

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ЛБВ-О И ЛОВ-О

Л. А. Поспелов

Харьков

1. Подавляющее число работ современной теоретической электроники СВЧ базируется на укороченных уравнениях Вайнштейна [1] либо эквивалентных им уравнениях Роу [2]. Эти уравнения способны описывать все основные нелинейные эффекты в электронных приборах (исключение составляет эффект расслоения потока, для учета которого необходимо известное обобщение уравнений Вайнштейна [3]).

В силу исключительной важности уравнений типа Вайнштейна и аналогичным им укороченным уравнениям для других ситуаций [3] в литературе разработан целый ряд приближенных методов исследования их решений. Сведения о них можно получить в монографии [4].

Одни из них (метод заданного тока либо заданного поля, либо заданного движения) способны дать аналитическое решение. Однако они, как правило, содержат неконтролируемые приближения. Другие позволяют давать качественно правильное описание, но в ограниченном диапазоне изменения параметров задачи (метод Овчарова и Солнцева, метод идеальных сгустков Филимонова).

Исключительное место занимает хорошо разработанный в математике метод квазилинеаризации, использующий в качестве исходных линейные уравнения и учитывающий нелинейные слабые как малые поправки. Но этим методом не удастся достаточно полно учесть нелинейные эффекты.

Иными словами, в настоящее время существует единственный надежный метод исследования укороченных уравнений типа Вайнштейна, способный дать описание нелинейных эффектов в широком диапазоне параметров СВЧ прибора — метод численного решения на ЭЦВМ.

В этой связи большое значение приобретает корректное упрощение исходных укороченных уравнений, поскольку именно это

зачастую определяет класс исследуемых эффектов и задач. Изложению именно такого приближенного метода посвящено настоящее сообщение.

Работа основывается на следующем соображении. В любом электронном приборе СВЧ нерезонансного типа можно условно выделить два этапа взаимодействия электронного потока с высокочастотным полем. На первом этапе происходит «группировка электронов». На втором — передача мощности «хорошо сгруппированному» потоком высокочастотному полю. Первый этап с контролируемой точностью можно описать квазилинейной теорией. Наибольшую трудность в теории составляет этап эффективной передачи энергии электронов полю, когда сгустки «хорошо сгруппированы» и взаимодействие их с СВЧ полем существенно нелинейное.

Оказывается, что именно в этом состоянии укороченные уравнения Вайнштейна допускают существенное упрощение. Оно основано на применении метода последовательных приближений, в котором в качестве исходного используется приближение идеального сгустка.

2. Для иллюстрации метода рассмотрим простейший случай, когда пространственный заряд не оказывает влияния и сгруппированный поток взаимодействует лишь с единственной волной «холодной» замедляющей системы. Тогда уравнения Вайнштейна будут иметь вид:

$$\frac{dF}{d\zeta} - i\xi F = -\chi_0 I; \quad (1)$$

$$I(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{iu(\zeta, v)} dv; \quad (2)$$

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = \text{Re } F(\zeta) e^{-iu} \left(1 - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^2, \quad (3)$$

где $F = e\varepsilon/\varepsilon^2 m\omega v_0$; ε — амплитуда напряженности поля взаимодействующей волны; $u = \omega t - \frac{\omega z}{v_0}$; $v = \omega t_0$; ω — частота поля; t и z — текущее время и координата, $t_0 = t|_{z=0}$; v_0 — средняя скорость электрона, k_0 — сопротивление связи пучка с замедляющей системой; V_e — напряжение пучка; j_0 — ток пучка; h_0 — постоянная распространения волны в холодной системе; $h_e = \omega/v_0$; v_0 — невозмущенная скорость пучка; $\zeta = \varepsilon h_e z$ — безразмерная координата; ξ — параметр рассинхронизма, определяющийся из соотношения $h_0 = h_e (1 + \varepsilon\xi)$; $F(\zeta)$ — медленно меняющаяся безразмерная амплитуда, связанная с напряженностью поля следующим соотношением:

$$\varepsilon_0(z) = \frac{m\omega v_e}{e} \varepsilon^2 F(\zeta) e^{ih_e z};$$

$$j = 2j_0 I(\zeta) e^{ih_e z}.$$

В идеально сгруппированном сгустке, по определению, величина времени прибытия u электрона не должна зависеть от времени v его влета в пространство взаимодействия ($\zeta = 0$). Если обозначить эту величину как u_0 , то $u_0 = u_0(\zeta)$ и не зависит от v . Для «хорошей группировки» сгусток должен занимать область фаз, значительно меньшую 2π . Поэтому в предположении «хорошей группировки» должно быть

$$v \sim |u(\zeta, v) - u_0(\zeta)| \ll 1. \quad (4)$$

Таким образом, в теории возникает малый параметр v , с помощью которого можно строить решение методом возмущений.

Далее ищем решения искомой системы уравнений (1), (3) в виде

$$u(\zeta, v) = u_0(\zeta) + v u_1(\zeta, v) + v^2 u_2(\zeta, v) + \dots \quad (5)$$

$$F(\zeta) = F_0(\zeta) + v F_1(\zeta) + v^2 F_2(\zeta) + \dots \quad (6)$$

$$I(\zeta) = I_0(\zeta) + v I_1(\zeta) + v^2 I_2(\zeta) + \dots \quad (7)$$

Подставляем выражения (5)—(7) в уравнения (1)—(3) и разлагаем нелинейные члены в ряды Тейлора. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях v , получим рекуррентные системы уравнений.

В исходном приближении

$$F_0' - i\zeta F_0 = \chi_0 I_0;$$

$$I_0 = 2e^{iu_0(\zeta)}; \quad (8)$$

$$-u_0'' = (1 + \varepsilon u_0')^3 \operatorname{Re} F_0(\zeta) e^{-iu_0(\zeta)}.$$

Эта система четырех нелинейных уравнений в обыкновенных производных соответствует приближению идеальных сгустков. Соответствующая ей физическая ситуация детально исследована в работе [5]. Штрих означает дифференцирование по ζ .

Для первого приближения

$$F_1' - i\zeta F_1 = -\chi_0 I_1; \quad (9)$$

$$I_1 = i I_0 \bar{u}_1; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} -\bar{u}_1'' = & 3(1 + \varepsilon u_0')^3 \operatorname{Re} F_0 e^{-iu_0} \bar{u}_1 + \\ & + (1 + \varepsilon u_0')^3 [\operatorname{Re} F_1 e^{-iu_0} - \sin F_0 e^{-iu_0} \bar{u}_1], \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\bar{u}_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dv u_1(\zeta, v). \quad (12)$$

Система (9)—(11) также содержит лишь обыкновенные дифференциальные уравнения для функций переменной ζ . Зависимость от v исключена с помощью процедуры усреднения (12).

Для второго приближения

$$F_2 - i\zeta F_2 = -\chi_0 I_2; \quad (13)$$

$$I_2 = iI_0 \left(\bar{u}_2 + \frac{i}{2} q \right); \quad (14)$$

$$-\bar{u}_2'' = \operatorname{Re} e^{-iu_0} (1 + \varepsilon u_0') \left[F_2 + i\bar{u}_1 F_1 + F_0 \left(i\bar{u}_2 - \frac{q}{2} \right) \right] + \\ + 3\varepsilon \bar{u}_1' \frac{F_1 + i\bar{u}_1 F_0}{1 + \varepsilon u_0'} + 3F_0 \frac{\varepsilon \bar{u}_2' (1 + \varepsilon u_0') + \varepsilon^2 f}{(1 + \varepsilon u_0')^2}. \quad (15)$$

В уравнениях (14) и (15) использованы обозначения

$$q \equiv \bar{u}_1^2, \quad f \equiv \bar{u}_1'^2.$$

Величины f и q находятся из уравнения типа (11) для $u_1(\zeta, v)$ умножением его на величины u_1 и u_1' и последующим усреднением по v . Таким путем получим

$$-\frac{1}{2} f' = 3(1 + \varepsilon u_0')^2 \operatorname{Re} F_0 e^{-iu_0 \varepsilon} q' + (1 + \varepsilon u_0') [\operatorname{Re} F_1 e^{-iu_0 \bar{u}_1'} - \\ - \sin F_0 e^{-iu_0 q'}]; \quad (16)$$

$$\int_a^b f d\zeta - \frac{1}{2} q \Big|_a^b = \int_a^b d\zeta \{ 3(1 + \varepsilon u_0')^2 \operatorname{Re} F_0 e^{-iu_0 \varepsilon} q + \\ + (1 + \varepsilon u_0')^3 [\operatorname{Re} F_1 e^{-iu_0 \bar{u}_1'} - \sin F_0 e^{-iu_0 q}], \quad (17)$$

где a и b — два произвольных значения ζ . Заметим, величина f может быть легко найдена из уравнения (16). После подстановки ее в уравнение (17), получим интегральное уравнение для определения q .

Таким образом, во втором приближении все искомые величины также зависят лишь от единственной переменной ζ . Однако исключить зависимость от начальной фазы удалось только ценой введения вспомогательной функции q .

Далее можно было бы найти и приближения более высокого порядка. При этом число уравнений с ростом номера его будет возрастать в связи с необходимостью исключения зависимости от v , и соответствующие уравнения будут становиться более громоздкими. Однако и без этого видна тенденция и возможности рассматриваемого метода.

3. Из приведенного анализа можно заключить, что процедура последовательных приближений по фазовой ширине ступки полностью исключает интегрирование по начальным фазам. При этом уравнения в каждом приближении имеют вид обыкновенных дифференциальных для функций от одной переменной. Поскольку число уравнений с ростом номера приближения возрастает и уравнения становятся более громоздкими, этот метод может быть приемлем, если достаточно лишь небольшое число приближений.

Это возможно, когда поток остается достаточно хорошо группированным в процессе всего рассматриваемого периода. Тогда решение системы уравнений (8), (17) потребует намного меньше времени счета на ЭЦВМ, чем решение исходной системы (1)—(3). Это понятно из следующих соображений. При решении непосредственно системы (1)—(3) интервал интегрирования $0 \leq v \leq 2\pi$ необходимо разбивать на достаточно большое число участков с тем, чтобы правильно учесть форму сгустка и получить приемлемую точность счета. Опыт показывает, что таких разбиений должно быть не менее двенадцати при точности $\sim 3\%$. Иначе, в этом случае приходится решать систему (1)—(3) двенадцатикратно продублированную. Еще большее число дроблений требуется при решении задач об умножении или преобразовании частоты. В этих случаях объем информации, получаемой при решении задачи, ограничивается возможностями ЭЦВМ, и упрощение исходной системы уравнений приобретает первостепенное значение. Заметим, что учет пространственного заряда приведет к появлению в уравнении движения соответствующих степеней от u , т. е. по-существу не усложнит изложенную процедуру и окончательные уравнения.

Можно ожидать, что приведенный метод позволит получить высокую точность уже небольшим числом приближений. Это следует из таких соображений. Размеры сгустка в эффективно работающих приборах (в режиме, близком к насыщению) всегда значительно меньше периода волны. Во всяком случае можно ожидать, что фазовый размер сгустка меньше $\pi/2$. На этом интервале тригонометрические функции с высокой степенью точности аппроксимируются малым числом членов своего ряда Тейлора. А именно такие разложения и приводились в основном в приведенной выше процедуре.

Основным критерием точности изложенного метода являются результаты численного решения, которому будет посвящена последующая публикация*.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн. Радиотехника и электроника. т. 2, вып. 7, 1957; т. 2, вып. 8, 1957.
2. Д. ж. Е. Роу. Теория нелинейных явлений в приборах СВЧ. Изд-во «Советское радио», 1969.
3. Г. Ф. Филимонов, Ю. Н. Бадлевский. Нелинейные взаимодействия электронных потоков и радиоволн в ЛБВ. Изд-во «Советское радио», 1971.
4. В. Н. Шевчик, Д. И. Трубецков. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. Изд-во «Советское радио», 1970.

* Работа доложена Научной сессии, посвященной Дню связиста. Аннотации и тезисы докладов. М., 1971.