

ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ВИНЕРОВСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ КОНЕЧНОМ ВРЕМЕНИ НАБЛЮДЕНИЯ

Э. Н. Хомяков

1. Состояние вопроса. Задачи линейной фильтрации достаточно широко представлены в литературе. В особенности подробно изучены вопросы выделения стационарных процессов, в том числе и векторных [1]. В ряде случаев выделяемые функции нельзя отнести к классу стационарных, в то время как их некоторая производная уже обладает стационарными свойствами. К таким процессам относятся, например, интегралы от стационарного белого шума, получившие название винеровских. Показано [2], что при полубесконечном интервале наблюдения для них существуют предельные операторы сглаживания, реализуемые цепями с постоянными параметрами. В [3] с помощью спектрального метода А. М. Яглома и С. Дарлингтона найдены эти операторы для нескольких интересных случаев. В настоящей работе для винеровских процессов, наблюдаемых на конечном интервале, синтезируются динамические фильтры в канонической форме Калмана [4]. Рассматриваемые задачи возникают, в частности, при синтезе оптимальных радиолокационных измерителей, работающих по маневрирующим целям.

2. Постановка задачи и методы решения. Пусть на интервале $t \in (0, t)$ наблюдается аддитивная смесь

$$\vec{z}(t) = \vec{w}(t) + \vec{n}(t), \quad (2.1)$$

где

$\vec{w}(t)$ — винеровский векторный процесс,

$\vec{n}(t)$ — вектор белых шумов, причем

$$\overline{\vec{w}(t)} = \overline{\vec{n}(t)} = 0; \quad \overline{\vec{n}(t_1) \vec{n}(t_2)^+} = N \sigma(t_1 - t_2). \quad (2.2)$$

Здесь символ «+» означает транспонирование.

Требуется построить систему для нахождения оценки $\hat{\vec{w}}(t)$ процесса $\vec{w}(t)$, обладающую свойством

$$\left\| \overline{\vec{w}(t) - \hat{\vec{w}}(t)} \right\|^2 = \min_{\hat{\vec{w}}(t)} \quad (2.3)$$

Мы рассматриваем линейную задачу, когда оператор фильтрации представляется в виде

$$\hat{\vec{w}}(t) = \int_0^t A(t, \tau) \vec{Z}(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

где

$A(t, \tau)$ — матрица переходных характеристик.

Для гауссовых статистик $\vec{w}(t)$ и $\vec{n}(t)$ доказано [2], что оператор (2.4) является оптимальным в классе всех возможных операторов.

Известно, что искомая матрица $A(t, \tau)$ должна удовлетворять интегрально-матричному уравнению Винера — Хопфа

$$\int_0^t A(t, \tau) R_{zz}(\tau, \sigma) d\tau = R_{zw}(t, \sigma), \quad (2.5)$$

где

$$R_{zz}(\tau, \sigma) = \overline{\vec{z}(\tau) \vec{z}(\sigma)^+}; \quad R_{zw}(\tau, \sigma) = \overline{\vec{z}(\tau) \vec{w}(\sigma)^+}, \quad (2.6)$$

$\vec{z}(t)$ — вектор — столбец компонент входной смеси,

$\vec{z}(t)$ — вектор-строка.

Заметим теперь, что винеровский процесс может быть представлен как выходной сигнал некоторой динамической системы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = F\vec{w}(t) + I\vec{m}(t), \quad (2.7)$$

где

$$\vec{m}(t) \text{ — вектор белого шума } \begin{pmatrix} m(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

I — единичная матрица

$$\overline{m(t_1) m(t_2)} = M_0 \sigma(t_1 - t_2),$$

$$F = \begin{pmatrix} 000 \dots 0 \\ 100 \dots 0 \\ \dots \dots \dots \\ 000 \dots 10 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Иначе говоря, процесс $\vec{w}(t)$ допускает

$$\vec{w}(t) = \Phi(t, 0) \vec{w}(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau) I \vec{m}(\tau) d\tau, \quad (2.9)$$

если

$\Phi(t, \tau)$ — переходная матрица для (2.7).

В нашем случае она имеет вид

$$\Phi(t - \tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (t - \tau) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(t - \tau)^2}{2} & (t - \tau) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{(t - \tau)^k}{k!} & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Ядро уравнения (2.5) для процессов (2.7) с учетом их независимости от белого шума имеет вид

$$R_{z_2}(t_1, t_2) = M_0 \tau(t_1 - t_2) + \begin{cases} \int_0^{t_1} \Phi(t_1, \tau) \Phi^+(t_2, \tau) d\tau, & t_2 > t_1, \\ \int_0^{t_2} \Phi(t_1, \tau) \Phi^+(t_2, \tau) d\tau, & t_2 < t_1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Для рассматриваемых ниже случаев получаем

$$R_{w_1}(t_1, t_2) = \min\{t_1, t_2\} M; \quad (2.12)$$

$$R_{w_{1,1}}(t_1, t_2) = M \begin{cases} \left\| \begin{array}{cc} t_1; & \frac{t_1(t_1 - 2t_2)}{2} \\ -\frac{t_1}{2} & \frac{t_1^2(3t_2 - t_1)}{6} \end{array} \right\|; & t_1 < t_2; \\ \left\| \begin{array}{cc} t_2; & -\frac{t_2}{2} \\ \frac{t_2(t_2 - 2t_1)}{2} & \frac{t_2^2(3t_1 - t_2)}{6} \end{array} \right\|, & t_1 > t_2. \end{cases} \quad (2.13)$$

Сущность метода Калмана заключается в том, что уравнение Винера — Хопфа не решается непосредственно, но рядом несложных преобразований сводится к некоторому дифференциальному уравнению. Решение последнего содержит всю информацию о структуре и потенциальных возможностях фильтрующей системы.

Искомый фильтр в канонической форме представляет собой динамическую систему с обратной связью

$$\frac{d\hat{w}(t)}{dt} = F \hat{w}(t) + K(t) [z(t) - \hat{w}(t)], \quad (2.14)$$

где обозначено $K(t) = A(t, t)$.

Матричное усиление вычисляется по формуле

$$K(t) = P(t) N^{-1}, \quad (2.15)$$

в которой $P(t)$ есть минимизированная дисперсионная матрица ошибки фильтрации, удовлетворяющая нелинейному дифференциально-матричному уравнению Рикатти

$$\frac{dP(t)}{dt} = FP(t) + P(t)F^+ - P(t)N^{-1}P(t) + M. \quad (2.16)$$

Решение задачи для полуоси получаем приравниванием нулю правой части (2.16). В общем случае конечного интервала наблюдения требуется найти аналитическое решение (2.16) при определенных начальных условиях P_0 . Существование и единственность этого решения доказано в [5].

Для получения решения в замкнутом виде сопоставим с уравнением (2.16), следуя [6], систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{dt} &= -F^+ \vec{x} + N^{-1} \vec{y}, \\ \frac{d\vec{y}}{dt} &= M \vec{x} + F \vec{y}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Если обозначить через $\Theta(t, 0)$ блочную переходную матрицу системы (2.17), то решение (2.16) запишется в виде

$$P(t) = \|\Theta_{21}(t, 0) + \Theta_{22}(t, 0)P_0\| \cdot \|\Theta_{11}(t, 0) + \Theta_{12}(t, 0)P_0\|^{-1}. \quad (2.18)$$

Если обозначить $\Psi(t, \tau)$ переходную матрицу системы (2.14), то решение уравнения Винера—Хопфа (2.5) определится выражением

$$A(t, \tau) = \Psi(t, \tau)P(\tau)N^{-1}. \quad (2.19)$$

3. Линейные фильтры для винеровских процессов. Рассмотрим винеровский процесс первого порядка

$$\frac{d\omega_1(t)}{dt} = m(t). \quad (3.1)$$

Предположим сначала, что $\overline{\omega_1(t)} = 0$, $P_0 = 0$. Матрицы, входящие в (2.7), (2.14), (2.16), (2.17), имеют одноэлементную структуру

$$F = \{0\}, \quad M = \{M_0\}, \quad N = \{N_0\}, \quad I = \{1\}. \quad (3.2)$$

Корреляционное уравнение (2.16) перепишется так:

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{P^2}{N_0} + M_0. \quad (3.3)$$

Отсюда непосредственно получаем дисперсию установившейся ошибки фильтрации $\tilde{P} = \sqrt{M_0 N_0}$ и установившийся коэффициент усиления $\tilde{K} = \sqrt{\frac{M_0}{N_0}}$. Система (2.17) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{y}{N_0}, \quad \frac{dy}{dt} = M_0 x. \quad (3.4)$$

Для нее легко найти переходную матрицу

$$\Theta(t) = \left\| \begin{array}{cc} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t; & \frac{1}{\sqrt{M_0 N_0}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t \\ \sqrt{M_0 N_0} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t; & \operatorname{ch} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t \end{array} \right\|. \quad (3.5)$$

В соответствии с допущением $P_0 = 0$ окончательно найдем для переменной во времени дисперсии ошибки и усиления выражения

$$P(t) = \sqrt{M_0 N_0} \operatorname{th} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t, \quad (3.6)$$

$$K(t) = \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t. \quad (3.7)$$

Заметим, что мы получили с малой затратой труда известные результаты [2], где обозначено $M_0 = B$; $N_0 = \frac{1}{k}$.

Если теперь начальная дисперсия отлична от нуля, то получим соотношение

$$P(t) = \frac{\sqrt{M_0 N_0} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t + P_0 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t + \frac{P_0}{\sqrt{M_0 N_0}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{M_0}{N_0}} t}. \quad (3.8)$$

При $t \rightarrow \infty$ (3.6) — (3.8) переходят соответственно в выражения для установившегося режима. Структурная схема фильтрации одномерного процесса w_1 приведена на рис. 1.

Переходная функция (2.14) имеет вид

$$\psi(t - \tau) = \begin{cases} \exp\left[-\sqrt{\frac{M_0}{N_0}}(t - \tau)\right], & t > \tau, \\ 0, & t < \tau. \end{cases} \quad (3.9)$$

При этом

$$A(t - \tau) = \begin{cases} \sqrt{M_0 N_0} \exp\left[-\sqrt{\frac{M_0}{N_0}}(t - \tau)\right], & t > \tau, \\ 0 & t < \tau. \end{cases} \quad (3.10)$$

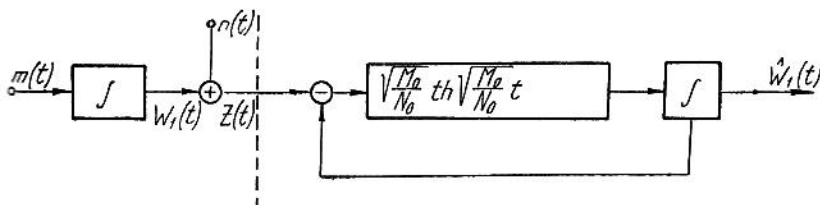


Рис. 1. Структурная схема фильтрации процесса, $w_1(t)$.

Рассмотрим теперь винеровский процесс, состоящий из первого и второго интегралов от белого шума

$$\frac{d\vec{w}_{1,2}(t)}{dt} = F\vec{w}_{1,2}(t) + I\vec{m}(t); \quad \vec{w}_{1,2}(t) = 0; \quad P_0 = 0. \quad (3.11)$$

Введем следующие обозначения:

$$\vec{w}_{1,2}(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{n}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k_2} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} N_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Система корреляционных уравнений (2.16) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dP_{11}}{dt} = -P_{11}^2 k_1 - P_{12} k_2 + N_0, \\ \frac{dP_{12}}{dt} = \frac{dP_{21}}{dt} = P_{11} - P_{12}(P_{11} k_1 + P_{22} k_2), \\ \frac{dP_{22}}{dt} = 2P_{12} - P_{12}^2 k_1 - P_{22}^2 k_2. \end{cases} \quad (3.14)$$

Для аналитического решения (3.14) найдем переходную матрицу системы (2.17)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 + k_1 y_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = k_2 y_2, \\ \frac{dy_1}{dt} = N_0 x_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Собственные значения для матрицы коэффициентов (3.15) равны соответственно

$$\lambda_1 = -\lambda_3 = \sqrt{\frac{g_1}{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.16)$$

$$\lambda_2 = -\lambda_4 = \sqrt{\frac{g_1}{2}} \sqrt{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.17)$$

где

$$\beta = \frac{g_2}{g_1}, \quad g_1 = k_1 N_0, \quad g_2 = k_2 N_0. \quad (3.18)$$

Получив переходную матрицу и выполнив преобразования согласно (2.18) при $P_0 = 0$, найдем для элементов матрицы текущих дисперсий ошибок выделения процесса выражения

$$P_{11}(t) = N_0 \frac{\sqrt{g_1 + 2g_2} (2g_2 - g_1) \operatorname{sh} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + \sqrt{g_1 - 2g_2} (g_1 + 2g_2) \operatorname{sh} \sqrt{g_1 - 2g_2} t}{(g_1 + g_2) (2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + (g_1 - g_2) (2g_2 + g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 - 2g_2} t}, \quad (3.19)$$

$$P_{12}(t) = P_{21}(t) = N_0 \frac{(2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t - (g_1 + 2g_2) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 - 2g_2} t + 2g_1}{(g_1 + g_2) (2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + (g_1 - g_2) (2g_2 + g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 - 2g_2} t}, \quad (3.20)$$

$$P_{22}(t) = N_0 \frac{\sqrt{g_1 + 2g_2} (2g_2 - g_1) \operatorname{sh} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + \sqrt{g_1 - 2g_2} (g_1 + 2g_2) \operatorname{sh} \sqrt{g_1 - 2g_2} t}{g_2 (g_1 + g_2) (2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + g_2 (g_1 - g_2) (g_1 + 2g_2) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 - 2g_2} t}. \quad (3.21)$$

При $t \rightarrow \infty$ получим решение задачи на полуоси

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{11}(t) = N_0 \frac{\sqrt{g_1 + 2g_2}}{g_1 + g_2}, \quad (3.22)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{12}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{21}(t) = \frac{N_0}{g_1 + g_2}, \quad (3.23)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{22}(t) = N_0 \frac{\sqrt{g_1 + 2g_2}}{(g_1 + g_2) g_2}, \quad (3.24)$$

что совпадает с полученными ранее результатами [2,3]. Скорость сходимости (3.19) ÷ (3.21) к (3.22) ÷ (3.24) определяется только соотношением между белыми шумами и может быть оценена, например, с помощью второго метода Ляпунова.

Дисперсии ошибок наблюдения и переменное усиление может содержать незагухающие гармонические составляющие, либо быть полностью апериодическим.

При $g_1 < 2g_2$ имеем

$$P_{11}(t) = N_0 \frac{\sqrt{g_1 + 2g_2} (2g_2 - g_1) \operatorname{sh} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + \sqrt{2g_2 - g_1} (g_1 + 2g_2) \sin \sqrt{2g_2 - g_1} t}{(g_1 + g_2) (2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + (g_1 - g_2) (g_1 + 2g_2) \cos \sqrt{2g_2 - g_1} t}, \quad (3.25)$$

$$P_{12}(t) = P_{21}(t) = N_0 \frac{(2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t - (g_1 + 2g_2) \cos \sqrt{2g_2 - g_1} t + 2g_1}{(g_1 + g_2) (2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + (g_1 - g_2) (g_1 + 2g_2) \cos \sqrt{2g_2 - g_1} t}, \quad (3.26)$$

$$P_{22}(t) = N_0 \frac{\sqrt{g_1 + 2g_2} (2g_2 - g_1) \operatorname{sh} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + \sqrt{2g_2 - g_1} (g_1 + 2g_2) \sin \sqrt{2g_2 - g_1} t}{g_2 (g_1 + g_2) (2g_2 - g_1) \operatorname{ch} \sqrt{g_1 + 2g_2} t + g_2 (g_1 - g_2) (g_1 + 2g_2) \cos \sqrt{2g_2 - g_1} t}. \quad (3.27)$$

Поскольку белые шумы $n_1(t)$ и $n_2(t)$ некоррелированы, то матрица переменного усиления диагональная

$$K(t) = \begin{vmatrix} k_1 P_{11}(t) & 0 \\ 0 & k_2 P_{22}(t) \end{vmatrix}. \quad (3.28)$$

Структурная схема двумерной фильтрации приведена на рис. 2.

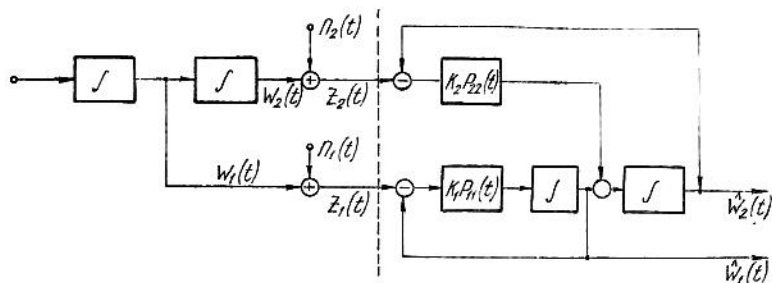


Рис. 2. Структурная схема фильтрации процесса. $\vec{W}_{1,2}(t) = W_1(t), W_2(t)$

ВЫВОДЫ

Приведенные результаты показывают, что характер переменного усиления и поведения текущих дисперсий ошибок наблюдения винеровских процессов полностью определяется соотношением между спектральными интенсивностями белых шумов $\vec{n}(t)$ и $\vec{m}(t)$. Они же определяют и скорость сходимости к установившемуся режиму, причем начальная дисперсия влияет на результирующую ошибку только в переходном процессе.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Яглом. Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для многомерных стационарных процессов с рациональным спектром. Теория вероятностей и ее применение, т. 5, вып. 3, 1960.
2. П. А. Бакут и др. Вопросы статистической теории радиолокации. Изд-во «Сов. радио», т. 2, 1964.
3. И. А. Большаков, Э. Н. Хомяков. Некоторые задачи многомерной фильтрации процессов со стационарными производными. Техническая кибернетика, Изв. АН СССР, 6, 1966.
4. Р. Е. Калман, Бьюси. Новые результаты в линейной фильтрации и теории предсказания. Trans. A. S. M. E., vol. 83, № 1, 1961, series D.
5. R. E. Kalman, «Contribution to the theory of Optimal Control». Proceedings of the Conference on Ordinary Differential Equations, Mexico City, 1959. Bol. soc. mat. mex., 1961.
6. J. J. Levin. On the matrix Picatti equation, Trans. Amer. math. soc. № 10, 1959, p. 519—524.