СТАТИСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЕ

Д. Б. Канарейкин, В. А. Потехин

В радиолокации и радиосвязи может иметь место рассеяние электромагнитных волн случайной совокупностью рассеивателей. При этом параметры рассеянной волны оказываются случайными величинами, статистические характеристики которых определяются свойствами рассеивателей.

Настоящая работа посвящена анализу таких параметров случайной совокупности рассеивателей, которые связаны линейной зависимостью с основными статистическими параметрами рассеянной волны. Рассмотрение проводится таким образом, что характеристики рассеянной волны могут быть определены для произвольной поляризации облучения.

По аналогии с понятием матрицы рассеяния в статическом случае [1] совокупность статистических параметров, характеризующих свойства рассеивателей для двух ортогональных поляризаций облучающей волны, назовем статистической матрицей рассеяния. Для определенности рассмотрим радиолокационный случай, когда случайная совокупность рассеивателей представляет собой флюктуирующую радиолокационную цель, а статистическая матрица рассеяния по принципу взаимности симметрична.

Пусть некоторой флюктуирующей цели соответствует в том или ином поляризационном базисе [2] статистическая матрица рассеяния

$$\dot{L} = \begin{pmatrix} \dot{L}_{11} & \dot{L}_{12} \\ \dot{L}_{12} & \dot{L}_{22} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

элементы которой $\dot{L}_{pq} = L_{pq} e^{j\varphi_{pq}}$ $(p,\ q = 1,\ 2)$ суть комплексные случайные величины. Матрица $\dot{L}$ следующим образом определяет связь между облучающей и рассеянной волнами:

$$\dot{E}_s = \dot{L}\dot{E}_i, \tag{2}$$

где $\dot{E}_s = \begin{pmatrix} \dot{E}_{1s} \\ \dot{E}_{2s} \end{pmatrix}$ и $\dot{E}_i = \begin{pmatrix} \dot{E}_{1i} \\ \dot{E}_{2i} \end{pmatrix}$ — двухкомпонентные комплексные векторы-столбцы рассеянной и облучающей волн соответственно.

В общем случае элементы L_{pq} имеют некоторые средние значения, соответствующие стабильной (регулярной) составляющей отраженного сигнала, тогда как отклонения от этого среднего значения обусловливают случайную (флюктуирующую) составляющую. Из формулы (1) следует, что в каждый фиксированный момент времени статистическая матрица рассеяния образуется совокупностью трех комплексных или шести вещественных случайных величин. Выберем в качестве последних модули и аргументы элементов $\dot{L}_{pq}$ и предположим, что существует дифференциальный закон распределения вероятностей

$$W(\dot{L}) = W_6(L_{11}, L_{12}, L_{22}, \eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{22}), \tag{3}$$

интегрируемый в области существования переменных L_{pq} и η_{pq}. Не высказывая каких-либо предположений о характере закона $W(\dot{L})$, запишем выражения для нахождения его числовых характеристик.

Обозначим среднее значение матрицы $\dot{L}$

$$m\dot{L} = \begin{pmatrix} \dot{m}_{11} & \dot{m}_{12} \\ \dot{m}_{12} & \dot{m}_{22} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где

$$\dot{m}_{pq} = \mathrm{Re}\{\dot{m}_{pq}\} + j\mathrm{Jm}\{m_{pq}\} \quad (p,\ q = 1,\ 2).$$

Элементы матрицы (4) могут быть найдены при известном законе распределения (3) по формулам

$$\dot{m}_{pq} = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2n\pi} W_2(L_{pq}, \eta_{pq}) L_{pq} \cos \eta_{pq}\, dL_{pq}\, d\eta_{pq} + $$
$$+ j \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2n\pi} W_2(L_{pq}, \eta_{pq}) L_{pq} \sin \eta_{pq}\, dL_{pq}\, d\eta_{pq}. \tag{5}$$

Двухмерные законы распределения $W_2(L_{pq}, \eta_{pq})$ получены интегрированием закона (3) по четырем остальным элементам. Матрица $m\dot{L}$ характеризует некоторые средние параметры рассеивателей.

Рассмотрим теперь матрицу $\dot{M}$ моментов второго порядка элементов статистической матрицы $\dot{L}$, которая описывает поляризационные свойства совокупности рассеивателей в целом, с учетом регулярной и флюктуирующей составляющих рассеянной волны.

Образуется матрица $\dot{M}$ с помощью вспомогательной матрицы

$$\dot{\Lambda} = \begin{pmatrix} \dot{L}_{11} & 0 & 0 \\ \dot{L}_{12} & 0 & 0 \\ \dot{L}_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

следующим образом:

$$\dot{M} = M[\dot{\Lambda}\Lambda^t], \tag{7}$$

где Λ^t — матрица, эрмитовски сопряженная с матрицей $\dot{\Lambda}$.

Раскрывая выражение (7), получим

$$\dot{M} = M \begin{pmatrix} \dot{L}_{11}\dot{L}_{11}^* & \dot{L}_{11}\dot{L}_{12}^* & \dot{L}_{11}\dot{L}_{22}^* \\ \dot{L}_{12}\dot{L}_{11}^* & \dot{L}_{12}\dot{L}_{12}^* & \dot{L}_{12}\dot{L}_{22}^* \\ \dot{L}_{22}\dot{L}_{11}^* & \dot{L}_{22}\dot{L}_{12}^* & \dot{L}_{22}\dot{L}_{22}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11}^{11} & \dot{M}_{11}^{12} & \dot{M}_{11}^{22} \\ \dot{M}_{12}^{11} & M_{12}^{12} & \dot{M}_{12}^{22} \\ \dot{M}_{22}^{11} & \dot{M}_{22}^{12} & M_{22}^{22} \end{pmatrix} \tag{8}$$

(* — знак взятия комплексно-сопряженной величины).

Каждый из девяти моментов второго порядка $\dot{M}_{mn}^{pq}$ при известном законе распределения $W(\dot{L})$ определяется выражением вида

$$\dot{M}_{mn}^{pq} = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{2n\pi} \int\limits_0^{2n\pi} W_4(L_{mn}, L_{pq}, \eta_{mn}, \eta_{pq}) \times$$
$$\times L_{mn} L_{pq} e^{j\eta_{mn}} e^{-j\eta_{pq}}\, dL_{mn}\, dL_{pq}\, d\eta_{mn}\, d\eta_{pq}, \tag{9}$$

где $m, n, p, q = 1, 2$, а четырехмерные законы $W_4(L_{mn}, L_{pq}, \eta_{mn}, \eta_{pq})$ получены интегрированием закона (3) по двум остальным элементам.

При $pq \neq mn$ будем иметь комплексные смешанные моменты второго порядка

$$M_{mn}^{pq} = \mathrm{Re}\{\dot{M}_{mn}^{pq}\} + j\mathrm{Jm}\{\dot{M}_{mn}^{pq}\}, \tag{10}$$

а при $pq = mn$ — вещественные начальные моменты второго порядка элементов статистической матрицы рассеяния $\dot{L}$. Заметим, что матрица $\dot{M}$ является эрмитовской матрицей.

На основании соотношений (4) и (8) можно утверждать, что матрица $\dot{L}$ может быть охарактеризована по ансамблю тремя вещественными начальными моментами второго порядка M_{mn}^{mn}, тремя комплексными смешанными моментами второго порядка $\dot{M}_{mn}^{pq}$ и тремя комплексными средними $\dot{m}_{pq}$. Следовательно, описание статистической матрицы рассеяния с помощью ее моментов порядка не выше второго требует задания пятнадцати вещественных величин. В некоторых случаях такое описание может оказаться исчерпывающим. Например, для нормально распределенных элементов $\dot{L}_{mn}$ статистической матрицы рассеяния задание матриц (4) и (8) вполне определяет закон распределения вероятностей (3).

Перейдем теперь к рассмотрению выражений, связывающих элементы матриц $m\dot{L}$ и $\dot{M}$ со статистическими параметрами компонент рассеянной волны. Воспользовавшись развернутой записью выражения (2) с учетом сдвига фаз δ между компонентами облучающей волны

$$\begin{aligned} \dot{E}_{1s} &= L_{11}E_{1i} + \dot{L}_{12}E_{2i}e^{j\delta}; \\ \dot{E}_{2s} &= \dot{L}_{12}E_{1i} + \dot{L}_{22}E_{2i}e^{j\delta}, \end{aligned} \tag{11}$$

найдем среднее значение матрицы-столбца E_s

$$m\dot{E}_s = \begin{pmatrix} mE_{1s} \\ m\dot{E}_{2s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\,\mathrm{Re}\{\dot{E}_{1s}\} + jm\,\mathrm{Im}\{\dot{E}_{1s}\} \\ m\,\mathrm{Re}\{\dot{E}_{2s}\} + jm\,\mathrm{Im}\{\dot{E}_{2s}\}. \end{pmatrix} \tag{12}$$

Среднее значение каждой из ортогонально поляризованных компонент рассеянной волны определяется элементами матрицы $m\dot{L}$ и параметрами облучающей волны

$$\begin{aligned} m\dot{E}_{1s} = {} & [E_{1i}\mathrm{Re}\{\dot{m}_{11}\} + E_{2i}(\cos\delta\,\mathrm{Re}\{\dot{m}_{12}\} - \sin\delta\,\mathrm{Im}\{\dot{m}_{12}\})] + \\ & + j[E_{1i}\,\mathrm{Im}\{\dot{m}_{11}\} + E_{2i}(\sin\delta\,\mathrm{Re}\{\dot{m}_{12}\} + \cos\delta\cdot\mathrm{Im}\{\dot{m}_{12}\})]; \end{aligned} \tag{13а}$$

$$\begin{aligned} m\dot{E}_{2s} = {} & [E_{1s}\,\mathrm{Re}\{\dot{m}_{12}\} + E_{2i}(\cos\delta\,\mathrm{Re}\{\dot{m}_{22}\} - \sin\delta\,\mathrm{Im}\{\dot{m}_{22}\})] + \\ & + j[E_{1s}\,\mathrm{Im}\{\dot{m}_{12}\} + E_{2i}(\sin\delta\,\mathrm{Re}\{\dot{m}_{22}\} + \cos\delta\,\mathrm{Im}\{\dot{m}_{22}\})]. \end{aligned} \tag{13б}$$

В матричном виде формулы (13а) и (13б) запишем следующим образом:

$$m\dot{E}_s = m\dot{L}\dot{E}_i. \tag{14}$$

Вторые начальные моменты ортогональных компонент рассеянной волны могут быть представлены как функции матрицы $\dot{M}$ и параметров облучающей волны. Для этого образуем вспомогательную матрицу

$$\dot{\Sigma} = \begin{pmatrix} \dot{E}_{1s} & 0 \\ \dot{E}_{2s} & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

и найдем матрицу вторых моментов рассеянной волны Ψ аналогично формуле (7)

$$\Psi = M[\dot{\Sigma}\dot{\Sigma}^{+}] = M\begin{pmatrix} \dot{E}_{1s}\dot{E}_{1s}^{*} & \dot{E}_{1s}\dot{E}_{2s}^{*} \\ \dot{E}_{2s}\dot{E}_{1s}^{*} & \dot{E}_{2s}\dot{E}_{2s}^{*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1^1 & \dot{M}_1^2 \\ \dot{M}_2^1 & M_2^2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Матрица Ψ так же, как и матрица $\dot{M}$, определяемая формулой (8), является эрмитовской, поскольку ее диагональные элементы вещественны, а $\dot{M}_1^2 = (\dot{M}_2^1)^*$. Раскрывая формулу (16) с учетом (8) и (11), получаем в явном виде зависимость вторых моментов компонент рассеянной волны от элементов матрицы $\dot{M}$ и поляризации облучения

$$\begin{aligned} M_1^1 &= M[\dot{E}_{1s}\dot{E}_{1s}^{*}] = M[\dot{L}_{11}\dot{L}_{11}^{*}E_{1i}^2 + \dot{L}_{11}\dot{L}_{12}^{*}E_{1i}E_{2i}e^{-j\delta} + \\ &\quad + \dot{L}_{11}^{*}\dot{L}_{12}E_{1i}E_{2i}e^{j\delta} + \dot{L}_{12}\dot{L}_{12}^{*}E_{2i}^2] = \\ &= M_{11}^{11}E_{1i}^2 + \dot{M}_{11}^{12}E_{1i}E_{2i}e^{-j\delta} + \dot{M}_{12}^{11}E_{1i}E_{2i}e^{j\delta} + M_{12}^{12}E_{2i}^2 = \\ &= M_{11}^{11}E_{1i}^2 + 2(\cos\delta\,\mathrm{Re}\{\dot{M}_{11}^{12}\} + \sin\delta\,\mathrm{Im}\{\dot{M}_{11}^{12}\}\,E_{1i}E_{2i} + \\ &\quad + M_{12}^{12}E_{2i}^2; \end{aligned} \tag{17а}$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_1^2 &= M[\dot{E}_{1s}\dot{E}_{2s}^{*}] = M[\dot{L}_{11}\dot{L}_{12}^{*}E_{1i}^2 + \dot{L}_{11}\dot{L}_{22}^{*}E_{1i}E_{2i}e^{-j\delta} + \\ &\quad + \dot{L}_{12}\dot{L}_{12}^{*}E_{1i}E_{2i}e^{j\delta} + \dot{L}_{12}\dot{L}_{22}^{*}E_{2i}^2] = \\ &= \dot{M}_{11}^{12}E_{1i}^2 + \dot{M}_{11}^{22}E_{1i}E_{2i}e^{-j\delta} + M_{12}^{12}E_{1i}E_{2i}e^{j\delta} + \dot{M}_{12}^{22}E_{2i}^2; \end{aligned} \tag{17б}$$

$$\begin{aligned} \dot{M}_2^1 &= M[\dot{E}_{2s}\dot{E}_{1s}^{*}] = M[\dot{L}_{12}\dot{L}_{11}^{*}E_{1i}^2 + \dot{L}_{12}\dot{L}_{12}^{*}E_{1i}E_{2i}e^{-j\delta} + \\ &\quad + \dot{L}_{22}\dot{L}_{11}^{*}E_{1i}E_{2i}e^{j\delta} + \dot{L}_{22}\dot{L}_{12}^{*}E_{2i}^2] = \\ &= \dot{M}_{12}^{11}E_{1i}^2 + M_{12}^{12}E_{1i}E_{2i}e^{-j\delta} + \dot{M}_{22}^{11}E_{1i}E_{2i}e^{j\delta} + \\ &\quad + \dot{M}_{22}^{12}E_{2i}^2 = (\dot{M}_1^2)^*; \end{aligned} \tag{17в}$$

$$\begin{aligned} M_2^2 &= M[\dot{E}_{2s}\dot{E}_{2s}^{*}] = M[\dot{L}_{12}\dot{L}_{12}^{*}E_{1i}^2 + \dot{L}_{12}L_{22}^{*}E_{1i}E_{2i}e^{-j\delta} + \\ &\quad + \dot{L}_{22}\dot{L}_{12}^{*}E_{1i}E_{2i}e^{j\delta} + \dot{L}_{22}\dot{L}_{22}^{*}E_{2i}^2] = \\ &= M_{12}^{12}E_{1i}^2 + \dot{M}_{12}^{22}E_{1i}E_{2i}e^{-j\delta} + \dot{M}_{22}^{12}E_{1i}E_{2i}e^{j\delta} + M_{22}^{22}E_{2i}^2 = \\ &= M_{12}^{12}E_{1i}^2 + 2(\cos\delta\,\mathrm{Re}\{\dot{M}_{12}^{22}\} + \sin\delta\,\mathrm{Im}\{\dot{M}_{12}^{22}\}) \times E_{1i}E_{2i} + M_{22}^{22}E_{2i}^2. \end{aligned} \tag{17г}$$

Соотношения (14) и (16) являются основополагающими при рассмотрении различных методов измерения статистической матрицы рассеяния $\dot{L}$. Под измерением матрицы $\dot{L}$ будем понимать нахождение параметров $\dot{m}_{pq}$ и $\dot{M}_{mn}^{pq}$ по непосредственно измеряемым величинам $m\dot{E}_s$ и $\dot{M}_p^q$.

Различные методы измерения отличаются друг от друга числом используемых поляризаций облучения и числом измеряемых параметров рассеянной волны. Формулы (14) и (16) позволяют для каждого метода найти минимальное число различных поляризаций облучающей волны, необходимое для полного определения матриц $m\dot{L}$ и $\dot{M}$.

Следует иметь в виду, что расчет комплексных средних значений $\dot{m}_{pq}$ непосредственно по формулам (13) или (14) требует знания величин $m\dot{E}_{1s}$ и $m\dot{E}_{2s}$ с точностью до фазы. Необходимые измерения могут быть выполнены либо с помощью когерентной аппаратуры, либо путем использования большего числа различных поляризаций облучающей волны в сочетании с измерением на приемной стороне только средних значений амплитуд компонент.

Минимальное число различных поляризаций облучения, равное двум, соответствует предположениям о том, что, во-первых, используются когерентные методы приема, и, во-вторых, приемная антенна имеет два идеально развязанных приемных тракта для ортогонально поляризованных компонент. Наиболее удобно использовать для облучения те же ортогональные поляризации, что и на приемной стороне. В этом случае измеряемые параметры разделяются, и для каждой поляризации облучающей волны на приемной стороне может быть определена своя группа параметров матрицы $\dot{L}$. Полное описание статистической матрицы рассеяния посредством моментов порядка не выше второго требует одновременного измерения восьми параметров рассеянной волны для каждой из двух поляризаций облучения.

Другие методы измерения статистической матрицы рассеяния могут рассматриваться на основе формул (14) и (16), как обобщение на случай флюктуирующей цели методов, изложенных в работе [3] применительно к статической матрице.

В целом предлагаемые методы описания и измерения статистических свойств случайной совокупности рассеивателей в фиксированный момент времени представляются достаточно полными для решения ряда практических задач, таких, например, как увеличение или уменьшение интенсивности отражений, распознавание различных совокупностей рассеивателей и т. п.

Авторы выражают глубокую признательность С. Г. Зубковичу за внимание к работе и ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Р. Менцер. Диффракция и рассеяние радиоволн. Изд-во «Сов. радио», М., 1958.

2. C. D. Graves. Radar Polarization Power Scattering Matrix. Proc. IRE, 1956, v. 44, № 2, p. 248.

3. I. R. Huynen. Measurement of the Target Scattering Matrix. Proc. IEEE, 1965, v. 53, № 8, p. 936.