ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВОЛНОВОДНЫХ МОД НА НЕОДНОРОДНОСТЯХ В МНОГОВОЛНОВЫХ ВОЛНОВОДАХ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Л. В. Бржечко

Харьков

Основной задачей в теории многоволновых волноводов является изучение взаимного преобразования волн на неоднородностях. В работе [1] при помощи метода определения коэффициентов Фурье и численного счета удалось проанализировать задачу дифракции E- и H-поляризованных волн на некоторых частных видах неоднородностей в прямоугольном волноводе.

В настоящей работе предлагается метод, на основе которого может быть построен единый алгоритм и, естественно, стандартная программа для широкого класса скалярных задач дифракции на неоднородностях в волноводах произвольной формы поперечного сечения. Применение предлагаемого алгоритма позволит провести исследование волноводов с диэлектриками, волноводов с неоднородностями и конечной проводимостью и т. д.

Постановка задачи. Предлагаемый подход иллюстрируется для конфигураций задач, приведенных на рисунке. Проводимость всех поверхностей принимается идеальной. Зависимость от времени — $\exp(-i\omega t)$.

Допустим, что на неоднородности в волноводе (рис., позиция *а*) дифрагирует слева волноводная волна H_{10} (переход к другим приведенным конфигурациям не влияет на ход решения, а отличается только записью полей):

$$E_{\text{упт}}^{\text{пад}} = \sin\frac{\pi nz}{a}\sin\frac{\pi my}{b}e^{i\gamma_{nm}x}, \tag{1}$$

где

$$\gamma_{nm} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right) - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}; \tag{1a}$$

k — волновое число

Суммарное поле

$$E_{ynm} = E_{ynm}^{\text{пад}} + E_y^{\text{рас}}, \tag{2}$$

где $E_y^{\text{рас}}$ — искомое рассеянное поле, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца

$$\Delta E_y + k^2 E_y = 0 \tag{3}$$

и граничным условиям

$$E_y = 0 \text{ на } \begin{matrix} z = a; & -\infty < x \leqslant 0; \\ z = -a; & -\infty < x \leqslant 0; \end{matrix} \tag{4}$$

$$E_y = -\sin\left[\frac{\pi}{a}dn\right]\sin\frac{\pi my}{b}\exp[i\gamma_{nm}x] \tag{4a}$$

на $z = d$; $0 \leqslant x < \infty$;

$$E_y = -\sin\left[\frac{\pi(-d)n}{d}\right]\sin\frac{\pi my}{b}\exp[i\gamma_{nm}x] \tag{4б}$$

на $z = -d$; $0 \leqslant x < \infty$;

$$E_y = -\sin\frac{\pi nz}{a}\sin\frac{\pi my}{b}, \; x = 0 \tag{4в}$$

на $d \leqslant |z| \leqslant b$;

Условие излучения для волноводов имеет вид

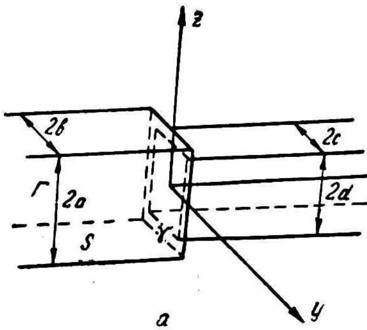
$$E_y = 0(c) \text{ при } |x| \to \infty,$$

где c — абсолютная константа.

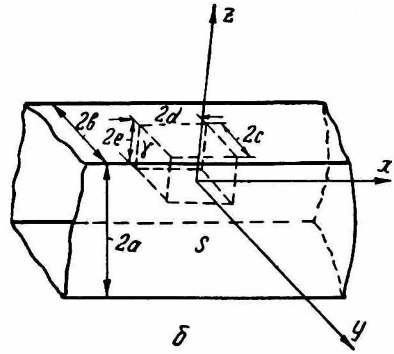
Однозначность решения требует выполнения условия на ребре:

$$E_y(x, \pm d) = 0(x^{2/3}) \text{ при } x \to -0.$$

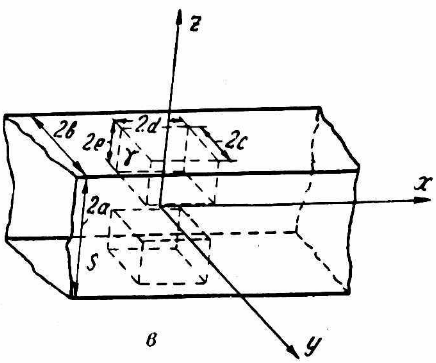
Таким образом, задача о рассеянии волн H_{10} на неоднородности сводится к задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца.


z
x
y
2в
2c
2a
2d
Г
S
γ

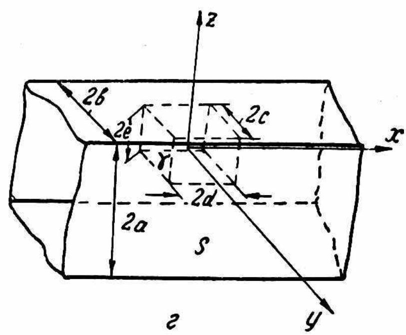
а


z
x
y
2в
2d
2e
2c
γ
2a
S

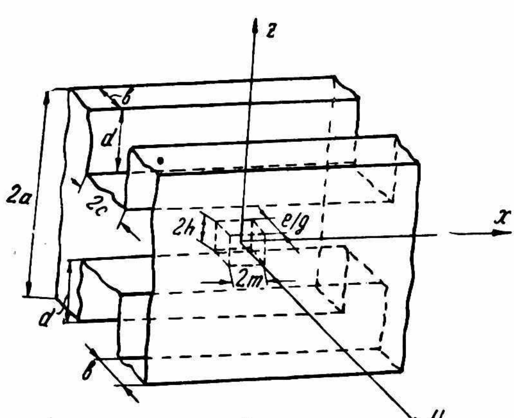
б


z
x
y
2в
2e
2d
2c
γ
2a
S

в


z
x
y
2в
2e
2c
γ
2d
2a
S

г


z
x
y
в
d
2a
2c
2h
e/g
2m
d'
в

д

a > a'

Рассмотрим предлагаемый метод решения этой задачи.

Метод решения. Согласно [3], структура решения для уравнений эллиптического типа второго порядка при граничных условиях вида Дирихле или Неймана может быть записана как

$$u = \omega\Phi + \varphi \quad \text{(задача Дирихле);} \tag{5}$$

$$u = \Phi_0 - \omega D_1\Phi_0 + \omega\varphi \quad \text{(задача Неймана).} \tag{6}$$

В этих формулах ω — функция, построенная с помощью R-функций [3], удовлетворяющая условию $\omega > \Gamma$ в области Γ (рис.) и $\omega_s = 0$; φ — «склеенное», согласно правилам [3], значение u на границе s;

$$Д_1 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial z} \tag{7}$$

— линейный дифференциальный оператор, свойства которого подробно разобраны также в [3];

$$\Phi = \sum_{i+j+k=0}^{n} c_{ijk} P_i(x)\, p_j(y)\, P_k(z), \tag{8}$$

где P_{ijk} — полная последовательность функций (для нашего случая тригонометрических полиномов);

c_{ijk} — коэффициенты, подлежащие определению.

Структура u должна удовлетворять краевым условиям (4), условию излучения и условию на ребрах. Таким образом, задача может быть сведена к определению постоянных c_{ijk} из соображений наилучшего удовлетворения дифференциальному уравнению (3).

Построим функцию ω для конфигураций, приведенных на рисунке:

$$\text{а)}\ \omega = \left(\frac{d^2 - z^2}{2d} \wedge_0 \frac{c^2 - y^2}{2c}\right) \vee_0 \left(\frac{d^2 - z^2}{2d} \wedge_0 \frac{b^2 - y^2}{2b} \wedge_0 - x\right);$$

$$\text{б)}\ \omega = \left(\frac{b^2 - y^2}{2b}\right) \wedge_0 \left(\frac{a^2 - z^2}{2a}\right) \wedge_0 \left(\frac{y^2 - c^2}{2l} \vee_0 \frac{x^2 - d^2}{2d} \vee_0 [(a-c) - z]\right);$$

$$\text{в)}\ \omega = \left[\left(\frac{a^2 - z^2}{2a}\right) \wedge_0 \left(\frac{b^2 - y^2}{2b}\right)\right] \wedge_0 \left[\frac{x^2 - d^2}{2d} \vee_0 \frac{y^2 - c^2}{2l} \vee_0 \frac{(d^2 - l^2) - z^2}{2(a - l)}\right];$$

$$\text{г)}\ \omega = \left(\frac{a^2 - z^2}{2a} \wedge_0 \frac{b^2 - y^2}{2b}\right) \wedge_0 \left(\frac{x^2 - d^2}{2d} \vee_0 \frac{y^2 - c^2}{2c} \vee_0 \frac{z^2 - l^2}{2l}\right);$$

$$\text{д)}\ \omega = \left[\left(\frac{c^2 - y^2}{2c} \wedge_0 \left(\frac{a - d)^2 - 4z^2}{4(a - d)}\right) \vee_0 \left(\frac{b^2 - y^2}{2b} \wedge_0 \frac{y^2 - c^2}{2c} \wedge_0 \frac{a^2 - z^2}{2a}\right)\right] \wedge_0;$$

$$\wedge_0 \left[\frac{z^2 - b^2}{2b} \vee_0 \frac{x^2 - m^2}{2m} \vee_0 \frac{y^2 - l^2}{2l}\right].$$

Относительно ω можно заключить следующее.

1. $\omega > 0$ везде в области Γ.

2. Докажем еще одно свойство: функция ω при $x \to \infty$ ограничена для областей, приведенных на рисунке.

Всякая, входящая в ω функция, зависящая лишь от z и y, обязательно является ограниченной в силу ограниченности областей изменения y и z. Пусть символы $\varphi_1(y, z)$ и $\varphi_2(y, z)$ означают ограниченные при $x \to \infty$, $y \to \infty$ функции, а $f(x)$ — неограниченную функцию. Тогда имеет место выражение

$$\omega = \begin{cases} 1)\ \varphi_1 \wedge_0 (\varphi_2 \vee_0 f); \\ 2)\ \varphi_1 \vee_0 (\varphi_2 \wedge_0 f). \end{cases}$$

Так как $\varphi \wedge_0 f$, где φ — ограниченная функция, а f — неограниченная функция, ограничена в силу

$$\varphi \wedge_0 f \frac{(\varphi + f)^2 - \varphi^2}{f + \varphi + \sqrt{f^2 + \varphi^2}} = \frac{2\varphi f}{f + \varphi + \sqrt{f^2 + \varphi}} \to \varphi$$

(при любом ω из (9) вопрос сводится к конъюнкции ограниченной с неограниченной функцией); ω ограничено для рассмотренных областей.

3. На контуре s функция $\omega = 0$ по определению.

4. Если ρ — радиус тонкого цилиндра, окружающего ребра волновода включая угловые точки, то, переходя к цилиндрической системе координат в (9), получаем $\lim \omega = \text{const}$; $\rho \to 0$.

Таким образом, структура u удовлетворяет:

1) граничным условиям (4), так как φ — «склеенное» значение функции на границе области, а $\omega_s = 0$;

2) условию излучения для волноводов, так как ω ограничено в силу доказанного и φ по определению;

3) условию на ребре: $\omega = \text{const}$; Φ, $\varphi \sim \text{const}$.

Для определения коэффициентов c_{ijk} использован метод Ритца [3]. По построенному алгоритму составлена стандартная программа на языке АЛГАМС. Сравнение с результатами вычисления другим методом показывает расхождение не более 2%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Г. Хроменко. Сб. «Радиотехника», вып. 10. Харьков. Изд-во ХГУ, 1969.

2. В. Л. Рвачев. Применение R-функций к решению краевых задач математической физики. Труды радиотехнического института АН СССР, 1971.

3. С. Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. Изд-во «Наука», 1970.