ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОННОЙ СХЕМЫ НА ОСНОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Ю. М. Калниболотский, Ю. В. Королев, В. К. Божок

Киев

Широкое распространение получает описание электронных схем с помощью системы дифференциальных уравнений в нормальной форме [1]:

$$\dot{x} = Ax + Bu; \tag{1}$$

$$y = Cx + Du, \tag{2}$$

где x — вектор переменных состояния схемы, включающий в себя максимально возможное число напряжений на емкостях и токов через индуктивности;

A, B, C, D — матричные коэффициенты;

u — вектор независимых источников;

y — вектор выходных сигналов схемы.

При анализе электронных схем, представленных в виде четырехполюсников, когда требуется получить частотные или временные характеристики схемы, возможно эффективное использование этого метода, позволяющего увеличить точность вычислений и уменьшить их объем. Основная идея состоит в том, чтобы не вычислять полиномиальные коэффициенты числителя и знаменателя требуемой схемной функции, а использовать QR-алгоритм [2] для определения характеристических чисел матрицы A, т. е. получать результат в виде

$$\det(pE - A) = \prod_{i=1}^{n} (p + \lambda_i), \tag{3}$$

где $p = \sigma + j\omega$; E — единичная матрица; λ_i — i-е характеристическое число матрицы A.

Используя преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях и учитывая, что в схеме имеется один вход и один выход, из (1), (2) получаем

$$F(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = C(pE - A)^{-1} B + D, \tag{4}$$

где D — постоянная величина в данном случае.

Проведем преобразование первого слагаемого в (4), обозначив $\det(pE - A)$ как Δ, а присоединенную матрицу как $[\Delta_{ij}]$:

$$C(pE - A)^{-1} B = \frac{C[\Delta_{ij}] B}{\Delta} =$$

$$= \frac{[c_1 c_2 \ldots c_n]}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{11}\Delta_{21} \ldots \Delta_{n1} \\ \Delta_{12}\Delta_{22} \ldots \Delta_{n2} \\ \ldots \quad \ldots \\ \Delta_{1n}\Delta_{2n} \ldots \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \Delta_i^B}{\Delta}, \tag{5}$$

где Δ_i^B — определитель Δ, в котором i-й столбец замещен вектором B.

На основе теоремы об определителе суммы матриц [3] последний равен сумме определителей, построенных из возможных комбинаций столбцов (или строк) определителей суммируемых матриц.

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \Delta_i^B + \Delta - \Delta = \det[BC + pE - A] - \Delta, \tag{6}$$

где ранг матрицы BC равен единице, что упрощает применение указанной теоремы, так как все определители, содержащие два столбца матрицы BC, оказываются равными нулю.

С учетом полученного результата преобразуем соотношение (4):

$$F(p) = \frac{\det[pE - A + BC] - \Delta + D\Delta}{\Delta} = D\frac{\det\left[pE - A + \frac{1}{D}\right] BC}{\Delta} =$$

$$= D\frac{\det[pE - A_1]}{\det[pE - A]}, \tag{7}$$

где $A_1 = A - \frac{1}{D} BC$.

Таким образом, для определения нулей и полюсов схемной функции $F(p)$ необходимо решить две однотипные задачи по определению характеристических чисел матриц A и A_1.

В том случае, если $D = 0$,

$$F(p) = \frac{\det[pE - A + BC]}{\det[pE - A]} - 1, \tag{8}$$

и, если

$$F(p)=\frac{Q(p)}{P(p)},$$

то, решая задачу по определению характеристических чисел матриц A и $A_2 = A - BC$, находим

$$P(p)=\prod_{i=1}^{n}(p+\lambda_i); \qquad (9)$$

$$Q(p)-P(p)=Q(p)-\prod_{i=1}^{n}(p+\lambda_i)=\prod_{i=1}^{n}(p+a_i). \qquad (10)$$

Определение полинома $Q(p)$ на основании соотношения (10) не вызывает принципиальных трудностей.

Если необходимо найти и корни $Q(p)$, то найденные значения λ_i, a_i облегчают эту задачу, особенно в случае применения метода корневого годографа, так как точки комплексной плоскости, в которых

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}(p+a_i)}{\prod_{i=1}^{n}(p+\lambda_i)}=K_0,$$

и будут корнями полинома $Q(p)$ при $K_0' = 1$.

Оценка точности вычисления характеристических чисел матриц показывает [4], что в большинстве случаев удается определить возникающую погрешность именно при использовании соотношений типа (7), так как при этом часто кратность вычисляемых полюсов и нулей $F(p)$ или $F(p)-1$ равна единице. Таким образом, вычислив нули и полюсы схемной функции, стандартными методами можем найти ее временные или частотные характеристики.

В качестве примера проанализируем схему, показанную на рисунке, где $C_1 = 1{,}6$ *пкф*; $C_2 = 35{,}4$ *пкф*; $C_3 = 30$ *пкф*; $L_4 = 20$ *мкгн*; $R_6 = 10^3$ *ом*; $G_7 = 2{,}35 \cdot 10^{-2}$ *сим*; $G_8 = 0{,}204 \cdot 10^{-3}$ *сим*; $G_9 = 10^{-7}$ *сим*; $G_{10} = 10^{-5}$ *сим*; $R_{11} = 1{,}66 \cdot 10^3$ *ом*; $g_{12} = 1{,}68 \cdot 10^{-2}$ *сим*.

При нормировании данных параметров ($R_0 = 10^3$ *ом* и $\omega_0 = 10^8$ *рад/сек*) получаем систему дифференциальных уравнений схемы, показанной на рисунке [5]:

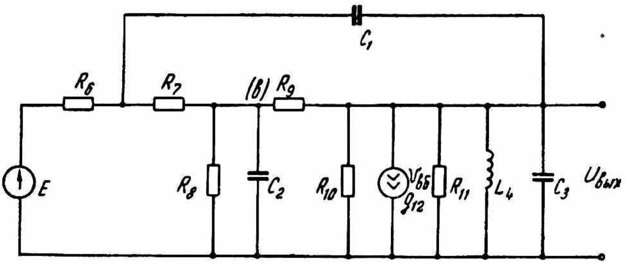
$$\frac{d}{dt}\begin{matrix} U_{C_1} \\ U_{C_2} \\ U_{C_3} \\ I_{L_4}\end{matrix} = \begin{matrix} -153{,}125 & -146{,}875 & 153{,}125 & 0 \\ -6{,}663841 & -6{,}996073 & -6{,}638446 & 0 \\ 8{,}166666 & -2{,}200033 & -8{,}370836 & 0{,}333333 \\ 0 & 0 & 0{,}0005 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} U_{C_1} \\ U_{C_2} \\ U_{C_3} \\ I_{L_4}\end{matrix} + \begin{matrix} -6{,}25 \\ 0 \\ -0{,}3333333 \\ 0 \end{matrix} E;$$

$$U_{\text{вых}} = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} U_{C_1} \\ U_{C_2} \\ U_{C_3} \\ I_{L_4} \end{matrix}$$

Таким образом,

$$A = \begin{matrix} -153{,}125 & -146{,}875 & 153{,}125 & 0 \\ -6{,}663841 & -6{,}996073 & -6{,}638446 & 0 \\ 8{,}166666 & -2{,}200033 & -8{,}370836 & 0{,}3333333 \\ 0 & 0 & 0{,}0005 & 0 \end{matrix}$$

$$A_2 = \begin{matrix} -153{,}125 & -146{,}875 & 159{,}375 & 0 \\ -6{,}663841 & -6{,}996073 & -6{,}638446 & 0 \\ 8{,}166666 & -2{,}200033 & 8{,}037503 & 0{,}3333333 \\ 0 & 0 & 0{,}0005 & 0 \end{matrix}$$



Характеристические числа, найденные с помощью QR-алгоритма, следующие:

для матрицы A: $\lambda_1 = -166{,}7417$; $\lambda_2 = 103{,}6707$;
$\lambda_3 = -11{,}81725$; $\lambda_4 = -0{,}42 \cdot 10^{-6}$:

для матрицы A_2: $\lambda_1 = -167{,}0205$; $\lambda_2 = 107{,}6887$;
$\lambda_3 = -11{,}60693$; $\lambda_4 = -0{,}408 \cdot 10^{-6}$.

Дальнейшие вычисления интереса не представляют.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. R. Bashkow. The A matrix, new network discription. TRE Transactions on Circuit Theory, V. CT-4, 1957.
2. Дж. Х. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений. Изд-во «Наука», 1970.
3. Ю. В. Королев. Канонические методы синтеза электронных схем. Автореф. канд. дисс., Киев, 1969.
4. I. Sandberg, H. C. So. Two-of-eigenvalues approach to linear-system analysis. IEEE Trans on Circuit Theory. V. CT-16, № 4, 1969.
5. Ю. М. Калниболотский, Ю. В. Королев, В. Г. Табарный, В. Г. Слипченко. К вопросу о составлении системы дифференциальных уравнений при анализе электронных схем. «Электронная техника», серия VI. «Микроэлектроника», вып. 4, 1969.