ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ВОЛНОВОД, НАГРУЖЕННЫЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦЕПОЧКОЙ ПРОДОЛЬНО ПОДМАГНИЧЕННЫХ ФЕРРИТОВЫХ ШАРИКОВ

В. М. Ушаков, Н. А. Хижняк

Харьков

В настоящей работе рассматривается прямоугольный волновод, нагруженный полубесконечной цепочкой эквидистантных продольно подмагниченных ферритовых сфер, радиус a каждой из которых предполагается малым по сравнению с длиной волны в волноводе $\lambda_{в}$:

$$\left(\frac{a}{\lambda_{в}}\right) \ll 1. \tag{1}$$

Это условие позволяет ограничиться при расчетах лишь дипольным взаимодействием между ними. Такая задача возникает при исследовании замедляющих систем с регулируемыми параметрами и малыми потерями энергии в теории усилителей и генераторов СВЧ.

Пусть в прямоугольном волноводе, нагруженном изотропной средой с проницаемостями ε_1 и μ_1, параллельно его оси при $z \geqslant 0$ расположены продольно подмагниченные ферритовые шарики и положение центра каждого из них определяется координатами $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\perp 0}$, $z = lz_0$, где $l = 0, 1, 2, \ldots$ — номер шарика. Электромагнитные свойства рассеивающих тел характеризуются диэлектрической проницаемостью ε и тензором магнитной проницаемости $\hat{\mu}$ вида

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & -i\alpha & 0 \\ i\alpha & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Из области $z < 0$ падает электромагнитная волна $\sim e^{i\omega t}$, частота которой выбрана так, что в волноводе может распространяться только волна H_{10}. Необходимо найти постоянную распространения нагруженной части волновода, амплитуды полного и отраженного электромагнитного поля.

В работе [1] были получены следующие уравнения для компонент полного среднего поля в нагруженном волноводе:

$$\begin{aligned} & f^{э}_{i,mn}(\boldsymbol{r}_{\perp 0})\, E^{l}_{mn}(0)\, e^{-i\psi_0 l} = f^{э}_{i,mn}(\boldsymbol{r}_{\perp 0})\, E^{l}_{mn0} e^{-i\beta_{mn} z_0 l} + \\ & + \Big\{ [(P_{mn})_{ik} g_{kr} A_{rp} - ik\mu_1 (Q_{mn})_{ik} p_{kr} C_{rp}] \sum_{m'n'} f^{э}_{p,mn}(\boldsymbol{r}_{\perp 0})\, E^{p}_{m'n'}(0) + \\ & + [(P_{mn})_{ik} g_{kr} B_{rp} - ik\mu_1 (Q_{mn})_{ik} p_{kr} D_{rp}] \sum_{m'n'} f^{м}_{p,m'n'}(\boldsymbol{r}_{\perp 0})\, H^{p}_{m'n'}(0) \Big\} \times \\ & \times \left[\frac{e^{-i\beta_{m'n'} z_0 l}}{1 - e^{-i(\psi_0 - \beta_{m'n'} z_0)}} + e^{-i\psi_0 l} \left(1 + \frac{i \sin \psi_0}{\cos \psi_0 - \cos \beta_{m'n'} z_0}\right)\right]; \end{aligned} \tag{3}$$

$$f_{i,\,mn}^{\text{м}}(\boldsymbol{r}_{\perp 0})\,H_{mn}^{l}(0)\,e^{-i\psi_0 l} = f_{i,\,mn}^{\text{м}}(\boldsymbol{r}_{\perp 0})\,H_{mn0}^{i}e^{-i\beta_{mn}z_0 l} +$$

$$+\Big\{[(R_{mn})_{ik}P_{kr}C_{rp} + ik\varepsilon_1(S_{mn})_{ik}g_{kr}A_{rp}]\sum_{m'n'} f_{p,\,m'n'}^{\text{э}}(\boldsymbol{r}_{\perp 0})\,E_{m'n'}^{p}(0) +$$

$$+\,[(R_{mn})_{ik}p_{kr}D_{rp} + ik\varepsilon_1(S_{mn})_{ik}g_{kr}B_{rp}]\sum_{m'n'} f_{p,\,m'n'}^{\text{м}}(\boldsymbol{r}_{\perp 0})\,H_{m'n'}^{p}(0)\Big\}\times$$

$$\times\left[\frac{e^{-i\beta_{m'n'}z_0 l}}{1-e^{-i(\psi_0-\beta_{m'n'}z_0)}} + e^{-i\psi_0 l}\left(1+\frac{i\sin\psi_0}{\cos\psi_0-\cos\beta_{m'n'}z_0}\right)\right].$$

Временная зависимость, одинаковая для всех полей, опущена. Здесь в роли переменной z выступает номер рассеивающего тела, ближайшего к рассматриваемой точке z; $f_{i,mn}$ — значения собственных функций волновода в точке $\boldsymbol{r}_{\perp 0}$; ψ_0 — фазовый сдвиг среднего поля между двумя соседними рассеивающими телами; E_{mn0}, H_{mn0} — амплитуды падающей волны; β_{mn} — постоянная распространения невозмущенных мод колебаний в однородном волноводе; матрицы $\hat{P}$, $\hat{Q}$, $\hat{R}$ и $\hat{S}$ связывают рассеянное шариком поле в месте нахождения этого шарика с его дипольными моментами; $\hat{q}$ и $\hat{p}$ — матрицы рассеяния [2]; матрицы $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ и $\hat{D}$ определяют возбуждающие шарик поля через среднее полное поле в этой точке. Суммирование ведется по модам, для которых β_{mn} — реальная величина.

Для нашего случая ненулевые элементы указанных матриц

$$p_{11} = p_{22} = p_{\perp} = \frac{3V}{4\pi}\,\frac{(\mu-\mu_1)(\mu+2\mu_1)+\alpha^2}{(\mu+2\mu_1)^2-\alpha^2};$$

$$p_{21} = -p_{12} = \frac{3V}{4\pi}\,\frac{i\alpha(2\mu+\mu_1)}{(\mu+2\mu_1)-\alpha^2};\quad p_{33} = p_{\parallel} = \frac{3V}{4\pi}\,\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_3+2\mu_1};$$

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = g = \frac{3V}{4\pi}\,\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\varepsilon+2\varepsilon_1};$$

$$P_{22} = \frac{8\pi i k^2\varepsilon_1\mu_1}{dh\beta}\sin^2\frac{\pi x_0}{d}; \tag{4}$$

$$Q_{21} = -\frac{i\beta}{k^2\varepsilon_1\mu_1}P_{22};\quad Q_{23} = \frac{\pi}{dk^2\varepsilon_1\mu_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi x_0}{d}P_{22};$$

$$R_{11} = i\beta Q_{21};\quad R_{13} = -R_{31} = i\beta Q_{23};\quad R_{33} = \frac{\pi^2}{d^2k^2\varepsilon_1\mu_1}\times$$

$$\times\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x_0}{d}P_{22};\quad S_{12} = -Q_{21};\quad S_{32} = Q_{23};$$

$$A_{22} = \frac{1}{A}\left(1+\frac{\beta^2 p_{\perp}}{k^2\varepsilon_1\mu_1}P_{22} + \frac{\pi^2 p_{\parallel}}{d^2k^2\varepsilon_1\mu_1}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x_0}{d}P_{22}\right);$$

$$B_{21} = \frac{\beta p_{\perp}}{Ak\varepsilon_1}P_{22};\quad B_{23} = \frac{\pi i p_{\parallel}}{Adk\varepsilon_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi x_0}{d}P_{22};$$

$$C_{12}=\frac{\beta g}{Ak\mu_1}P_{22};\ C_{32}=-\frac{\pi i g}{Adk\mu_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi x_0}{d}P_{22};$$

$$D_{11}=\frac{1}{A}\left(1+gP_{22}+\frac{\pi^2 p_\parallel}{d^2k^2\varepsilon_1\mu_1}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x_0}{d}P_{22}\right);$$

$$D_{13}=-\frac{\pi i\beta p_\parallel}{Adk^2\varepsilon_1\mu_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi x_0}{d}P_{22};\ D_{31}=\frac{\pi i\beta p_\perp}{Adk^2\varepsilon_1\mu_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi x_0}{d}P_{22};$$

$$D_{33}=\frac{1}{A}\left(1+gP_{22}+\frac{\beta^2 p_\perp}{k^2\varepsilon_1\mu_1}P_{22}\right),$$

где k — волновое число;
V — объем сферы;
d и h — поперечные размеры волновода по осям x и y;
x_0 — координата центра сферы;

$$A=1+gP_{22}+\frac{\beta^2 p_\perp}{k^2\varepsilon_1\mu_1}P_{22}+\frac{\pi^2 p_\parallel}{d^2k^2\varepsilon_1\mu_1}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x_0}{d}P_{22}.$$

Система уравнений (3) разделяется на две группы независимых уравнений, поскольку переменная l входит в виде множителей $\exp(-i\psi_0 l)$ и $\exp(-i\beta_{mn}z_0 l)$. Первая группа уравнений, содержащих слагаемые, пропорциональные $\exp(-i\psi_0 l)$, для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\begin{aligned}
&f_y^{э}(1-\Delta_{11}\psi)E_y(0)-f_x^{м}\Delta_{12}\psi H_x(0)-f_z^{м}\Delta_{13}\psi H_z(0)=0;\\
&-f_y^{э}\Delta_{21}\psi E_y(0)+f_x^{м}(1-\Delta_{22}\psi)H_x(0)-f_z^{м}\Delta_{23}\psi H_z(0)=0;\\
&-f_y^{э}\Delta_{31}\psi E_y(0)-f_x^{м}\Delta_{32}\psi H_x(0)+f_z^{м}(1-\Delta_{33}\psi)H_z(0)=0,
\end{aligned}\tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
&\psi=1+\frac{i\sin\psi_0}{\cos\psi_0-\cos\beta z_0};\ \Delta_{11}=\frac{gP_{22}}{A};\\
&\Delta_{12}=-\frac{\beta p_\perp}{Ak\varepsilon_1}P_{22};\ \Delta_{13}=-\frac{\pi i p_\parallel}{Adk\varepsilon_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi x_0}{d}P_{22};\\
&\Delta_{21}=-\frac{\beta g}{Ak\mu_1}P_{22};\ \Delta_{22}=\frac{\beta^2 p_\perp}{Ak^2\varepsilon_1\mu_1}P_{22};\\
&\Delta_{23}=\frac{\pi i\beta p_\parallel}{Adk^2\varepsilon_1\mu_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi x_0}{d}P_{22};\\
&\Delta_{31}=\frac{\pi i g}{Adk\mu_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi x_0}{d}P_{22};\ \Delta_{32}=-\frac{\pi i\beta p_\parallel}{Adk^2\varepsilon_1\mu_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi x_0}{d}P_{22};\\
&\Delta_{33}=\frac{\pi^2 p_\parallel}{Ad^2k^2\varepsilon_1\mu_1}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x_0}{d}P_{22}.
\end{aligned}\tag{6}$$

Данная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение, если ее детерминант равняется нулю. Из этого условия после алгебраических преобразований получаем дисперсионное уравнение нагруженного волновода:

$$\cos\psi_0 = \cos\beta z_0 + i\left(gP_{22} + \frac{\beta^2 p_\perp}{k^2\varepsilon_1\mu_1}P_{22} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi^2 p_\parallel}{d^2k^2\varepsilon_1\mu_1}\operatorname{ctg}^2\frac{\pi x_0}{d}P_{22}\right)\sin\psi_0. \qquad (7)$$

Слагаемые, стоящие в скобках $\sim V/dh\lambda_в$, и являются малыми возмущающими величинами. Поэтому, если $\sin\beta z_0 \neq 0$, решение уравнения (7) имеет вид

$$\psi_0 = \beta z_0 + \delta, \text{ где } \delta \ll \beta z_0$$

Из (7) получаем для δ следующее выражение:

$$\delta = -\frac{8\pi k^2\varepsilon_1\mu_1}{dh\beta}\left(g\sin^2\frac{\pi x_0}{d} + \frac{\beta^2 p_\perp}{k^2\varepsilon_1\mu_1}\sin^2\frac{\pi x_0}{d} + \frac{\pi^2 p_\parallel}{d^2k^2\varepsilon_1\mu_1}\cos^2\frac{\pi x_0}{d}\right). \qquad (9)$$

Отсюда следует, что нагрузка волновода периодической цепочкой малых продольно подмагниченных ферритовых сфер приводит к изменению фазовой скорости волны, которое зависит, в частности, от внешнего подмагничивающего поля. Это изменение невелико и по порядку величины равно $V/dh\lambda_в$, однако на больших расстояниях суммарное изменение фазы волны может быть значительно.

Для нахождения амплитуд полного поля служит вторая группа уравнений (3), слагаемые которых пропорциональны функции $\exp(-i\beta z_0 l)$. После сокращения на этот множитель имеем

$$\begin{aligned}
&f_y^э\Delta_{11}E_y(0) + f_x^м\Delta_{12}H_x(0) + f_z^м\Delta_{13}H_z(0) = E_0^y\left[e^{-i(\psi_0-\beta z_0)} - 1\right];\\
&f_y^э\Delta_{21}E_y(0) + f_x^м\Delta_{22}H_x(0) + f_z^м\Delta_{23}H_z(0) = H_0^x\left[e^{-i(\psi_0-\beta z_0)} - 1\right]; \qquad (10)\\
&f_y^э\Delta_{31}E_y(0) + f_x^м\Delta_{32}H_x(0) + f_z^м\Delta_{33}H_z(0) = H_0^z\left[e^{-i(\psi_0-\beta z_0)} - 1\right].
\end{aligned}$$

Эта система является линейно-зависимой, так как компоненты поля связаны соотношениями для однородного волновода Решая ее, получаем

$$E_y(0) = \frac{A}{A-1}\left[e^{-i(\psi_0-\beta z_0)} - 1\right]E_0^y.$$

Разложим экспоненту в ряд и ограничимся первым членом, так как $\delta \ll \beta z_0$:

$$E_y(0) = -i\delta\frac{A}{A-1}E_0^y. \qquad (11)$$

Полное поле в точке $z = lz_0$ найдем, используя теорему Флоке:

$$E_y(lz_0) = -i\delta\frac{A}{A-1}E_0^y e^{-i\psi_0 l} \qquad (12)$$

Рассеянное n-м шариком поле, согласно [1, 3], можно представить как

$$\begin{aligned} E_{\text{расс}}(\boldsymbol{r}) &= \hat{P}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_n)[\hat{g}\hat{A}E + \hat{g}\hat{B}H] - \\ &- ik\mu_1\hat{Q}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_n)[\hat{p}\hat{C}E + \hat{p}\hat{D}H]; \\ H_{\text{расс}}(\boldsymbol{r}) &= \hat{R}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_n)[\hat{p}\hat{C}E + \hat{p}\hat{D}H] + \\ &+ ik\varepsilon_1\hat{S}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_n)[\hat{g}\hat{A}E + \hat{g}\hat{B}H], \end{aligned} \tag{13}$$

где элементы функциональных матриц $\hat{P}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_n) \ldots \hat{S}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_n)$ находятся умножением соответствующих чисел (4) на функцию $\exp[i\beta(z - lz_0)]$, а остальные матрицы остаются теми же. В результате получаем

$$E^y_{\text{расс}} = \frac{A-1}{A} E_y e^{i\beta(z-lz_0)}$$

или

$$E^y_{\text{расс}} = -i\delta E^y_0 e^{-i\psi_0 l} e^{i\beta(z-lz_0)}. \tag{14}$$

Чтобы найти отраженную волну, необходимо просуммировать выражение (14) по всем шарикам

$$E^y_{\text{отр}} = -i\delta E^y_0 \sum_{l=0}^{\infty} e^{i\beta(z-lz_0)} e^{-i\psi_0 l} = \frac{\delta}{2\sin\beta z_0} E^y_0 e^{i\alpha\beta(z+z_0)}.$$

Итак, коэффициент отражения по полю имеет величину порядка δ и сдвиг по фазе, равный βz_0.

Если $\sin\beta z_0 = 0$, то $z_0 = n\lambda_{\text{в}}/2$ и в волноводе возникает режим стоячих волн.

Положив $\alpha = 0$ и $\mu_3 = \mu$, получаем случай нагрузки волновода изотропными сферами. Тогда элементы матрицы рассеяния

$$p_{\perp} = p_{\parallel} = \frac{3V}{4\pi}\frac{\mu - \mu_1}{\mu + 2\mu_1}.$$

Если $\mu = \mu_1$, получаем частный случай, рассмотренный в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Хижняк. Теория волноводов, нагруженных полубесконечной цепочкой однородных рассеивающих тел. Сб. «Радиотехника», вып. 15. Изд-во ХГУ, Харьков, 1970.
2. Н. А. Хижняк. Функция Грина уравнений Максвелла для неоднородных сред. ЖТФ, 28, № 7, 1958.
3. Н. А. Хижняк. Рассеяние электромагнитных волн на малых телах в волноводах. Сб. «Радиотехника», вып. 4. Изд-во ХГУ, Харьков, 1967.