# ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИГНАЛОВ

*В. В. Мотлохов*

## 1. Постановка задачи

На рис. 1 изображена рассматриваемая система связи, состоящая из источника сигнала (цели) некоторой протяженности $m(z)$ на фоне шума (помехи) $n(z)$, пространства и приемной сканирующей антенны $A$ с диаграммой направленности по полю $h(z)$.

Пространственный сигнал представляет собой суммарное распределение напряженности эллиптически поляризованного электрического поля цели и помехи

$$f(z) = m(z) + n(z), \qquad (1)$$

где $z = \sin\theta$ — угловая координата для дальней зоны антенны;

$f(z)$, $m(z)$, $n(z)$ — комплексные векторные функции пространственной координаты $z$.

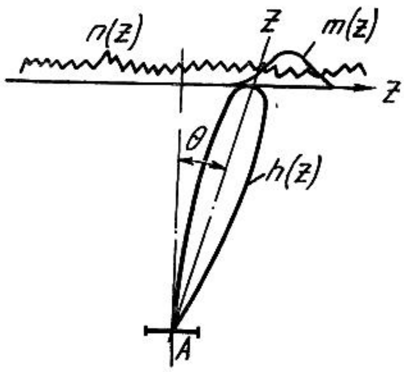


Рис. 1.

Определяя состояние поляризации в виде двух линейно поляризованных несинфазных ортогональных компонент поля, предположим, что составляющие напряженности электрического поля помехи распределены по нормальному закону и выражаются случайными реализациями по пространству с известными корреляционными функциями, зависящими от разности координат.

Ортогональные составляющие поля сигнала являются известными функциями пространственной координаты $z$

$$m_x(z) = m_{0x}(z - z_0),$$
$$m_y(z) = m_{0y}(z - z_0), \qquad (2)$$

где $z_0$ — неизвестная (случайная) координата появления цели;
$m_0(z)$ — детерминированная функция.

Решение задачи оптимальной фильтрации заключается в синтезе такой эллиптически поляризованной приемной антенны, отношение сигнал/шум на выходе которой будет максимальным, а дисперсия ошибки пеленгации цели (2) в присутствии шумов — минимальной.

## 2. Пространственный сигнал на выходе эллиптически поляризованной антенны

Эллиптически поляризованный пространственный сигнал в плоскости цели можно представить в виде

$$\bar{f}(z) = \bar{p}_x^0 f_x(z) + \bar{p}_y^0 f_y(z), \tag{3}$$

где $\bar{p}_x^0$, $\bar{p}_y^0$ — ортовая система координат в точке дальней зоны, определяющая компоненты поля, которые при приеме совпадают с осями $ox$ и $oy$ системы координат в раскрыве антенны

$$f_x(z) = m_x(z) + n_x(z), \tag{4}$$
$$f_y(z) = m_y(z) + n_y(z).$$

Представляя эллиптически поляризованную антенну в виде двух совмещенных эквивалентных линейных ортогонально поляризованных антенн, суммарный сигнал на выходе антенны можно записать следующим образом [1]:

$$B(z') = \gamma_x B_x(z') + \gamma_y B_y(z'), \tag{5}$$

где $\gamma_x$, $\gamma_y$ — некоторые постоянные, зависящие от соотношения импедансов в антенне;

$B_x(z')$, $B_y(z')$ — отклики на выходе ортогонально поляризованных линейных антенн с направления $z'$, которые (с точностью до постоянного множителя) равны:

$$B_x(z') = \int_{-1}^{1} f_x(z)\, h_x(z' - z)\, dz, \tag{6}$$
$$B_y(z') = \int_{-1}^{1} f_y(z)\, h_y(z' - z)\, dz.$$

В (6) $h_x(z)$ и $h_y(z)$ — диаграммы направленности эквивалентных ортогонально поляризованных линейных антенн, связанные фурье-преобразованиями с соответствующими им амплитудно-фазовыми распределениями $t_x(u)$ и $t_y(u)$, сосредоточенными на интервале $[-\alpha, \alpha]$, где

$$|\alpha| = \frac{\pi a}{\lambda}, \tag{7}$$

$a$ — линейный размер антенны;
$\lambda$ — длина волны.

С учетом приведенных формул выражение (5) можно преобразовать к виду

$$B(z') = \gamma_x[\mu_x(z') + \nu_x(z')] + \gamma_y[\mu_y(z') + \nu_y(z')], \tag{8}$$

где $\gamma_x\mu_x(z') + \gamma_y\mu_y(z')$ — сглаженный сигнал:
$\gamma_x\nu_x(z') + \gamma_y\nu_y(z')$ — сглаженный шум.

## 3. Отношение сигнал/шум

Пренебрегая собственными шумами антенны и учитывая (4), (6) и (8), представим отношение сигнал/шум на выходе эллиптически поляризованной антенны в следующем виде:

$$\rho = \frac{|\mu_x(z') + \gamma\mu_y(z')|^2}{|\nu_x(z') + \gamma\nu_y(z')|^2} = \frac{E_\mu}{E_\nu}, \tag{9}$$

где $\gamma = \frac{\gamma_y}{\gamma_x}$.

Преобразуем числитель (9), применив теорему Планшереля [2] к (6) с учетом (4) и (8)

$$E_\mu = \frac{1}{4\pi^2}\left|\int_{-\alpha}^{\alpha} S_{mx}(u)\, t_x(u)\, e^{juz'} du + \gamma \int_{-\alpha}^{\alpha} S_{my}(u)\, t_y(u)\, e^{juz'}\, du\right|^2, \quad (10)$$

где $S_{mx}(u)$ и $S_{my}(u)$ — фурье-преобразования $(2 \div 2а)$, т. е. поле сигнала в плоскости антенны.

Знаменатель (9) после проведения операции математического ожидания и применения теоремы Планшереля примет вид

$$E_\nu = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\alpha}^{\alpha} S_{nx}(u)\,|t_x(u)|^2\, du + |\gamma|^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} S_{ny}(u)\,|t_y(u)|^2\, du + \right.$$

$$\left. + 2Re\left[\gamma \int_{-\alpha}^{\alpha} S^*_{nxy}(u)\, t_y(u)\, t^*_x(u)\, du\right]\right\}, \quad (11)$$

где $S_{nx}(u)$, $S_{ny}(u)$, $S_{nxy}(u)$ — фурье-преобразования соответствующих автокорреляционных и взаимной корреляционной функций

$$K_{xx}(\chi) = \overline{n_x(z)\, n^*_x(z_1)}$$

$$K_{yy}(\chi) = \overline{n_y(z)\, n^*_y(z_1)}$$

$$K_{xy}(\chi) = \overline{n_x(z)\, n^*_y(z_1)}.$$

Проведенные преобразования будут вполне корректны, если $h(z) \equiv 0$ вне $(-1,\ 1)$. Это условие практически всегда выполняется, поскольку все антенны стремятся конструировать с минимальной реактивной энергией [3].

Оптимальная фильтрация будет иметь место, если (9) обращается в максимум.

Определить оптимальные амплитудно-фазовые распределения $t_{0x}(u)$ и $t_{0y}(u)$, обращающие (9) в максимум, можно, пользуясь методами вариационного исчисления. Поочередно придавая вариации $t_x(u)$ и $t_y(u)$, получаем два условно экстремальных уравнения, совместное решение которых позволяет найти с точностью до постоянного множителя $C$ $t_{0x}(u)$ и $t_{0y}(u)$, обращающих (9) в абсолютный экстремум (максимум)

$$t_{0x}(u) = Ge^{-juz'}\, \frac{S^*_{mx}(u)\, S_{ny}(u) - S^*_{nxy}(u)\, S^*_{my}(u)}{S_{nx}(u)\, S_{ny}(u) - |S_{nxy}(u)|^2} \quad (12)$$

$$t_{0y}(u) = \frac{G}{\gamma}\, e^{-juz'}\, \frac{S^*_{my}(u)\, S_{nx}(u) - S_{nxy}(u)\, S^*_{mx}(u)}{S_{nx}(u)\, S_{ny}(u) - |S_{nxy}(u)|^2}. \quad (13)$$

Подставляя (12) и (13) в (9), получаем выражение для максимального отношения сигнал/шум на выходе антенны

$$\rho_0 = \frac{\mathrm{Re}}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{|S_{mx}(u)|^2 S_{ny}(u) + |S_{my}(u)|^2 S_{nx}(u) - 2S_{nxy}(u)\, S^*_{mx}(u)\, S_{my}(u)}{S_{nx}(u)\, S_{ny}(u) - |S_{nxy}(u)|^2}\, du. \quad (14)$$

Если одна из компонент поля отсутствует (случай линейной поляризации), то получаем выражение [4]

$$\rho_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{|S_m(u)|^2}{S_n(u)}\, du. \quad (15)$$

## 4. Дисперсия ошибки пеленгации

Обнаружение пространственного сигнала известной формы со случайной координатой появления сводится к пеленгации по максимуму отклика. Ошибка в определении угловой координаты вызывается тем, что наблюдаемая смесь сигнала и помехи достигает своего максимального значения при $z \neq z_0$, где случайная координата $z$ определяется из следующего уравнения:

$$\mu'(z) + \nu'(z) = 0. \tag{16}$$

Разложим $\mu'(z)$ в ряд и ограничимся первым членом разложения, т. е. в окрестности истинного пеленга примем

$$\mu'(z) = z\,\mu''(0). \tag{17}$$

Тогда, принимая во внимание (16) и (17), получим

$$D = \overline{|z|^2} = -\frac{1}{|\mu''(0)|^2}\overline{|\nu'(z)|^2}. \tag{18}$$

Учитывая, что сигнал на выходе оптимального (в смысле отношения сигнал/шум) фильтра равен автокорреляционной функции сглаженного шума $K_\nu(\chi)$ и, что

$$\overline{|\nu'(z)|^2} = -K_\nu''(0), \tag{19}$$

получаем

$$D_0 = \frac{1}{|\mu''(0)|}, \tag{20}$$

где $D_0$ является минимальным значением функционала (18), которое имеет место, если амплитудно-фазовые распределения описываются выражениями (12) и (13)

Это можно доказать, минимизируя (18) методами вариационного исчисления, подобно тому, как это было проделано для случая максимизации отношения сигнал/шум.

Подставим в (10) значения $t_{0x}(u)$ и $t_{0y}(u)$ из (12) и (13) и, опуская операцию возведения модуля в квадрат, дважды продифференцируем интеграл по параметру. После этого, полагая $z' = 0$ и учитывая (20), получим

$$D_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{Re} = \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{|S_{mx}(u)|^2 S_{ny}(u) + |S_{my}(u)|^2 S_{nx}(u) - 2S_{nxy}(u)\, S_{mx}^*(u)\, S_{my}(u)}{S_{nx}(u)\, S_{ny}(u) - |S_{nxy}(u)|^2}\, u^2 du}. \tag{21}$$

Если одна из компонент поля отсутствует (случай линейной поляризации), то получаем выражение [4]

$$D_0 = \frac{2\pi}{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{|S_m(u)|^2}{S_n(u)}\, u^2 du}. \tag{22}$$

## 5. Пример синтеза оптимальной антенны

Синтез оптимальной антенны сводится к построению амплитудно-фазовых распределений (12) и (13) по известным параметрам суммарного пространственного сигнала.

Однако, как следует из (14) и (21), абсолютные экстремальные значения параметров $\rho_0$ и $D_0$ достигаются только в антенне бесконечной длины. Поэтому выбор длины оптимальной антенны на заданные величины $\rho_0$ и $D_0$ или оценка этих величин для антенны заданной длины могут быть произведены только в том случае, если известны зависимости $\rho_0(\alpha)$ и $D_0(\alpha)$.

Для примера вычислим зависимость дисперсии ошибки пеленгации цели от длины оптимальной антенны при следующих предположениях:

$$1.\ S_{nxy}(u) \equiv 0; \tag{23}$$

$$2.\ S_{nx}(u) = S_{ny}(u) = \sigma_0^2 e^{-\beta u^2}. \tag{23а}$$

$$3.\ |S_{mx}(u)|^2 = |S_{my}(u)|^2 + \sigma_0^2 e^{-\gamma_i u^2}. \tag{23б}$$

На рис. 2 изображена зависимость $D'_{01}(\alpha) = \frac{D_{01}(\alpha)}{D_{0\min}}$, где $D_{01}(\alpha)$ — дисперсия для случая широкополосного шума ($\eta = 4\beta$), посчитанная по формуле (21) с учетом (23а÷б); $D_{0\min}$ — получено из (21) для антенны бесконечной длины.

На том же рисунке приведена зависимость $D^1_{02}(\alpha) = \frac{D_{02}(\alpha)}{D_{0\min}}$ для случая узкополосного шума, когда $\eta = \beta$.

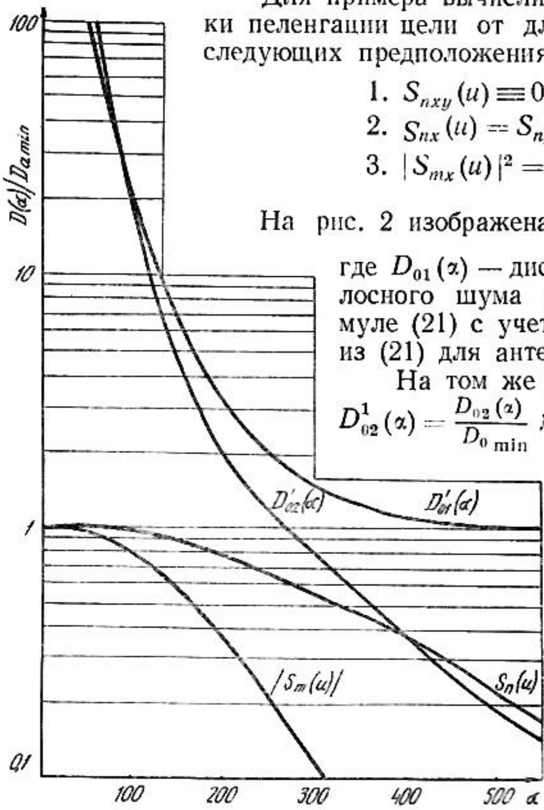


Рис. 2.

Как следует из рис. 2, в случае широкополосного шума ($\beta < \eta$) нельзя получить сколь угодно малую дисперсию ошибки, так как при увеличении апертуры резко падает коэффициент ее использования.

При полосе шума, равной полосе сигнала, можно получить дисперсию $D'_{02}(\alpha)$, стремящуюся с увеличением длины антенны к нулю. Очевидно, дисперсия более быстро приближается к нулю с ростом $\alpha$ для случая $\eta < \beta$, т. е. для более узкополосного шума.

Для сравнения на рис. 2 изображены $|S_m(u)|$ и $S_n(u)$ при $\eta = 10^{-4}/4$; $\beta = 10^{-4}/16$.

В случае широкополосного шума можно заключить, что для получения малой дисперсии длина оптимальной антенны должна быть порядка ширины модуля спектра сигнала, при этом увеличение дисперсии (по сравнению с минимальной) составляет 20%.

## ВЫВОДЫ

Предложенный аппарат позволяет в принципе синтезировать антенну радиолокатора для оптимальной (по критерию минимума дисперсии ошибки пеленгации и максимума отношения сигнал/шум) фильтрации эллиптически поляризованных пространственных сигналов известной формы на фоне коррелированных частично поляризованных помех. Задача оптимизации антенны решалась при разложении эллиптически поляризованного поля в базисе двух ортогональных линейных составляющих. Однако можно показать, что полученные выражения для $\rho_0$ и $D_0$ инвариантны по отношению к базису разложения. Например, если воспользоваться понятием степени поляризации сигнала [5], то

$$D_0 = \frac{2\pi}{\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \left\{ \frac{I^2(u)\,[1 - v^2(u)]}{I_n^2(u)\,[1 - v_n^2(u)]} - 1 \right\} u^2 du}, \tag{24}$$

где $v(u)$ и $v_n(u)$ — распределение степени поляризации суммарного сигнала и помехи соответственно в плоскости антенны;

$I(u)$ и $I_n(u)$ — распределение интенсивности суммарного сигнала и помехи соответственно в плоскости антенны.

Полученные результаты можно распространить на случай двумерного обзора.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зичек, Милазо. Антенны круговой поляризации. Сб. «Антенны эллиптической поляризации» под ред. А. И. Шпунтова, ИЛ, М., 1961.

2. Н. Винер, Р. Пэли. Преобразование Фурье в комплексной плоскости. Изд-во «Наука», М., 1964.

3. Я. И. Хургин, В. П. Яковлев. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. Физматгиз, М., 1962.

4. В. В. Мотлохов. Оптимальная фильтрация пространственных сигналов известной формы. Известия вузов МВ и ССО СССР по разделу «Радиотехника», 1966, № 8.

5. У. Шерклифф. Поляризованный свет. Изд-во «Мир», М., 1965.