ОПТИМАЛЬНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫХОДНЫХ ЭФФЕКТОВ СИСТЕМЫ СЛЕДЯЩИХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ

С. Е. Фалькович

В ряде практических приложений возникает задача оптимального использования выходных эффектов $\eta_1(t),\ldots\ \eta_n(t)$ системы независимых следящих измерителей, воспроизводящих результаты оценки некоторого процесса $\mu(t)$ или различных функционалов этого процесса. Под оптимальным использованием понимается образование оптимальной в известном смысле результирующей оценки измеряемого процесса $\mu(t)$. Практически возникают две различные задачи. Во-первых, выходные эффекты $\eta_1(t),\ldots\ \eta_n(t)$ следящих измерителей могут записываться (запоминаться) в течение некоторого длительного времени t (теоретически при $-\infty < t < \infty$), а затем обрабатываться. В этом случае при формировании результирующей оценки $\mu^*(t_0)$ в произвольный момент времени t_0 принимаются во внимание как все предшествующие значения частных оценок $\eta_1(t),\ldots\ \eta_n(t)$, так и все последующие. Во-вторых, может возникнуть задача непрерывного формирования результирующей оценки $\mu^*(t_0)$ в текущий момент времени t_0. При этом, естественно, используются только предшествующие значения выходных эффектов $\eta_1(t),\ldots\ \eta_n(t)$ следящих измерителей, и выходная функция вырабатывается по мере поступления входных данных, практически без разделения во времени. Рассмотрение первой и второй задач методом теории решений, используемым в настоящей работе, практически совпадает. Поэтому мы ограничимся изложением решения одной задачи — первой, а результаты решения распространим на вторую задачу. Приводимые результаты для непрерывных процессов можно распространять на дискретные.

1. Использование независимых оценок одного и того же процесса

Задача формулируется следующим образом. Имеется n независимых результатов измерения $\eta_1(t),\ldots\ \eta_n(t)$ процесса $\mu(t)$.
Определены корреляционные функции

$$\rho_i(t_1;\ t_2) = \langle \varepsilon_i(t_1)\,\varepsilon_i(t_2)\rangle \tag{1}$$

ошибок $\varepsilon_i(t)$

$$\varepsilon_i(t) = \eta_i(t) - \langle \eta_i(t)\rangle \tag{2}$$

всех измерений. Здесь и в дальнейшем скобки вида $\langle\ \rangle$ означают операцию статистического усреднения. Полагаем, что случайные функции $\varepsilon_i(t)$ являются нормальными и независимыми при различных значениях индекса i, а также для простоты изложения, что частные оценки $\eta_i(t)$ процесса $\mu(t)$ несмещенные $(\langle\eta_i(t)\rangle = \mu(t))$.

Требуется по результатам измерений $\eta_1(t),\dots\ \eta_n(t)$ на интервале $-\infty < t < \infty$ дать в произвольный момент времени t_0 оценку $\mu^*(t_0)$ процесса $\mu(t)$, обеспечивающую наименьшую дисперсию ошибки и именуемую в дальнейшем оптимальной оценкой, определить алгоритм получения оптимальной оценки $\mu^*(t_0)$ и ее корреляционную функцию

$$\rho(t_1;\ t_2) = \langle\varepsilon(t_1)\,\varepsilon(t_2)\rangle; \quad \varepsilon(t) = \mu^*(t) - \langle\mu^*(t)\rangle. \tag{3}$$

Принимая во внимание взаимную независимость процессов $\eta_1(t),\dots$ $\dots\ \eta_n(t)$, функционал правдоподобия, являющийся непрерывным аналогом условной плотности распределения вероятностей для случайных многомерных векторов $\vec{\eta}_1,\dots\ \vec{\eta}_n$, представляющих функции $\eta_1(t)\dots\ \eta_n(t)$, при условии реализации $\mu(t)$, можно записать в виде

$$P[\eta_1(t),\dots\ \eta_n(t)\,|\,\mu(t)] =$$

$$= K\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\eta_1(t_1)-\mu(t_1)\Big]v_1(t_1;\ t_2)\Big[\eta_1(t_2)-\mu(t_2)\Big]dt_1dt_2 - \dots\right.$$

$$\left.\dots - \frac{1}{2}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big[\eta_n(t_1)-\mu(t_1)\Big]v_n(t_1;\ t_2)\Big[\eta_n(t_2)-\mu(t_2)\Big]dt_1dt_2,\right. \tag{4}$$

где K — коэффициент, не зависящий от реализаций $\eta_i(t)$ и $\mu(t)$, $v_i(t_1;\ t_2)$ — функция, которая является непрерывным аналогом элементов матрицы, обратной корреляционной, и определяется уравнением

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho_i(t;\ t_1)\,v_i(t_1;\ t_2)\,dt_1 = \delta(t-t_2); \quad (i = 1,\dots\ n). \tag{5}$$

В большинстве практически интересных случаев апостериорное распределение функции $\mu(t)$ (точнее вектора $\vec{\mu}$, представляющего функцию $\mu(t)$), которое может быть получено, исходя из (4), существенно уже априорного распределения. Это объясняется тем, что априорная информация о $\mu(t)$ (или о $\vec{\mu}$) должна использоваться при получении частных оценок $\eta_1(t),\dots\ \eta_n(t)$ (или $\vec{\eta}_1,\dots\ \vec{\eta}_n$), в результате чего рассеяние апостериорного распределения каждой из этих оценок должно быть меньше рассеяния априорного распределения $\vec{\mu}$. Последнее условие представляет собой условие целесообразности использования каждого измерителя. Дисперсия апостериорного распределения результирующей оценки, естественно, меньше наименьшей из дисперсий частных оценок. Поэтому с точностью, достаточной для технических приложений, можно считать, что функционал правдоподобия (4), во всяком случае в окрестности своего максимума, отличается от функционала апостериорного распределения для $\mu(t)$ на постоянный коэффициент. При этом, если принять во внимание симметрию функционала (4), то оценка по максимуму правдоподобия будет оптимальной при выборе любой симметричной функции потерь, в частности, квадратичной [1]. Таким образом, в рассматриваемом случае оценка по максимуму правдоподобия обеспечивает оптимальность оценки в довольно широком смысле и в том числе с точки зрения наименьшего рассеяния ошибок.

Выражение (4) является квадратичным функционалом $\mu(t)$. В силу принципа максимума правдоподобия в непрерывном случае мы должны приравнять нулю первую вариацию этого функционала или логарифма этого функционала. Проварьируем функцию $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \mu^*(t) + \varepsilon\nu(t), \tag{6}$$

где ε — малый параметр, $\nu(t)$ — произвольная функция, $\mu^*(t)$ — оценка максимума правдоподобия процесса $\mu(t)$. Принимая во внимание, что $v_i(t_1;\ t_2) = v_i(t_2;\ t_1)$ и пренебрегая слагаемыми второго порядка малости $O(\varepsilon^2)$, находим вариацию логарифма функционала (4) и приравниваем ее нулю

$$\log P[\eta_1(t),\dots\ \eta_n(t)\,|\,\mu(t)] - \log P[\eta_1(t),\dots\ \eta_n(t)\,|\,\mu^*(t)] =$$
$$= \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty}\nu(t_1)\,dt_1\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v_i(t_1;\ t_2)[\eta_i(t_2)-\mu^*(t_2)]\,dt_2 = 0. \tag{7}$$

Так как $\nu(t)$ — произвольная функция, уравнение правдоподобия (7) преобразуется в

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu^*(t_2)\sum_{i=1}^{n}v_i(t_1;\ t_2)\,dt_2 = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}v_i(t_1;\ t_2)\,\eta_i(t_2)\,dt_2. \tag{8}$$

Введем функцию $W(t;\ t_1)$ такую, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(t;\ t_1)\sum_{i=1}^{n}v_i(t_1;\ t_2)\,dt_1 = \delta(t-t_2). \tag{9}$$

Тогда, умножая правую и левую части равенства (8) на $W(t_0;\ t_1)$ и интегрируя обе части по t_1, получаем выражение для оптимальной оценки в произвольный момент времени

$$\mu^*(t_0) = \sum_{i=1}^{n}\int\int\limits_{-\infty}^{\infty}W(t_0;\ t_1)\,v_i(t_1;\ t_2)\,\eta_i(t_2)\,dt_1dt_2 \tag{10}$$

или

$$\mu^*(t_0) = \sum_{i=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}h_i(t_0;\ t_2)\,\eta_i(t_2)\,dt_2, \tag{11}$$

где $h_i(t;\ t_2)$ — реакция i-го фильтра в момент времени t на воздействие $\delta(t-t_2)$, называемая импульсной реакцией

$$h_i(t;\ t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}W(t;\ t_1)\,v_i(t_1;\ t_2)\,dt_1. \tag{12}$$

Таким образом, оптимальная система получения результирующей оценки $\mu^*(t)$ является линейной и может быть представлена в виде схемы (рис. 1), состоящей из n-линейных четырехполюсников (фильтров) с импульсными реакциями $h_i(t;\ t_2)$ и из суммирующего устройства Σ.

Фильтры, полученные в настоящей задаче и определенные посредством (12), в соответствии с классификацией, предложенной в [2], называются фильтрами I типа. Такой фильтр реализуется обычно в виде счетно-решающего устройства.

В случае, когда должна формироваться текущая оценка $\mu^*(t_0)$ по результатам предшествующих измерений $\eta_1(t),\ldots\ \eta_n(t)$ на интервале $-\infty < t \leqslant t_0$ (вторая задача), промежуточные и конечные выражения решения получаются аналогичными, но пределы интегрирования $(-\infty, \infty)$, следует заменить на $(-\infty, t_0)$. Импульсные реакции фильтров $h_i(t;\ t_2)$ получаются равными $(t,\ t_2 \leqslant t_0)$

$$h_i(t;\ t_2) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{t_0} W(t;\ t_1)\, v_i(t_1;\ t_2)\, dt_1 \text{ при } t \geqslant t_2 \\ 0 \text{ при } t < t_2 \end{cases} \tag{13}$$

Такой фильтр в [2] назван фильтром II типа. Фильтр II типа может быть осуществлен посредством реализуемых электрических фильтров, а также посредством счетно-решающих устройств. Заметим, что во второй задаче при варьировании на $\in(-\infty,\ t_0)$, получается оптимальная оценка $\mu^*(t)$ для всего интервала $-\infty < t \leqslant t_0$. Однако оценки процесса $\mu(t)$ во все предшествующие моменты времени уже сделаны и исправлению не подлежат. Решение $\mu^*(t)$ используется только для получения оценки $\mu^*(t_0)$ в текущий момент времени.

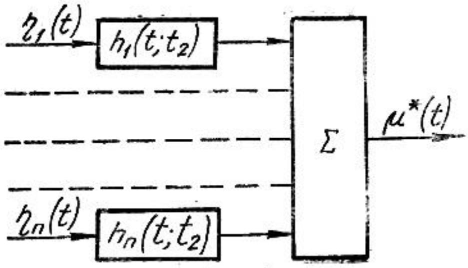

Рис. 1.

Корреляционная функция оптимальной результирующей оценки

$$\rho(t_1;\ t_2) = \langle[\mu^*(t_1) - \langle\mu^*(t_1)\rangle][\mu^*(t_2) - \langle\mu^*(t_2)\rangle]\rangle, \tag{14}$$

с учетом, что

$$\mu^*(t) - \langle\mu^*(t)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(t;\ t_1)\, v_i(t_1;\ t_2)\, \varepsilon_i\,(t_2)\, dt_1 dt_2, \tag{15}$$

после простых преобразований получается равной функции $W(t_1;\ t_2)$

$$\rho(t_1;\ t_2) = W(t_1;\ t_2), \tag{16}$$

определенной посредством (9).

2. Использование независимых оценок различных функционалов одного и того же процесса

Положим теперь, что выходные эффекты независимых измерителей $\eta_1(t)\ldots\ \eta_2(t)$ представляют собой результаты измерения различных функционалов процесса $\mu(t): L^1[\mu(t)],\ldots\ L^n[\mu(t)]$ соответственно. Как и в предыдущем параграфе, ошибки всех измерителей полагаются нормальными, независимыми случайными процессами с нулевыми математическими ожиданиями и с заданными корреляционными функциями $\rho_i(t_1;\ t_2)$. Нужно по результатам измерений $\eta_1(t),\ldots\ \eta_n(t)$ на интервале $-\infty < t < \infty$ (первая задача) или $-\infty < t < t_0$ (вторая задача) определить оптимальную систему получения результирующей оценки $\mu^*(t_0)$ процесса $\mu(t)$ и корреляционную функцию $\rho(t_1;\ t_2)$ этой оценки.

Запишем функционал правдоподобия

$$P[\eta_1(t),\dots \eta_n(t) \mid \mu(t)] =$$

$$= K \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\int_{-\infty}^{\infty}\left[\eta_i(t_1) - L^i\mu(t_1)\right] v_i(t_1;\ t_2)\left[\eta_i(t_2) - L^i\mu(t_2)\right] dt_1 dt_2 = \right.$$

$$= K \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\int_{-\infty}^{\infty}\eta_i(t_1)\, v_i(t_1;\ t_2)\,\eta_i(t_2)\, dt_1 dt_2 + \sum_{i=1}^{n}\int\int_{-\infty}^{\infty} L^i\left[\mu(t_1)\right] \times \right. \quad (17)$$

$$\left. \times v_i(t_1;\ t_2)\,\eta_i(t_2)\, dt_1 dt_2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\int_{-\infty}^{\infty} L^i\left[\mu(t_1)\right] v_i(t_1;\ t_2)\, L^i\left[\mu(t_2)\right] dt_1 dt_2\right\}.$$

Далее введем сопряженные операторы $\overline{L}^i_{t_1}$ и $\overline{L}^i_{t_2}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_i(t_1;\ t_2)\, L^i[\mu(t_2)]\, dt_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{L}^i_{t_2}[v_i(t_1;\ t_2)]\,\mu(t_2)\, dt_2 \qquad (18)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_i(t_1;\ t_2)\, L^i[\mu(t_1)]\, dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{L}^i_{t_1}[v(t_1;\ t_2)]\,\mu(t_1)\, dt_1. \qquad (19)$$

Тогда функционал (17) можно преобразовать к виду

$$P[\eta_1(t),\dots \eta_n(t) \mid \mu(t)] = K \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\int_{-\infty}^{\infty}\eta_i(t_1)\, v_i(t_1;\ t_2)\,\eta_i(t_2)\, dt_1 dt_2 + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\int\int_{-\infty}^{\infty}\mu(t_1)\,\overline{L}^i_{t_1}\left[v_i(t_1;\ t_2)\right]\eta_i(t_2)\, dt_1 dt_2 -$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n}\int\int_{-\infty}^{\infty}\mu(t_1)\,\overline{L}^i_{t_1}\,\overline{L}^i_{t_2}\left[v_i(t_1;\ t_2)\right]\mu(t_2)\, dt_1 dt_2\right\}, \qquad (20)$$

после чего применение принципа максимума правдоподобия аналогично тому, как это было сделано при выводе (8), приводит к уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu^*(t_2)\sum_{i=1}^{n}\overline{L}^i_{t_1}\,\overline{L}^i_{t_2}[v_i(t_1;\ t_2)]\, dt_2 = \sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{L}^i_{t_1}[v_i(t_1;\ t_2)]\,\eta_i(t_2)\, dt_2. \qquad (21)$$

Подставляя в левую и правую части (21) функцию $\widetilde{W}(t_0;\ t_1)$, определенную уравнением

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{W}(t_0;\ t_1)\sum_{i=1}^{n}\overline{L}^i_{t_1}\,\overline{L}^i_{t_2}[v_i(t_1;\ t_2)]\, dt_1 = \delta(t_0 - t_2), \qquad (22)$$

и, интегрируя обе части по t_1, получаем выражение для оптимальной оценки $\mu^*(t_0)$ в произвольный момент времени t_0

$$\mu^*(t_0) = \sum_{i=1}^{n}\int\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{W}(t_0;\ t_1)\,\overline{L}^i_{t_1}[v_i(t_1;\ t_2)]\,\eta_i(t_2)\, dt_1\, dt_2, \qquad (23)$$

которое можно также привести к виду (11), (промоделированному посредством рис. 1), если импульсные реакции фильтров $h_i(t;\ t_2)$ определить следующим образом:

$$h_i(t;\ t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(t,\ t_1)\,\overline{L_{t_1}^i}\,[v_i(t_1;\ t_2)]\,dt_1. \tag{24}$$

В практических задачах наиболее часто встречаются дифференциальные операторы L^i

$$L^i[\mu(t)] = \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{d^k}{dt^k}\mu(t), \tag{25}$$

где $a_0,\ \ldots\ a_m$ — в общем случае функции t. Сопряженный оператор [3]

$$\overline{L_{t_1}^i}\,[v_i(t_1;\ t_2)] = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{d^k}{dt_1^k} a_k v_i(t_1;\ t_2). \tag{26}$$

В случае интегрального оператора с ядром $k(\tau;\ t)$

$$L^i[\mu(t)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(\tau;\ t)\,\mu(\tau)\,d\tau \tag{27}$$

сопряженный оператор также получается интегральным, но с транспонированным ядром

$$\overline{L_{t_1}^i}\,[v_i(t_1;\ t_2)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t;\ \tau)\,v_i(\tau;\ t_2)\,d\tau. \tag{28}$$

При формировании текущей оценки $\mu^*(t_0)$ по результатам предшествующих измерений (вторая задача) пределы интегрирования в выражениях (5), (22), (23) и (11), определяющих решение, следует заменить на $(-\infty,\ t_0)$, а импульсные реакции фильтров (рис. 1) при $t,\ t_2 \leqslant t_0$ должны быть

$$h_i(t;\ t_2) = \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{t_0} \tilde{W}(t;\ t_1)\,\overline{L_{t_1}^i}\,[v_i(t_1;\ t_2)]\,dt_1 & \text{при } t \leqslant t_2. \\ 0 \text{ при } t > t_2 \end{cases} \tag{29}$$

Расчет корреляционной функции (14) оптимальной результирующей оценки $\mu^*(t)$ дает

$$\rho(t_1;\ t_2) = \tilde{W}(t_1;\ t_2), \tag{30}$$

где $\tilde{W}(t_1;\ t_2)$ — функция, определенная посредством (22).

3. Некоторые практические приложения

В качестве первого примера определим оптимальную систему получения результирующей оценки $\mu^*(t)$, когда выходные процессы $\eta_1(t),\ \ldots\ \eta_n(t)$ представляют результат измерений процесса $\mu(t)$ и $n-1$ его производных соответственно. На основании (24), (26) и (22) характеристики фильтров оптимальной схемы (рис. 1) равны

$$h_i(t;\ t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(t;\ t_1)(-1)^{i-1}\frac{\partial^{i-1}}{\partial t_1^{i-1}} v_i(t_1;\ t_2)\,dt_1;\ (i = 1,\ \ldots\ n),$$

где $\tilde W(t;\ t_1)$ — определяется из уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde W(t;\ t_1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{2(i-1)}}{\partial t_1^{i-1}\,\partial t_2^{i-1}}\, v_i(t_1;\ t_2)\,dt_1=\delta(t-t_2),$$

а $v_i(t_1;\ t_2)$, как и во всех других случаях, непрерывный аналог матрицы, обратной корреляционной (5).

Рассмотрим далее случай, когда все следящие измерители дают непосредственно оценку параметра $\mu(t)$, а ошибки $\xi_i(t)$ представляют собой стационарные случайные процессы с корреляционными функциями $\rho_i(t_1-t_2)$.

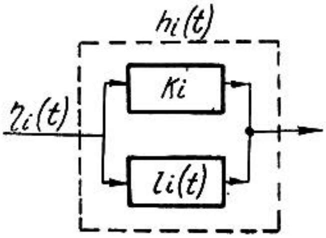

Рис. 2.

При этом интегралы (5), (9), (10) и (11) преобразуются в свертки соответствующих функций. Обозначая энергетические спектры ошибок символом $G_i(f)$

$$G_i(f)=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_i(t)\,e^{-j2\pi ft}\,dt,$$

находим выражения для корреляционной функции оптимальной результирующей оценки

$$\rho(t)=W(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}G_i^{-1}(f)}\,e^{j2\pi ft}\,df$$

и для импульсных реакций оптимальных фильтров

$$h_i(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G_i^{-1}(f)}{\sum\limits_{i=1}^{n}G_i^{-1}(f)}\,e^{j2\pi ft}\,df.$$

Для иллюстрации зададим конкретный вид корреляционных функций

$$\rho_i(t)=\frac{\sigma_i^2}{2\tau_i}\exp\left(-\frac{|t|}{\tau_i}\right).$$

Тогда

$$G_i(f)=\frac{1}{\frac{1}{\sigma_i^2}+\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}(2\pi f)^2},$$

$$\rho(t)=W(t)=\frac{\sigma_\Sigma^2}{2\tau_\Sigma}\exp\left(-\frac{|t|}{\tau_\Sigma}\right),$$

где

$$\frac{1}{\sigma_\Sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2};\qquad \tau_\Sigma^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\tau_i^2}{\sigma_i^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

и

$$h_i(t) = \frac{\tau_i^2\sigma_\Sigma^2}{\tau_\Sigma^2\sigma_i^2}\delta(t) + \frac{\sigma_\Sigma^2}{\sigma_i^2}\left(1-\frac{\tau_i^2}{\tau_\Sigma^2}\right)\frac{1}{2\tau_\Sigma}\exp\left(-\frac{|t|}{\tau_\Sigma}\right).$$

Таким образом, каждый канал оптимальной системы должен состоять из двух элементов, включенных параллельно (рис. 2): из безынерционного усилителя k_i, усиливающего в $\frac{\tau_i^2\sigma_\Sigma^2}{\tau_\Sigma^2\sigma_i^2}$ раз, и из инерционного элемента с импульсной реакцией $l_i(t)$, определяемой вторым слагаемым последнего выражения.

ВЫВОДЫ

Приведено решение задачи определения оптимальной системы получения оценки некоторого процесса $\mu(t)$ по n независимым результатам измерения различных функционалов этого процесса. Рассмотрение ведется методом теории решений и сводится к применению принципа максимума правдоподобия к функционалу от оцениваемого процесса $\mu(t)$. Результаты получены применительно к двум задачам: к задаче получения оценки процесса $\mu(t)$ в произвольный момент времени по результатам измерений на достаточно большом интервале (теоретически $-\infty < t < \infty$), а также к задаче получения оценки процесса в текущий момент времени t_0 по результатам предшествующих измерений на интервале $(-\infty < t \leqslant t_0)$. Рассчитаны корреляционные функции оптимальных результирующих оценок. Полученные решения проиллюстрированы примерами.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. А. Бакут и др. Вопросы статистической теории радиолокации, том II, Изд-во «Сов. радио», 1964.
2. Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков. Выделение сигналов на фоне случайных помех. Изд-во «Сов. радио», 1960.
3. Р. Курант, Д. Гильберт. Методы математической физики, том I, Гостехиздат, 1951.