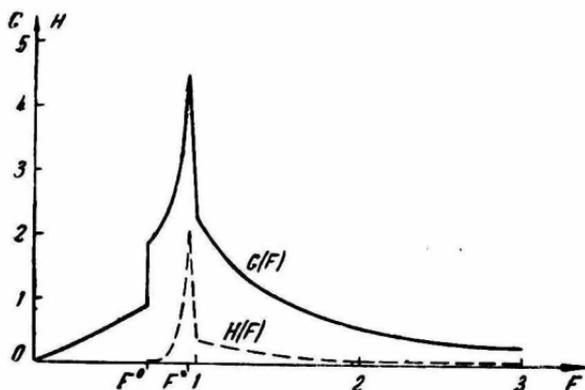


Рис. 2.

Исходя из известного решения уравнения (11) и проводя одно интегрирование, получим

$$\frac{dF}{dq} = [(F_0')^2 + 2Y(F)]^{\frac{1}{2}}; \quad Y(F) = \int_0^F \mathcal{K}(F) dF, \quad (12)$$

где функция  $Y(F)$  выражается соотношениями

$$Y = \frac{1}{2} [1 - 2\delta h^2 (F_0')^2] F^2 + \frac{1}{4} \left\{ \frac{2}{3} - \delta h^2 \left[ 2 + \frac{11}{2} (F_0')^2 \right] \right\} F^4, \quad 0 \leq F \leq F^0; \quad (13)$$

$$Y = Y(F^0) + y_2(F^0) - y_2(F); \quad F^0 \leq F \leq F^*; \quad (14)$$

$$y_2 = 2\alpha_1 \sqrt{1-F} - 2\alpha_2 \delta \frac{2\alpha_1 - \frac{1}{3} c_2 (1-F)^{-\frac{1}{2}}}{1-F};$$

$$c_2 = (F_0')^2 + (F_0'')^2 + \frac{1}{3} (F_0''')^2 + 4\alpha_1 \sqrt{1-F_0'}; \quad (15)$$

$$Y = Y(F^*) + (G^* - \delta c_3 H^*)(F - F^*) - \frac{2}{3} (\alpha_3 G^* - \delta c_3 \alpha_4 H^*)(F - F^*)^{\frac{3}{2}} - \delta G^* H^* (F - F^*)^2 \left[ 1 - \frac{4}{5} \left( \frac{2}{3} \alpha_3 + \alpha_4 \right) \sqrt{F - F^*} - \frac{4}{9} \alpha_3 \alpha_4 (F - F^*) \right];$$

$$c_3 = c_2 - 4\alpha_1 \sqrt{h}; \quad F^* \leq F \leq 1.$$

$$Y = Y(1) + y_4(1) - y_4(F); \quad F \geq 1; \quad (16)$$

$$y_4(F) = F^{-1} [\alpha_5 - \delta \alpha_6 (c_4 - \alpha_5 F^{-1})];$$

$$c_4 = c_3 + 2 \left( \alpha_5 + hG^* - \frac{2}{3} \alpha_3 G^* h^2 \right).$$

Используя решение уравнения (11) в виде

$$q(F) = \int_0^F \frac{dF}{\sqrt{(F_0')^2 + 2Y(F)}}$$

и проводя в (17) интегрирование при условии  $\delta \ll 1$ , окончательно получаем

$$q = r_1^{-\frac{1}{2}} \left[ 1 + \frac{3}{8} r_1^{-2} r_2 (F_0')^2 \right] \ln \frac{\sqrt{r_1 F} + \eta_1}{F_0'} - \frac{1}{8} \frac{r_2}{r_1^2} F [\eta_1 + 2(F_0')^2 \eta_1^{-1}],$$

$$0 \leq F \leq F^0; \quad (18)$$

$$r_1 = 1 - 2\delta h^2 (F_0')^2; \quad r_2 = \frac{2}{3} - \delta h^2 \left[ 2 + \frac{11}{2} (F_0')^2 \right];$$

$$\eta_1(F) = [(F_0')^2 + r_1 F^2]^{\frac{1}{2}};$$

$$q = q(F^0) + x_2(F^0) - x_2(F); \quad F^0 \leq F \leq F^*; \quad (19)$$

$$x_2(F) = \frac{1 + \delta s_2}{12a_1^2} [\eta_2^3 - 3s_1 \eta_2] - 4\delta \frac{\alpha_2}{s_1} \times$$

$$\times \left\{ \frac{c_2}{3\eta_2 \sqrt{1-F}} + 2\alpha_1 \left( 1 - \frac{c_2}{s_1} \right) \left[ \frac{2}{\eta_2} + \frac{1}{\sqrt{s_1}} \ln \frac{\eta_2 - \sqrt{s_1}}{\eta_2 + \sqrt{s_1}} \right] \right\}.$$

В (19) введены обозначения:

$$s_1 = (F_0')^2 + 2Y(F^0) + 4\alpha_1 \sqrt{1-F^0};$$

$$s_2 = \frac{2\alpha_2}{1-F^0} \left( \frac{c_2}{3\sqrt{1-F^0}} - 2\alpha_1 \right).$$

$$\eta_2(F) = (s_1 - 4\alpha_1 \sqrt{1-F})^{\frac{1}{2}}.$$

На третьем и четвертом участках решение описывается формулами:

$$q = q(F^*) + x_3(F) - x_3(F^*); \quad F^* \leq F \leq 1; \quad (20)$$

$$x_3(F) = \frac{2}{a} \sqrt{\eta_3} + \frac{2}{3b} (\alpha_3 G^* - \delta c_3 \alpha_4 H^*) \left[ (F - F^* + \right.$$

$$\left. + \frac{3a}{b}) \sqrt{\frac{F - F^*}{\eta_3}} + L \right] + 2\delta G^* H^* \frac{\frac{1}{3} \eta_3^2 - 2a\eta_3 - a^3}{b^3 \sqrt{\eta_3}} -$$

$$- \frac{2}{5b} \left( \frac{2}{3} \alpha_3 + \alpha_4 \right) \delta G^* H^* \left[ (F - F^*)^2 - \frac{5a}{2b} (F - F^*) - \right.$$

$$\left. - \frac{15a^2}{2b^2} \right] \sqrt{\frac{F - F^*}{\eta_3}} - \frac{5a}{2b} L - \frac{8}{9b} \alpha_3 \alpha_4 \delta G^* H^* \left[ \frac{6}{b^3} \left[ \frac{1}{5} \eta_3^2 - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{3}a\eta_3 + a^2 \left] \sqrt{\eta_3} - (F - F^*)^3 \eta_3^{-\frac{1}{2}} \right\}; \\
 \eta_3(F) &= a + b(F - F^*) = (F_0')^2 + 2Y(F^*) + \\
 & + 2(G^* - \delta c_3 H^*)(F - F^*). \\
 L &= \frac{3a}{2b\sqrt{b}} \cdot \ln \frac{\sqrt{\eta_3} - \sqrt{b(F - F^*)}}{\sqrt{\eta_3} + \sqrt{b(F - F^*)}}; \\
 q &= q(1) + x_4(F) - x_4(1), \quad F \geq 1; \tag{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_4(F) &= \frac{\sqrt{\eta_4}}{l} - (\alpha_5 - \delta c_4 \alpha_6) \ln(\sqrt{l\eta_4} + lF + \alpha_5 - \delta c_4 \alpha_6); \\
 l &= (F_0')^2 + 2Y(1) + 2y_4(1); \\
 \eta_4(F) &= lF^2 - 2(\alpha_5 - \delta c_4 \alpha_6)F - \delta \alpha_5 \alpha_6.
 \end{aligned}$$

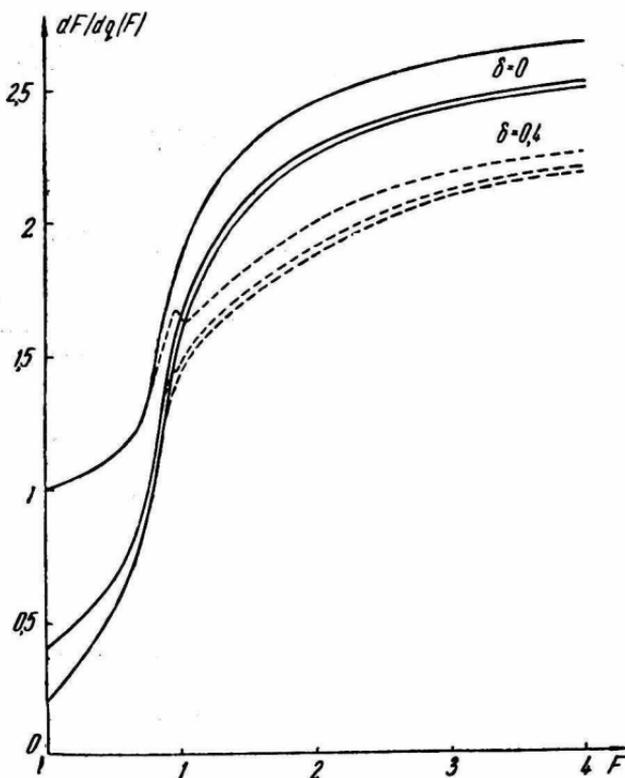


Рис. 3.

Соотношения (12)—(16) совместно с (17)—(21) полностью определяют решение задачи. Кривые зависимости функции  $\frac{dF}{dq}(F)$ , построенные с помощью соотношений (12)—(16), и кривые зависимости функции  $q(F)$ , построенные с помощью (17)—(21), приве-

дены на рис. 3, 4 для случая  $\beta d = 3.5$ ;  $\beta x_0 = 0.5$ ; ( $h = 0.05$ ), при различных значениях амплитуды входного сигнала  $F'_0 = 0.2$ ; 0.4; 1 и  $\delta = 0$  (сплошные кривые),  $\delta = 0.4$  (пунктир).

Сравнение кривых рис. 3 при  $\delta = 0$  и  $\delta = 0.4$  показывает, что учет изменения кинетической энергии электронов в уравнении баланса энергии приводит при больших значениях параметра группирования  $F > 1$  к значительному уменьшению амплитуды напряженности ВЧ поля.

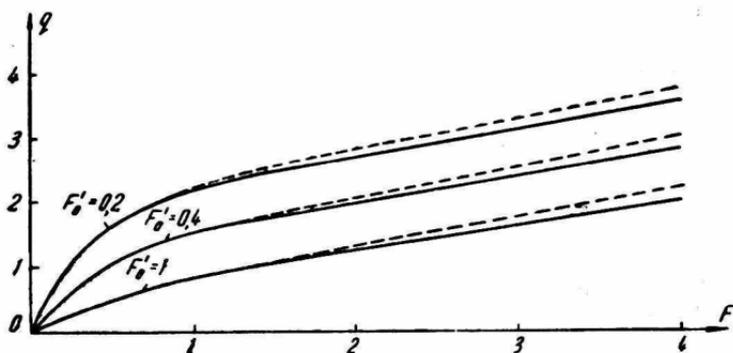


Рис. 4.

Качественно кривые рис. 3, полученные приближенным аналитическим методом, совпадают с аналогичными кривыми, приведенными в работе [2]. В частности, наличие на кривой  $F'(q)$  участка с отрицательным значением  $F''(q)$  связано, как было отмечено в [2], с тем, что на этом участке прирост кинетической энергии электронов превышает отдачу ВЧ полю их потенциальной энергии.

Полученные соотношения позволяют также определить в аналитическом виде зависимость амплитуды насыщения от параметра рассинхронизма  $\delta$ . Из формул (12), (16) следует, что в режиме насыщения ( $F \gg 1$ )

$$\frac{E_{\max}}{DE_0} = \left( \frac{dF}{dq} \right)_{\max} = \sqrt{(F'_0)^2 + 2[Y(1) + \alpha_5 - \delta\alpha_6(c_4 - \alpha_6)]}, \quad (22)$$

т. е. амплитуда поля в режиме насыщения уменьшается с увеличением параметра изменения кинетической энергии электронов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. Feinstein, G. Kino. Proc. IRE, 47, № 10. (1957).
2. Г. Г. Моносов. «Радиотехника и электроника», 7, № 7, (1962).
3. Д. И. Трубецков, Ю. П. Шараевский. «Радиотехника и электроника», 15, № 11, (1970).
4. Л. А. Поспелов. Электронная техника, серия 1, «Электроника СВЧ», № 1, (1972).
5. Г. А. Алексеев, Л. А. Поспелов. См. статью настоящего сборника.
6. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд-во «Наука», 1971.