

## ПЕЛЕНГАЦИЯ МНОГОЭЛЕМЕНТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

*Е. В. Чаевский*

При использовании антенн ультракоротких волн направление на излучающий объем обычно устанавливается в результате определения направления потока энергии в точке наблюдения. Однако это направление может не совпадать с направлением на излучатель, т. е. прямая, проведенная из точки наблюдения по направлению приходящего потока энергии, может не пересекаться с излучающим объемом. (Для краткости в дальнейшем соответствующие потоки энергии условно будем называть исходящими не из области источников). Такая неопределенность в ориентации приходящего к наблюдателю потока энергии, как нетрудно показать, является следствием волнового характера процесса. В результате интерференции потоки энергии от различных элементов излучателя складываются не по правилам векторной алгебры и суммарный поток может оказаться вне телесного угла, в котором заключены его составляющие. В литературе этот эффект называют «угловым шумом» (angular scintillation) и теоретическое рассмотрение его велось, начиная с 1953 года [1—3].

В работе используется модель многоэлементного объемного источника [3]. Вопрос о пеленгации простейших излучателей такого типа (круга и полосы со случайно расположенными на них точечными источниками) рассматривался в литературе [1]. Однако не учитывались интенсивности приходящих сигналов и расположение источников предполагалось симметричным относительно наблюдателя. В работе проводится обобщение теории на случай источников с произвольной ориентацией и выясняется зависимость от минимального уровня принимаемых сигналов.

### 1. Общие соотношения

Считаем, что случайные источники в среднем (по реализациям) равномерно распределены в объеме  $V$ , удаленном от наблюдателя на расстояние  $R_0$ , большее по сравнению с линейными размерами области  $V$ . Приемная система реагирует только на потоки энергии, по модулю превосходящие некоторое пороговое значение  $A$ . Предполагается, что происходит правильная пеленгация источника, если поток энергии исходит из области занимаемой источниками и фиксируется приемной системой. В качестве количественной характеристики, описывающей точность пеленгации различных статистических объектов, используется вероятность правильной пеленгации при единичном измерении.

Принимаемые потоки энергии, согласно [3], удобно описывать в декартовой системе координат  $XYZ$ , центр которой совмещен с центром тяжести тела, полученного в результате однородного заполнения объема  $V$ ,

ось  $Z$  проходит через точку наблюдения и ориентация оси  $X$  выбрана из условия

$$\int_V xy dV = 0. \quad (1.1)$$

При таком выборе координатной системы средний поток энергии  $\langle \vec{P} \rangle$  ориентируется вдоль оси  $Z$  (скобками  $\langle \rangle$  обозначаем усреднение по ансамблю случайных источников) и, если описывать поток энергии  $\vec{P}$  с помощью единичного вектора  $\vec{t}$  и безразмерного параметра  $P_0$ , определенных как

$$\vec{t} = \frac{\vec{P}}{|\vec{P}|}, \quad P_0 = \frac{|\vec{P}|}{\langle P_z \rangle},$$

для совместной плотности вероятности величин  $t_x$ ,  $t_y$ ,  $P_0$ , согласно [3], имеем

$$W(t_x, t_y, P_0) = \frac{P_0}{\pi \theta_x \theta_y \mu_x \mu_y} e^{-P_0 \left[ 1 + \frac{t_x^2}{\mu_x^2 \theta_x^2} + \frac{t_y^2}{\mu_y^2 \theta_y^2} \right]}, \quad (1.2)$$

где коэффициенты  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  определяются через безразмерные переменные

$$\lambda_x \equiv 2 \frac{x}{L_x}, \quad \lambda_y \equiv 2 \frac{y}{L_y}, \quad \lambda_z \equiv 2 \frac{z}{L_z} \quad (1.3)$$

равенствами

$$\frac{1}{\mu_x^2} = \frac{V_\lambda}{\int_{V_\lambda} \lambda_x^2 dV_\lambda}, \quad \frac{1}{\mu_y^2} = \frac{V_\lambda}{\int_{V_\lambda} \lambda_y^2 dV_\lambda}. \quad (1.4)$$

Здесь  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  — максимальные линейные размеры области  $V$  в направлении осей  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  соответственно,  $V_\lambda$  — объем излучающей области в переменных  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\lambda_z$  и малые параметры  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  определяются соотношениями

$$\theta_x \equiv \frac{L_x}{2R_0}, \quad \theta_y \equiv \frac{L_y}{2R_0}.$$

Чтобы определить вероятность правильной пеленгации  $Q$ , выделим в плоскости переменных  $t_x$ ,  $t_y$  область  $s(t_x, t_y)$ , которой соответствуют потоки энергии, исходящие из  $V$ . Благодаря малости линейных размеров источника, по сравнению с расстоянием до него, область  $s(t_x, t_y)$  определится, если в формулы

$$t_x = -\frac{x}{R_0}, \quad t_y = -\frac{y}{R_0}$$

подставить  $x$ ,  $y$  из области  $s(x, y)$ , получающейся проектированием  $V$  на плоскость  $xy$ .

Введем параметр  $q$  как

$$q \equiv \frac{A}{\langle P_z \rangle}. \quad (1.5)$$

Тогда по определению  $Q$  — это вероятность совместного обнаружения  $P_0 > q$  и  $t_x, t_y$  из области  $s(t_x, t_y)$ . Следовательно,

$$Q = \int_q^\infty dP_0 \int_{s(t_x, t_y)} dt_x dt_y W(t_x, t_y, P_0). \quad (1.6)$$

Подставляя (1.2) в (1.6) и дважды интегрируя, приходим к следующему результату:

$$Q = e^{-q} \left[ 1 - \frac{1}{2\pi\mu_x\mu_y} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-q u \rho}}{\rho(1+u\rho)} d\varphi \right]. \quad (1.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u &= \lambda^2(\varphi), \\ \rho &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_x^2} + \frac{1}{\mu_y^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu_x^2} - \frac{1}{\mu_y^2} \right) \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (1.8)$$

$\lambda$  — расстояние от начала координат ( $\lambda_x = \lambda_y = 0$ ) до границы области  $s(\lambda_x, \lambda_y)$ , получаемой проектированием  $V_\lambda$  на плоскость переменных  $\lambda_x, \lambda_y$ .

Заметим, что интенсивности потоков для многоэлементных источников распределены по экспоненте и  $e^{-q}$  — вероятность обнаружения потока энергии с интенсивностью большей чем  $A$ . Следовательно, если определить  $\bar{Q}$  как

$$\bar{Q} = 1 - \frac{1}{2\pi\mu_x\mu_y} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-q u \rho}}{\rho(1+u\rho)} d\varphi, \quad (1.9)$$

то, согласно (1.7),  $\bar{Q}$  — вероятность правильной пеленгации в подансамбле реализаций, удовлетворяющих условию  $P \geq A$ .

Формулы (1.7), (1.9) позволяют сделать несколько весьма общих замечаний относительно пеленгации многоэлементных источников.

1. Вероятность правильной пеленгации при фиксированной интенсивности источника инварианта относительно линейных преобразований (без сдвига) его формы вдоль осей  $X, Y, Z$ .

Действительно, как видно из (1.4), (1.7), (1.8), величина  $Q$  зависит не от вида излучающей области в переменных  $x, y, z$ , а от вида ее в переменных  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ . Но, согласно (1.3), при изменении масштабов вдоль осей  $X, Y, Z$  координаты произвольной точки пространства в переменных  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  не меняются.

Как частный вывод из доказанного утверждения следует независимость  $Q$  от линейных размеров источника.

Отмеченные выше свойства функции  $Q$  существенно упрощают анализ конкретных задач. Например, если рассматривается вероятность правильной пеленгации эллипсоида наблюдателем, расположенным на одной из его осей симметрии, не делая никаких выкладок, можно заключить, что размеры осей эллипсоида на величину  $Q$  не влияют. Действительно, линейными преобразованиями двух координатных осей эллипсоид преобразуется в шар, а радиус шара на величину  $Q$  не влияет, так как  $Q$  не зависит от линейных размеров излучателя.

2. Чем больше случайная интенсивность принятого потока энергии, тем больше вероятность правильной пеленгации.

Действительно, если принят сигнал интенсивности  $q$ , то можно утверждать, что имеется реализация из подансамбля, удовлетворяющего

условию  $q' \geq q$ . Но, как видно, из (1.9), вероятность правильной пеленгации в таком подансамбле стремится к единице с ростом  $q$ . Приближение к предельному значению монотонное, так как

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial q} > 0$$

вследствие положительной определенности функций  $u$ ,  $\rho$ .

3. Чем выше пороговый уровень интенсивности  $q$ , начиная с которого приемная система фиксирует сигналы, тем меньше вероятность правильной пеленгации. Максимальная вероятность правильной пеленгации достигается при  $q = 0$ , когда принимаются все потоки энергии.

Для доказательства продифференцируем (1.7) по  $q$ . Получим

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = e^{-q} \left[ \frac{1}{2\pi\mu_x\mu_y} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-qu\rho}}{\rho} d\varphi - 1 \right]. \quad (1.10)$$

Непосредственно выполняя интегрирование, можно показать, что

$$\frac{1}{2\pi\mu_x\mu_y} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\rho} = 1,$$

и, поскольку функции  $u$ ,  $\rho$  положительно определены, первый член в квадратных скобках формулы (1.10) меньше или равен единице. Таким образом,

$$\frac{\partial Q}{\partial q} \leq 0,$$

что и требовалось доказать.

При  $q = 0$  выражение (1.10) обращается в нуль, т. е. при малых пороговых уровнях  $q$  отклонения  $Q$  от максимального значения — величины второго порядка малости.

Уменьшение  $Q$  с ростом  $q$  не противоречит отмечавшемуся ранее увеличению вероятности правильной пеленгации для потоков большой интенсивности. Действительно, хотя с увеличением уровня ограничения принимаемые антенной сигналы чаще исходят из источника, одновременно увеличивается и число случаев, когда антенна вообще «не видит» источника. Монотонное уменьшение  $Q$  обозначает, что второй эффект всегда сильнее первого. При достаточно больших  $q$  имеем

$$\bar{Q} \rightarrow 1, \quad Q \rightarrow e^{-q},$$

т. е. вероятность правильной пеленгации стремится к вероятности обнаружения сигнала.

## 2. Пеленгация многоэлементных источников вдоль осей симметрии

По общим формулам, полученным в предыдущем параграфе, рассчитаем вероятность правильной пеленгации многоэлементных источников простой геометрической формы (эллипсоид, цилиндр, параллелепипед). В этом разделе ограничимся случаем, когда наблюдатель находится на одной из осей симметрии источника.

Если многоэлементный источник — тело вращения, а наблюдатель находится на оси вращения, область  $s(\lambda_x, \lambda_y)$  является кругом единичного радиуса

$$u = 1, \quad \mu_x = \mu_y = \mu, \quad \rho = \frac{1}{\mu^2}, \quad (2.1)$$

подынтегральная функция в (1.7) от  $\varphi$  не зависит и для  $Q(q)$  имеем

$$Q(q) = e^{-q} \left[ 1 - \frac{e^{-\frac{q}{\mu^2}}}{1 + \mu^{-2}} \right]. \quad (2.2)$$

Предполагая, что тело вращения — эллипсоид с подобной полостью внутри, из (1.4) для  $\mu^{-2}$  находим

$$\frac{1}{\mu^2} = 5 \frac{1 - \beta^3}{1 - \beta^6}, \quad (2.3)$$

где  $\beta$  — отношение линейных размеров внутренней полости к внешним размерам излучателя. В частности, когда источники заполняют весь объем,  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\mu^{-2} \rightarrow 5$ , когда источники распределены в узком слое вблизи поверхности эллипсоида  $\beta \rightarrow 1$ ,  $\mu^{-2} \rightarrow 3$ .

Предполагая, что тело вращения — сплошной цилиндр, получим  $\mu^{-2} = 6$ .

Если область  $s(\lambda_x, \lambda_y)$  имеет вид квадрата со сторонами, параллельными координатным осям, интеграл в (1.7) выражается через элементарные функции лишь при  $q = 0$ . В этом случае

$$Q(0) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_x^2}} \operatorname{arctg} \frac{\mu_x}{\mu_y \sqrt{1 + \mu_x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_y^2}} \operatorname{arctg} \frac{\mu_y}{\mu_x \sqrt{1 + \mu_y^2}} \right]. \quad (2.4)$$

Формула (2.4) позволяет рассчитать максимальные значения вероятности правильной пеленгации для цилиндра ориентированного боком

Таблица. Значения  $Q$  при  $q = 0$  для симметрично ориентированных излучателей.

	Вид излучателя	$s(\lambda_x, \lambda_y)$	$Q(0)\%$
1	Полый параллелепипед	□	68,98
2	Полый цилиндр	□	74,75
3	Полый эллипсоид	○	75,00
4	Сплошной параллелепипед	□	78,70
5	Сплошной цилиндр	○	80,00
6	Сплошной цилиндр	□	80,83
7	Сплошной эллипсоид	○	83,33

и параллелепипеда. Предполагая для конкретности, что ось  $X$  ориентирована вдоль образующей цилиндра, согласно (1.4), имеем

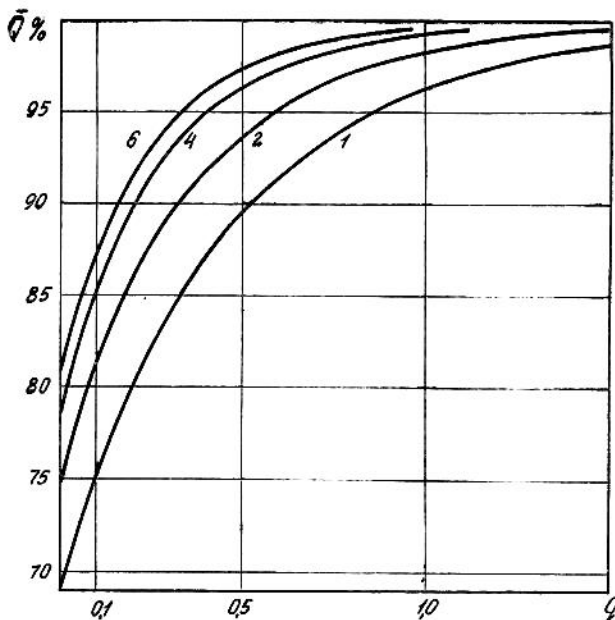


Рис. 1. Зависимость  $\bar{Q}$  от  $q$  для симметрично ориентированных излучателей.

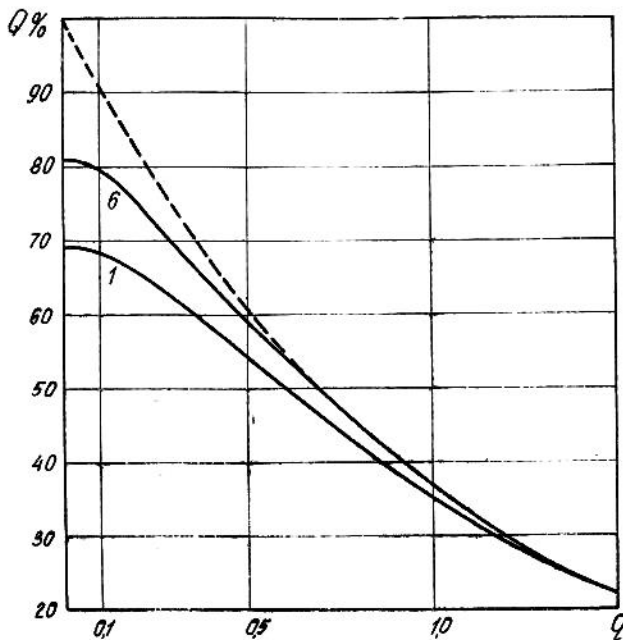


Рис. 2. Зависимость  $Q$  от  $q$  для симметрично ориентированных излучателей.

$$\frac{1}{\mu_x^2} = 3, \quad \frac{1}{\mu_y^2} = 4(1 + \beta^2), \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{\mu_x^2} = \frac{1}{\mu_y^2} = 3 \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta^6}. \quad (2.6)$$

В формулах (2.5), (2.6), как и в (2.3), параметр  $\beta$  обозначает, во сколько раз внутренняя подобная полость меньше всего излучающего объема по линейным размерам.

Числа, которые получаются из формул (2.2) — (2.6) для максимальных значений  $Q$ , приведены в таблице в порядке возрастания.

Для четырех излучателей, у которых область имеет вид квадрата, функции  $\bar{Q}(q)$  рассчитывались численным интегрированием по формулам (1.7), (2.5), (2.6). Соответствующие кривые приведены на рис. 1. Номера около кривых обозначают номера излучателей по таблице. Как видно из рисунка, кривые не пересекаются, т. е. расположение излучателей в порядке возрастания  $Q(0)$ , приведенное в таблице, сохраняется и для  $q \neq 0$ .

В качестве иллюстрации общей теории по графикам функций  $\bar{Q}(q)$ , приведенным на рис. 1, были рассчитаны две кривые  $Q(q)$ . Результаты расчетов приведены на рис. 2. Обозначения кривых те же, пункти-

ром выделена кривая  $\exp(-q)$ . Как видно из рис. 2, в полном соответствии с общей теорией, функции  $Q(q)$  монотонно убывают, производная  $\frac{\partial}{\partial q} Q(q)$  обращается в нуль при  $q = 0$ .

### 3. Пеленгация при произвольной ориентации источников

В этом параграфе на примере трех излучателей (эллипсоид, сплошной параллелепипед, сплошной цилиндр) рассмотрим влияние ориентации многоэлементного источника на вероятность правильной пеленгации.

Эллипсоид оказывается в некотором смысле особым излучателем. Можно показать, что вероятность правильной пеленгации эллипсоида с подобной полостью внутри не зависит от его ориентации относительно наблюдателя. Таким образом, при любых положениях излучающего эллипсоида в пространстве функция  $Q(q)$  для него определяется формулами (2.2), (2.3).

При рассмотрении излучающего параллелепипеда будем предполагать, что наблюдатель находится в плоскости двух его осей симметрии. Тогда область  $s(\lambda_x, \lambda_y)$  — квадрат, и повороты излучателя в пространстве учитываются лишь посредством коэффициентов  $\mu_x, \mu_y$ .

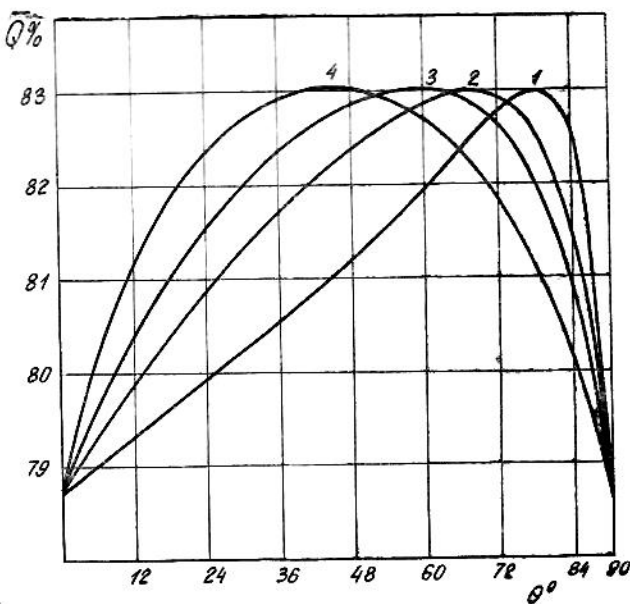


Рис. 3. Зависимость  $\bar{Q}$  от ориентации сплошного параллелепипеда при  $q = 0$  и  $\xi = 0,2$  (кривая 1),  $\xi = 0,4$  (2),  $\xi = 0,6$  (3),  $\xi = 1$  (4).

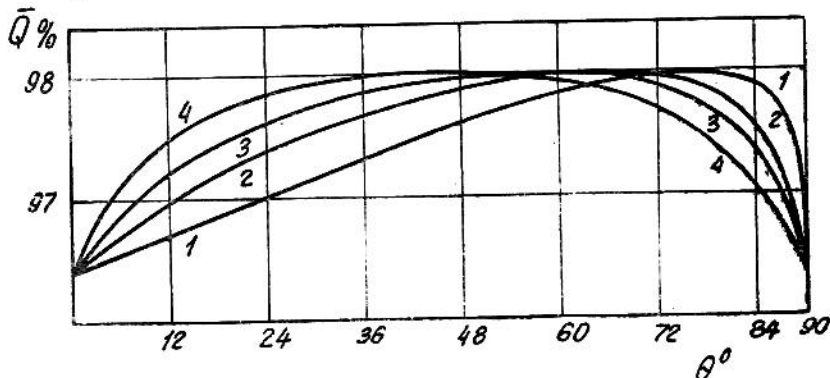


Рис. 4. Зависимость  $\bar{Q}$  от ориентации сплошного параллелепипеда при  $q = 0,5$  и  $\xi = 0,2$  (кривая 1),  $\xi = 0,4$  (2),  $\xi = 0,6$  (3),  $\xi = 1$  (4).

Вычисление коэффициентов  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  удобно проводить, переходя к системе координат, ориентированной вдоль осей симметрии. В результате элементарных выкладок получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\mu_y^2} &= 3 \\ \frac{1}{\mu_x^2} &= 3 \frac{1 + \xi^2 + 2\xi |\sin 2\theta| + (1 - \xi^2) \cos 2\theta}{1 + \xi^2 + (1 - \xi^2) \cos 2\theta} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Параметры  $\xi$ ,  $\theta$ , определяющие геометрию задачи, введены здесь следующим образом: когда  $\theta = 0$ , координатные оси совпадают с осями

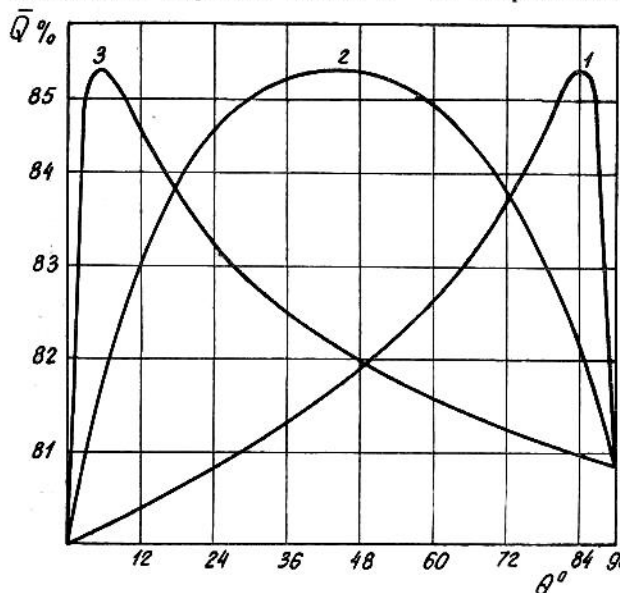


Рис. 5. Зависимость  $\bar{Q}$  от ориентации сплошного цилиндра при  $q = 0$  и  $\xi = 0,1$  (кривая 1),  $\xi = 1$  (2),  $\xi = 10$  (3).

симметрии параллелепипеда (наблюдатель находится на оси  $Z$ ),  $\xi$  — отношение  $L_z$  к  $L_x$ ; угол  $\theta$  описывает поворот параллелепипеда около оси  $Y$ . Очевидно, если  $\theta$  меняется в интервале  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , для  $\xi$  можно ограничиться интервалом  $[0, 1]$ .

Подставляя  $\mu_x$ ,  $\mu_y$ , из (3.1) в (1.9), (2.4), получаем зависимость  $\bar{Q}$  от  $\theta$  при фиксированных  $q$ ,  $\xi$ . На рисунках 3, 4 приведено несколько кривых такого типа. Как видно из рисунков, характерной особенностью является наличие постоянного по величине максимума. Можно показать,

что максимум функции  $\bar{Q}$  достигается, когда наблюдатель оказывается на продолжении диагонали прямоугольника, полученного проектированием излучающего объема на плоскость  $XZ$ . Этому максимуму функции  $\bar{Q}$  соответствует максимальное значение величины  $\mu_x^{-2}$ , равное 6 (независимо от  $\xi$ ).

С ростом  $q$  пределы изменения функции  $\bar{Q}$ , как видно из рисунков 3, 4, быстро уменьшаются. Это обстоятельство является следствием, отмеченного в параграфе 1, весьма общего свойства функции  $\bar{Q}$ : с ростом  $q$  величина  $\bar{Q}$  стремится к единице, независимо от формы и ориентации излучателя.

В двух предыдущих примерах форма области  $s(\lambda_x, \lambda_y)$  не менялась при изменении ориентации излучающей области. Задача о пеленгации произвольно ориентированного цилиндрического источника является задачей более общего типа (форма области  $s(\lambda_x, \lambda_y)$  здесь непрерывно меняется от квадрата до круга). Однако непосредственные расчеты функции  $\bar{Q}$  для этого случая показывают, что качественных различий по сравнению



с предыдущим примером нет. Поэтому, опуская вычисления, приводим лишь два иллюстративных графика (рис. 5, 6). Обозначения приняты следующие:  $\theta$  — угол между осью  $Z$  и осью цилиндра,  $\xi$  — отношение высоты цилиндра к диаметру.

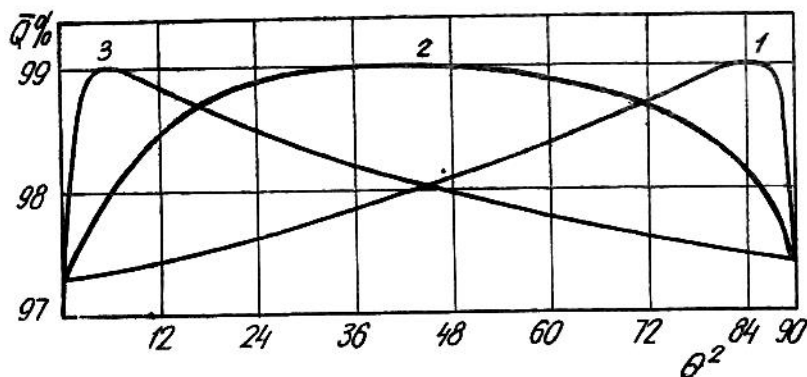


Рис. 6. Зависимость  $\bar{Q}$  от ориентации сплошного цилиндра при  $q = 0,5$  и  $\xi = 0,1$  (кривая 1),  $\xi = 1$  (2),  $\xi = 10$  (3).

В заключение статьи автор выражает глубокую благодарность Ф. С. Санину за обсуждения задачи, во многом способствовавшие выполнению работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Delano. A theory of target glint or angular scintillation in radar tracking, Proc. IRE, 1953, 41, 1778.
2. D. D. Howard. Radar target angular scintillation in tracking and guidance systems based on echo signal phase front distortion, Proc. Nat. Electr. Conf., 1959, 15, 840.
3. Е. В. Чаевский. Распределение потоков энергии, создаваемых системой случайных монохроматических источников. «Радиотехника и электроника», 1966, № 11, стр. 1927.