

МОМЕНТ ПОНДЕРОМОТОРНЫХ СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ТЕЛА ПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

*Н. А. Хижняк, Г. П. Щербинин, Л. К. Гал,
В. С. Жилков*

Х а р ь к о в

С появлением приборов, использующих механическое действие электромагнитных волн в практических целях, в частности для измерения мощности СВЧ, вопрос о теоретическом расчете пондеромоторных сил приобрел особую важность. Однако решение этого вопроса в случае переменного во времени и пространстве поля при произвольном соотношении между размерами тела и длиной рассеиваемой волны связано с преодолением существенных математических трудностей. Поэтому до сих пор авторы работ, посвященных расчету пондеромоторных сил, ограничивались достаточно грубым приближением однородного поля. Целью настоящей

работы является получение решения, уточняющего это приближение.

Исходной предпосылкой являются результаты работы [1], в которой предложен интегральный метод определения внутреннего поля по заданному падающему полю для тел, размеры которых меньше длины рассеиваемой волны ($a < \lambda$); показано, что при разложении полей в ряд по степеням малого параметра $\frac{a}{\lambda}$ определение внутреннего поля с точностью до $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^n$ сводится к решению $(n + 1)$ электростатических задач. Нулевое приближение этого разложения описывает приближение однородного поля. В данной работе кроме нулевого, рассмотрены первое и второе приближения по $\frac{a}{\lambda}$ для момента пондеромоторных сил, обусловленных действием поля волны H_{10} в прямоугольном волноводе на эллипсоид вращения.

Диэлектрическое тело, рассеивающее падающую электромагнитную волну, можно представить как систему элементарных диполей, каждый из которых занимает объем dV . Рассмотрим действие падающей волны на один диполь, заряды которого равны $q_1 = q$, $q_2 = -q$, а радиусы-векторы зарядов $\vec{r}_1 = \vec{r}$ и $\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{\Delta r}$. Пусть магнитная проницаемость тела равна $\mu = 1$. Тогда взаимодействием тела с магнитной составляющей поля можно пренебречь и записать момент сил, действующих на один диполь, в таком виде [2]:

$$\vec{\tau} = [\vec{P}, \vec{E}_1(\vec{r})] + [\vec{r}, (P_{\nabla}) \vec{E}_1(\vec{r})], \quad (1)$$

где E_1 — поле, действующее на рассматриваемый диполь; $\vec{P} = q\Delta r$ — дипольный момент. Здесь первое слагаемое определяет момент относительно центра диполя, второе — относительно начала координат. Полный момент сил, действующих на тело, равен сумме моментов отдельных диполей. При этом сумма первых слагаемых выражения (1) даст момент относительно центра тела, а сумма вторых — момент относительно начала координат. В дальнейшем рассматривается только момент относительно центра тела, поэтому второе слагаемое в выражении (1) опускается.

Поле $\vec{E}_1(\vec{r})$ можно представить в виде

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \vec{E}_p(\vec{r}),$$

где \vec{E}_0 — волна, падающая на диполь от внешнего источника; \vec{E}_p — волна, обусловленная рассеянием падающего поля всеми диполями, кроме рассматриваемого.

Следовательно, \vec{E}_p определяет момент сил, действующий на данный диполь со стороны остальных диполей, т. е. влияет на распределение момента сил по объему тела, но в силу закона сохранения момента импульса не дает вклада в полный момент сил, действующих на тело в целом [3].

Поскольку нас интересует именно полный момент, перепишем (1) в виде

$$\vec{\tau} = [\vec{P}, \vec{E}_0(\vec{r})]. \quad (2)$$

Разделив последнее равенство на dv , что даст объемную плотность момента, и проинтегрировав полученное по объему тела, найдем выражение для полного момента:

$$T = \int_V [\vec{P}, \vec{E}_0] dv, \quad (3)$$

где $\vec{P} = \frac{\vec{p}}{dv}$ — вектор диэлектрической поляризации.

Используя известную связь вектора \vec{P} с внутренним полем и полагая, что поля зависят от времени как $\exp\{i\omega t\}$, получаем из (3)

$$T = \frac{\epsilon - 1}{8\pi} \int_V [\vec{E}(\vec{r}), \vec{E}_0^*(\vec{r})] dv, \quad (4)$$

где (и в дальнейшем) опущен знак реальной части; знак * означает комплексно-сопряженную величину; $\vec{E}(\vec{r})$ — внутреннее поле.

Для определения внутреннего поля $\vec{E}(\vec{r})$ используем интегральные уравнения, полученные в работе [1]. С учетом того, что $\mu = 1$, из них следует

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \frac{\epsilon - 1}{4\pi} (\text{grad div} + k^2) \int_V \vec{E}(\vec{r}') f(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}', \quad (5)$$

где \vec{r} — точка наблюдения внутри тела;

\vec{r}' — переменная интегрирования; $k = \frac{\omega}{c}$;

V — объем тела.

Функция Грина $f(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta f + k^2 f = -4\pi\delta(|\vec{r} - \vec{r}'|),$$

где δ — функция Дирака. Поскольку уравнение (5) записано для внутреннего поля, конкретный вид функции Грина можно выбрать исходя из условий излучения на бесконечности [1]:

$$f(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Пусть размеры a рассеивающего тела таковы, что $\frac{a}{\lambda} < 1$, где λ — длина рассеиваемой волны. Тогда все величины можно разложить по степеням малого параметра $\frac{a}{\lambda}$. Формально это разложение делается по степеням (ik) :

$$F(\vec{r}) = F^{(0)}(\vec{r}) + (ik) F^{(1)}(\vec{r}) + (ik)^2 F^{(2)}(\vec{r}) + \dots, \quad (6)$$

где под $F(\vec{r})$ подразумевается любая из величин $\vec{E}_0(\vec{r})$; $\vec{E}(\vec{r})$; $f(|\vec{r} - \vec{r}'|)$; \vec{T} .

В результате такого разложения получим из (4) следующие выражения для первых трех приближений по $\frac{a}{\lambda}$ для момента сил:

$$\begin{aligned} \vec{T}^{(0)} &= \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \int_v [\vec{E}^{(0)}, \vec{E}_0^{(0)}] dv; \\ \vec{T}^{(1)} &= \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \int_v \{[\vec{E}^{(1)}, \vec{E}_0^{(0)*}] - [\vec{E}^{(0)}, \vec{E}_0^{(1)*}]\} dv; \\ \vec{T}^{(2)} &= \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \int_v \{[\vec{E}^{(2)} \vec{E}_0^{(0)*}] - [\vec{E}^{(1)}, \vec{E}_0^{(1)*}] + [\vec{E}^{(0)}, \vec{E}_0^{(2)*}]\} dv, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\vec{E}^{(0)}$, $\vec{E}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(2)}$, согласно (5), определяются такими уравнениями:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(0)}(\vec{r}) &= \vec{E}_0^{(0)}(\vec{r}) + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \int_v (\vec{E}^{(0)}(\vec{r}') \nabla) \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'; \\ \vec{E}^{(1)}(\vec{r}) &= \vec{E}_0^{(1)}(\vec{r}) + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \int_v (\vec{E}^{(1)}(\vec{r}') \nabla) \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'; \\ \vec{E}^{(2)}(\vec{r}) &= \vec{E}_0^{(2)}(\vec{r}) + \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} \int_v \{(\vec{E}^{(0)}(\vec{r}') \nabla) \nabla |\vec{r} - \vec{r}'| - \\ &- 2\vec{E}^{(0)}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\} d\vec{r}' + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} \int_v (\vec{E}^{(2)}(\vec{r}') \nabla) \nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда видно, что определение коэффициентов разложения внутреннего поля по степеням $\frac{a}{\lambda}$, $\vec{E}^{(0)}$, $\vec{E}^{(1)}$ и $\vec{E}^{(2)}$ связано с вычислением объемных потенциалов внутренних точек. Такие вычисления проделаны [4] в настоящее время только для эллипсоида вращения, который определяет выбор формы рассеивающего тела.

Пусть падающее поле представляет собой волну H_{10} в прямоугольном волноводе, причем эллипсоид расположен в центре волновода таким образом, что ось X системы координат, связанной с осями эллипсоида, и ось X_v волноводной системы координат X_v, Y_v, Z_v совпадают (рис. 1). Ось Z — ось вращения эллип-

соида. Уравнение поверхности эллипсоида в координатах X, Y, Z имеет канонический вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c — полуоси эллипсоида, причем $a = b$.

Выражения для объемных потенциалов получены в работе [4] в системе координат, связанной с осями эллипсоида. В этой системе (здесь — X, Y, Z) компоненты поля волны H_{10} записываются следующим образом:

$$E_{0x} = 0;$$

$$E_{0y} = -i \frac{k}{k_x} H_m \cos k_x X \exp \{ -ik_z (-y \sin \theta + z \cos \theta) \} \cos \theta; \quad (9)$$

$$E_{0z} = E_{0y} \operatorname{tg} \theta,$$

где k_x — поперечное;
 k_z — продольное волновое число;
 θ — угол между осями z и z_b (рис. 1).

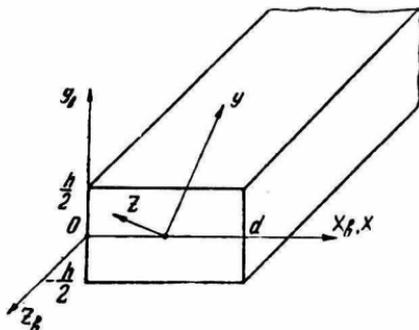


Рис. 1.

Разлагая поле падающей волны в ряд по степеням $\frac{a}{\lambda}$, получаем

$$E_{0x}^{(0)} = 0;$$

$$E_{0y}^{(0)} = -i H_m \frac{k}{k_x} \cos \theta = b_0^0; \quad (10)$$

$$E_{0z}^{(0)} = E_{0y}^{(0)} \operatorname{tg} \theta = c_0^0;$$

$$E_{0x}^{(1)} = 0;$$

$$E_{0y}^{(1)} = -i H_m \frac{k_z}{k_x} (y \sin \theta - z \cos \theta) \cos \theta = b_2^0 y + b_3^0 z;$$

$$E_{0z}^{(1)} = E_{0y}^{(1)} \operatorname{tg} \theta = c_2^0 y + c_3^0 z; \quad (11)$$

$$E_{0x}^{(2)} = 0;$$

$$E_{0y}^{(2)} = -i H_m \frac{1}{2k k_x} [k_x^2 x^2 + k_z^2 (y^2 \sin^2 \theta + z^2 \cos^2 \theta - yz \sin 2\theta)] \cos \theta = b_{11}^0 x^2 + b_{22}^0 y^2 + b_{33}^0 z^2 + b_{23}^0 yz;$$

$$E_{0z}^{(2)} = E_{0y}^{(2)} \operatorname{tg} \theta = c_{11}^0 x^2 + c_{22}^0 y^2 + c_{33}^0 z^2 + c_{23}^0 yz; \quad (12)$$

Исходя из соотношений (10)–(12), задающих различные приближения по $\frac{a}{\lambda}$ падающего поля, ищем n -е приближение компо-

нент внутреннего поля в виде полинома n -й степени относительно координат X, Y, Z :

$$E_x^{(0)} = a_0; \quad E_y^{(0)} = b_0; \quad E_z^{(0)} = 0; \quad (13)$$

$$E_x^{(1)} = a_1x + a_2y + a_3z;$$

$$E_y^{(1)} = b_1x + b_2y + b_3z; \quad (14)$$

$$E_z^{(1)} = c_1x + c_2y + c_3z;$$

$$E_x^{(2)} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + a_{00};$$

$$E_y^{(2)} = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + b_{12}xy + b_{13}xz + b_{23}yz + b_{00};$$

$$E_z^{(2)} = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + c_{12}xy + c_{13}xz + c_{23}yz + c_{00}. \quad (15)$$

Наличие свободных членов a_{00} , b_{00} и c_{00} в равенствах (15) обусловлено тем, что второе приближение внутреннего поля, согласно (8), определяется не только вторым приближением падающего поля, но и нулевым приближением внутреннего поля, которое является постоянной величиной. В то же время линейные члены в (15) отсутствуют, поскольку в уравнение (8) для второго приближения внутреннего поля не входит поле первого приближения, имеющее вид линейной функции координат.

Неизвестные коэффициенты в выражениях (13)–(15) определяются при помощи систем алгебраических уравнений, которые получаются из интегральных уравнений (8) методом, описанным в работе [4]. В результате для внутреннего поля в нулевом приближении по $\frac{\alpha}{\lambda}$ получаем следующее решение:

$$E_x^{(0)} = 0;$$

$$E_y^{(0)} = -iH_m \frac{k}{k_x} [1 - (\epsilon - 1) I_0^{200}]^{-1} \cos \theta = b_0;$$

$$E_z^{(0)} = -iH_m \frac{k}{k_x} [1 - (\epsilon - 1) I_0^{002}]^{-1} \sin \theta = c_0; \quad (16)$$

где I_0^{200} , I_0^{002} — объемные потенциалы внутренних точек эллипсоида вращения, определяемые соотношением

$$\frac{1}{2\pi} \int \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = I_0^0 + I_0^{200} (x^2 + y^2) + I_0^{002} z^2.$$

Решение для первого и второго приближения по $\frac{\alpha}{\lambda}$ внутреннего поля может быть записано в виде

$$E_x^{(1)} = a_1x;$$

$$E_y^{(1)} = b_2y + b_3z;$$

$$E_z^{(1)} = c_2y + c_3z; \quad (17)$$

$$E_x^{(2)} = a_{12}xy + a_{13}xz;$$

$$E_y^{(2)} = b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + b_{33}z^2 + b_{23}yz + b_{00};$$

$$E_z^{(2)} = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + c_{23}yz + c_{00}, \quad (18)$$

т. е. коэффициенты $a_2 = a_3 = b_1 = c_1 = a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{23} = a_{00} = -b_{12} = b_{13} = c_{12} = c_{13} = 0$. Выражения для коэффициентов, отличных от нуля, не приводятся вследствие их большой громоздкости.

Поскольку поля нулевого приближения по $\frac{a}{\lambda}$ не зависят от координат, из (7) следует, что нулевое приближение момента сил

$$\vec{T}^{(0)} = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi} V [\vec{E}^{(0)}, \vec{E}_0^{(0)*}],$$

где v — объем эллипсоида. В рассматриваемом случае, когда центр эллипсоида совпадает с центром поперечного сечения волновода и ось x совпадает с осью x_b , отлична от нуля только одна x -компонента $\vec{T}^{(0)}$. Используя (10) и (16), из последнего равенства находим, что

$$T_x^{(0)} = \frac{v}{16\pi} \frac{k^2}{k_z^2} H_m H_m^* \sin 2\theta \left[\left(\frac{1}{\varepsilon - 1} - I_0^{200} \right)^{-1} - \left(\frac{1}{\varepsilon - 1} - I_0^{002} \right)^{-1} \right],$$

или

$$T_x^{(0)} = \frac{vk\Pi}{cSk_z} \sin 2\theta \left[\left(\frac{1}{\varepsilon - 1} - I_0^{200} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\varepsilon - 1} - I_0^{002} \right)^{-1} \right],$$

где Π — мощность падающей волны H_{10} ;

S — площадь поперечного сечения волновода;

c — скорость света.

Полагая в (19) $\varepsilon = \infty$, нетрудно найти выражение для момента сил, действующих на металлический эллипсоид. Если в (19) положить $\varepsilon = \infty$ и устремить к нулю размер эллипсоида вдоль оси вращения, совпадающей с осью z , получим момент сил, действующий на тонкую круглую металлическую пластинку:

$$T_x^{(0)} = \frac{16a^3k\Pi}{3cSk_z} \sin 2\theta,$$

где a — радиус пластинки.

Аналогичным образом можно показать, что если ось X совпадает с осью z , но центр эллипсоида сдвинут относительно центра поперечного сечения волновода на величину x_0 , то отлична от нуля x -компонента момента сил, обусловленного взаимодействием эллипсоида с магнитной составляющей поля в случае $\mu \neq 1$:

$$T_{x\mu}^{(0)} = \frac{vk_x^2\Pi}{cSk_kz} \sin 2\theta \sin^2 k_x x_0 \left[\left(\frac{1}{\mu - 1} - I_0^{002} \right)^{-1} - \left(\frac{1}{\mu - 1} - I_0^{200} \right)^{-1} \right]. \quad (20)$$

Если в (20) устремить к нулю магнитную проницаемость μ и размер эллипсоида вдоль оси вращения, получим момент сил для тонкой круглой металлической пластинки:

$$T_{xM}^{(0)} = -\frac{8a^3 k_x \Pi}{3c S k k_x} \sin 2\theta \sin^2 k_x k_0.$$

Так как поле n -го приближения по $\frac{a}{\lambda}$ представляет собой полином n -й степени относительно координат, подынтегральная функция в выражении (7) для момента сил в первом приближении есть линейная функция координат. Начало координат x , y , z , по которым проводится интегрирование, совпадает с центром эллипсоида. Следовательно, момент сил в первом приближении по $\frac{a}{\lambda}$ равен нулю, как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах. По этой же причине слагаемые, содержащие произведения xy , xz , и yz , не дают вклад во второе приближение момента сил, которое после интегрирования функций x^2 , y^2 и z^2 по объему эллипсоида можно представить в виде

$$\begin{aligned} T_x^{(2)} = & \frac{\varepsilon - 1}{30} \cdot a^4 c \left\{ (b_0 - c_0) \left(b_{11}^{0*} + \frac{a^2 c^2}{a^2} b_{22}^{0*} \right) + \right. \\ & + \left[-b_2 + c_2 + \frac{c^2}{a^2} (b_3 - c_3) \right] b_2^{0*} + \\ & \left. + \left[b_{11} - c_{11} + b_{22} - c_{22} + \frac{c^2}{a^2} (b_{33} - c_{33}) + \frac{5}{a^2} (b_{00} - c_{00}) \right] b_0^{0*} \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

где a , c — полуоси эллипсоида.

Если известны $T_x^{(0)}$ и $T_x^{(2)}$, то полный момент сил с точностью до членов порядка $\left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ равен

$$T_x = T_x^{(0)} - k^2 T_x^{(2)}.$$

Чтобы не рассматривать волновод конкретных размеров, численный расчет проведен для величины $\frac{T}{d}$, где T — момент сил, d — ширина волновода. Для этого были введены следующие безразмерные параметры:

$$\lambda' = \frac{\lambda}{2d}; \quad \nu = \frac{S}{d^2}; \quad \kappa = \frac{a}{d}; \quad \gamma = \frac{a^2}{c^2}.$$

Расчет сделан для случая, когда $\theta = \frac{\pi}{4}$, так как при этом момент имеет наибольшую величину; $\Pi = 10^8 \text{ эрг} \cdot \text{сек}^{-1}$; $\nu = 0,45$, что справедливо для стандартных волноводов; $\lambda' = 0,66$, что соответствует средней длине волны рабочей полосы стандартного волновода; $\varepsilon = 11$. В результате расчета по формулам (19), (21)

получена зависимость величин $\frac{T_x^{(0)}}{d}$ и $k^2 \frac{T_x^{(2)}}{d}$ от параметра x при $\gamma = \text{const} = 16$, т. е. зависимость полного момента сил для эллипсоида вращения от его размеров при условии, что оба размера (a и c) изменяются пропорционально.

Результаты численного расчета представлены на рис. 2.

Необходимо отметить, что формулы для второго приближения по $\frac{a}{\lambda}$ полей и момента сил применимы только для значений диэлектрической проницаемости тела, заключенных в интервале $1 \leq \epsilon < \epsilon_m$. Величина ϵ_m определяется из соотношения $2a \sqrt{\epsilon_m} = \lambda_v$, где a — большой размер эллипсоида, λ_v — длина волны в волноводе.

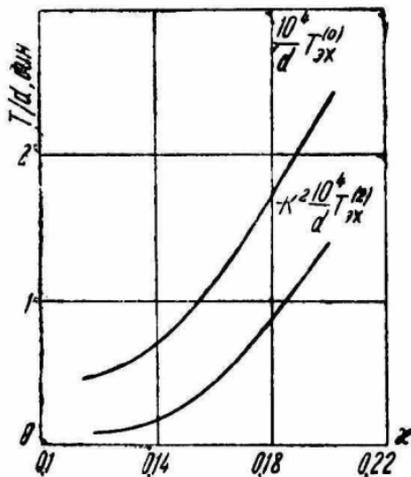


Рис. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Хижняк. МТФ, 28, 1958.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля. Физматгиз, 1962.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, 1959.
4. О. Е. Лысенко. Рассеяние электромагнитных волн на анизотропном эллипсоиде. Автореф. канд. дисс., Харьков, 1970.