ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛА, ПОЯВЛЯЮЩЕГОСЯ В СЛУЧАЙНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Н. Ф. Клюев

1. Постановка задачи

На вход анализатора в дискретные моменты времени поступают независимые случайные величины $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, которые при $n < \varkappa$ представляют собой отсчеты помехи, а при $n \geqslant \varkappa$ — отсчеты смеси сигнала с помехой. Закон распределения вероятностей отсчета U_n при $n < \varkappa$ определяется функцией $P_0(u_n)$, а при $n \geqslant \varkappa$ — функцией $P_1(u_n)$. Предполагается, что при поступлении отсчета u_n любое значение $\varkappa$ от $\varkappa = 1$ до $\varkappa = n$ равновероятно. Анализатор должен зафиксировать факт появления сигнала на фоне помехи.

При обнаружении сигнала в рассматриваемых условиях могут применяться либо серийные процедуры, либо процедуры типа последовательного анализа [1]. В первом случае при поступлении очередного отсчета U_n решение о наличии сигнала выдается в результате анализа заданного числа m смежных отсчетов $u_{n-m+1}, u_{n-m+2}, \ldots, u_{n-1}, u_n$. Во втором случае решение на каждом шаге (при поступлении очередного отсчета) определяется результатом обработки всех отсчетов, поступивших к этому шагу на вход анализатора. Ниже рассматривается последовательная процедура, при которой решение на каждом шаге определяется величиной наибольшего коэффициента правдоподобия, соответствующего одному из возможных моментов появления сигнала.

2. Описание процедуры

При поступлении очередного отсчета определяется коэффициент правдоподобия $\Lambda_{\max}^{(n)}$, соответствующий такому значению $\varkappa$, при котором имеющаяся совокупность отсчетов наиболее вероятна. Наличие сигнала фиксируется в том случае, если $\Lambda_{\max}^{(n)} \geqslant \Lambda_0$, где Λ_0 — заданная величина.

Коэффициент правдоподобия, соответствующий $\varkappa = r$, определяется выражением

$$\Lambda_r^{(n)} = \prod_{j=r}^{n} \lambda(u_j), \tag{1}$$

где

$$\lambda(u_j) = \frac{P_1(u_j)}{P_0(u_j)}.$$

Используя последнее равенство, нетрудно убедиться в том, что величина $\Lambda_{\max}^{(n)}$ удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$\Lambda_{\max}^{(n)} = \begin{cases} \Lambda_{\max}^{(n-1)}\lambda(u_n), & \Lambda_{\max}^{(n-1)} > 1 \\ \lambda(u_n), & \Lambda_{\max}^{(n-1)} \leqslant 1 \end{cases}. \tag{2}$$

В процессе обработки вместо $\Lambda_{\max}$ можно вычислить величину $x = \log\Lambda_{\max}$ и сравнивать ее с порогом $\log\Lambda_0$. В этом случае

$$x^{(n)} = \begin{cases} x^{(n-1)} + l(u_n), & x^{(n-1)} > 0 \\ l(u_n), & x^{(n-1)} \leqslant 0 \end{cases}, \tag{3}$$

где

$$l(u_n) = \log\lambda(u_n).$$

Если предварительно осуществляется бинарная дискретизация (квантование) отсчетов, то

$$l(u_n) = \begin{cases} \log\dfrac{P_1}{P_0}, & u_n \geqslant u_0 \\ \log\dfrac{1-P_1}{1-P_0}, & u_n < u_0 \end{cases}, \tag{4}$$

где u_0 — уровень квантования, p_0 и p_1 — вероятности превышения уровня квантования u_0 соответственно отсчетом помехи и отсчетом смеси сигнала с помехой ($p_1 > p_0$).

Уровень квантования u_0 можно установить таким, чтобы выполнялось условие

$$\nu\log\frac{p_1}{p_0} = \mu\log\frac{1-p_0}{1-p_1},$$

где ν и μ — целые числа.

При этом, приняв наибольший общий делитель величин $\log\frac{p_1}{p_0}$ и $\log\frac{1-p_0}{1-p_1}$ за единицу измерения, формулу (4) можно записать в виде

$$l(u_n) = \begin{cases} \mu, & u_n \geqslant u_0 \\ -\nu, & u_n < u_0. \end{cases} \tag{5}$$

Из (3) и (5) получим следующий алгоритм обработки бинарно-квантованных отсчетов:

$$x^{(n)} = \begin{cases} x^{(n-1)} + \mu, & u_n \geqslant u_0 \\ x^{(n-1)} - \nu, & u_n < u_0, \ x^{(n-1)} > \nu \\ 0, & u_n < u_0, \ x^{(n-1)} \leqslant \nu. \end{cases} \tag{6}$$

3. Показатели эффективности

Эффективность рассматриваемого метода в первом приближении определяется средним числом $\bar{n}_0$ шагов между смежными ложными обнаружениями сигнала и средним числом $\bar{n}_1$ шагов между моментом появления сигнала и моментом его обнаружения.

Оценим величины $\bar{n}_0$ и $\bar{n}_1$, предполагая, что осуществляется бинарное квантование отсчетов, а уровень квантования u_0 установлен таким образом, чтобы выполнялось равенство $p_1 = 1 - p_0$. Можно показать (3), что выполнение этого условия не приводит к заметному снижению эффективности процедур обнаружения бинарно-квантованных сигналов.

Если $p_1 = 1 - p_0$, то $\nu = \mu = 1$, и соотношение (6) записывается в виде

$$x^{(n)} = \begin{cases} x^{(n-1)} + 1, & u_n \geqslant u_0 \\ x^{(n-1)} - 1, & u_n < u_0, \ x^{(n-1)} > 1 \\ 0, & u_n < u_0, \ x^{(n-1)} \leqslant 1. \end{cases} \tag{7}$$

В процессе анализа величина x может иметь следующие целочисленные значения: $0, 1, 2, \ldots, k-1, k$ (при $x = k$ выдается решение о наличии сигнала). Среднее число $\bar{n}(z)$ шагов, необходимых для достижения этой величиной значения k при исходном значении z, удовлетворяет уравнению (2)

$$\bar{n}(z) = p\bar{n}(z+1) + q\bar{n}(z-1) + 1, \tag{8}$$

где $p = p_1$ при наличии сигнала, $p = p_0$, если сигнал отсутствует, то $q = 1 - p$. При $z = k$ и $z = 0$ соответственно имеем

$$\begin{aligned} &\bar{n}(k) = 0 \\ &\bar{n}(0) = q\bar{n}(0) + p\bar{n}(1) + 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Решением уравнения (8) при граничных условиях (9) является функция

$$\bar{n}(z) = \frac{k-z}{p-q} + \frac{q}{(p-q)^2}\left[\left(\frac{q}{p}\right)^k - \left(\frac{q}{p}\right)^z\right]. \tag{10}$$

Положив в (10) $p = p_0$ и $z = 0$, получим искомую величину $\bar{n}_0$

$$\bar{n}_0 = \frac{k}{p_0 - q_0} + \frac{q_0}{(p_0 - q_0)^2}\left[\left(\frac{q_0}{p_0}\right)^k - 1\right]. \tag{11}$$

Величина $\bar{n}_1$ определяется формулой

$$\bar{n}_1 = \sum_{z=0}^{k=1} \bar{n}_1(z) P(z), \tag{12}$$

где $\bar{n}_1(z)$ — среднее число шагов, затрачиваемое на обнаружение сигнала, если к моменту его появления $x = z$,

$P(z)$ — вероятность того, что к моменту появления сигнала $x = z$.

Величина $\bar{n}_1(z)$ определяется равенством (10) при $p = p_1$. Вероятность $P(z)$ при $\chi \gg 1$ и $0 < z < k-1$ удовлетворяет уравнению

$$P(z) = P(z-1)P_0 + P(z+1)q_0.$$

При $z = k-1$ и $z = 0$ соответственно имеем (13)

$$\begin{aligned} P(k-1),\ p_0 &= P(k), \\ P(0) &= P(0)q_0 + P(1)q_0 + P(k). \end{aligned} \tag{14}$$

Последнее равенство учитывает, что состояние $x = 0$ может быть достигнуто, если на предшествующем шаге величина x имеет одно из следующих значений: $0, 1, k$ (ложное обнаружение сигнала, после которого принудительно устанавливается значение $x = 0$).

Поскольку $P(k) = \frac{1}{\bar{n}_0}$, где $\bar{n}_0$ — известная величина равенства (14) можно использовать в качестве граничных условий при решении уравнения (13). Это решение определяется формулой

$$P(z) = \frac{1}{\bar{n}_0(p_0 - q_0)}\left[1 - \left(\frac{q_0}{p_0}\right)^{k-z}\right]. \tag{15}$$

Подставив в (12) значения $\bar{n}_1(z)$ и $P(z)$, получим

$$\bar{n}_1 = \sum_{z=0}^{k-1} \frac{\left[1-\left(\frac{q_0}{P_0}\right)^{k-z}\right]\left\{\frac{k-z}{p_1-q_1}+\frac{q_1}{(p_1-q_1)^2}\left[\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^k-\left(\frac{q_1}{P_1}\right)^z\right]\right\}}{k+\frac{q_0}{p_0-q_0}\left[\left(\frac{q_0}{p_0}\right)^k-1\right]}. \qquad (16)$$

Для рассматриваемой процедуры при необходимости можно методом разложения производящих функций на простые дроби 2 рассчитать законы распределения вероятностей величин n_0 и n_1.

Вероятность того, что при исходном значении z величина x впервые достигнет значения k через n шагов, удовлетворяет уравнению ($n>0$, $0<z<k$)

$$P(z, n) = pP(z+1, n-1) + qP(z-1, n-1). \qquad (17)$$

Кроме того, имеют место следующие равенства:

$$\begin{gathered} P(z, 0) = 0, \; 0 \leqslant z < k, \\ P(k, 0) = 1. \end{gathered} \qquad (18)$$

Используя соотношения (17) и (18), нетрудно показать, что производящая функция

$$U_z(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(z, n) s^n \qquad (19)$$

удовлетворяет уравнению ($0<z<k$)

$$U_z(s) = PSU_{z+1}(s) + qsU_{z-1}(s) \qquad (20)$$

при граничных условиях

$$\begin{gathered} U_k(s) = 1, \\ U_0(s) = psU_1(s) + qsU_0(s). \end{gathered} \qquad (21)$$

Решение уравнения (20) определяется выражением

$$U_z(s) = \frac{(1-qs)\left[\varepsilon_1^z(s)-\varepsilon_2^z(s)\right]-qs\left[\varepsilon_1^{z-1}(s)-\varepsilon_2^{z-1}(s)\right]}{(1-qs)\left[\varepsilon_1^k(s)-\varepsilon_2^k(s)\right]-qs\left[\varepsilon_1^{k-1}(s)-\varepsilon_2^{k-1}(s)\right]}, \qquad (22)$$

где

$$\varepsilon_{1,2}(s) = \frac{1 \pm (1-4pqs^2)^{1/2}}{}.$$

Выражение (22) можно записать так [2]:

$$U_z(S) = \frac{f(s)}{\varphi(s)} = \sum_{(j)} \frac{\rho_j}{s_j - s}, \qquad (23)$$

где $f(s)$ и $\varphi(s)$ — многочлены от s,

s_j — корни многочлена $\varphi(s)$,

$$\rho_j = \frac{-f(s)}{\left[\frac{d\varphi(s)}{ds}\right]_{s=s_j}}. \qquad (24)$$

При этом искомая вероятность $P(z, n)$ определяется формулой (2)

$$P(z, n) = \sum_{(j)} \frac{\rho_j}{s_j^{n+1}}. \qquad (25)$$

При нахождении корней s_j и коэффициентов ρ_j можно воспользоваться следующим приемом [2]. Нетрудно убедиться в том, что знаменатель выражения (22) не имеет корней, модуль которых меньше величины $\frac{1}{2(pq)^{1/2}}$ (это можно показать, используя подстановку $S = \frac{1}{2(pq)^{1/2}\operatorname{ch}\theta}$). Поэтому при отыскании корней s_j можно ввести новую независимую переменную θ, полагая

$$s = \frac{1}{2(pq)^{1/2}\cos'\theta}. \tag{26}$$

При этом

$$U_z(s) = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k-z}{2}} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{1/2}\sin(z+1)\theta - \sin z\theta}{\left(\frac{p}{q}\right)^{1/2}\sin(k+1)\theta - \sin k\theta}. \tag{27}$$

Из (26) и (27) видно, что s_j определяется равенством

$$S_j = \frac{1}{2(pq)^{1/2}\cos\theta_j}, \tag{28}$$

где θ_j — корень уравнения

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{1/2}\sin(k+1)\theta - \sin k\theta = 0. \tag{29}$$

Из (24) и (27) имеем

$$\rho_j = -\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k-z}{2}} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(z+1)\theta_j - \sin z\theta_j}{\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}(k+1)\cos(k+1)\theta_j - k\cos k\theta_j\right]\left(\frac{ds}{d\theta}\right)_{s=s_j}}, \tag{30}$$

где

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)_{s=s_j} = \frac{2(pq)^{\frac{1}{2}}\cos^2\theta_j}{\sin\theta_j}.$$

Подставив значения S_j и ρ_j в (25), получим

$$P(z, n) = 2^n p^{\frac{n+k-z}{2}} q^{\frac{n-k+z}{2}} \sum_{j=1}^{2k-1} \frac{\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(z+1)\theta_j - \sin z\theta_j\right]\cos^{n-1}\theta_j\sin\theta_j}{k\cos k\theta_j - \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}}(k+1)\cos(k+1)\theta_j} \tag{31}$$

Верхний предел индекса суммирования в формуле (31) равен $2k-1$, потому что уравнение (29) имеет $2(k+1)$ корней, причем корни $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$ являются также корнями числителя выражения (27) и должны быть исключены.

В заключение произведем сравнительную оценку эффективности рассматриваемого метода и серийной процедуры, при которой решение о наличии сигнала выдается, если γ подряд следующих отсчетов превышают уровень ограничения $И_0$.

Среднее число шагов $\bar{n}_0$ между ложными обнаружениями при использовании серийной процедуры определяется формулой (2)

$$\bar{n}_0 = \frac{1-p_0^\gamma}{q_0 p_0^\gamma}. \tag{32}$$

При оценке среднего числа $\bar{n}_1$ шагов до обнаружения сигнала необходимо учитывать возможность превышения уровня ограничения отсчетами помехи, предшествующими моменту появления сигнала.

Если после ложного обнаружения анализатор сбрасывается на нуль и в процессе дальнейшего анализа учитываются лишь отсчеты, поступающие в последующие моменты времени, то величина $\bar{n}_1$ определяется следующим выражением:

$$\begin{gathered}\bar{n}_1 = q_0\bar{n}_{10} + q_0p_0\bar{n}_{11} + \cdots + q_0p_0^{\gamma-1}\bar{n}_{1\gamma-1} + \\ + q_0p_0^\gamma\bar{n}_{10} + q_0p_0^{\gamma+1}\bar{n}_{11} + \cdots + q_0p_0^{2\gamma-1}\bar{n}_{1\gamma-1} + \cdots,\end{gathered} \tag{33}$$

где $\bar{n}_{1\delta}$ — среднее число шагов до обнаружения сигнала, если к моменту его появления имеется δ подряд следующих отсчетов помехи, превысивших уровень ограничения. Выражение (33) можно привести к виду

$$\bar{n}_1 = \frac{q_0}{1-p_0^\gamma}\sum_{\delta=0}^{\gamma-1} p_0^\delta \bar{n}_{1\delta}. \tag{34}$$

Величина $\bar{n}_{1\delta}$ при $\delta = 0$ определяется формулой (2)

$$\bar{n}_{10} = \frac{1-p_1^\gamma}{q_1 p_1^\gamma}. \tag{35}$$

При $1 \leqslant \delta < \gamma - 1$ имеет место равенство

$$\bar{n}_{1\delta} = q_1\bar{n}_{10} + p_1\bar{n}_{1\delta+1} + 1. \tag{36}$$

Если $\delta = \gamma - 1$, то

$$\bar{n}_{1\gamma-1} = q_1\bar{n}_{10} + 1. \tag{37}$$

Решение уравнения (36) при условии (37) имеет вид

$$\bar{n}_{1\delta} = \frac{(1-p_1^{\gamma-\delta})(1+q_1\bar{n}_{10})}{q_1}. \tag{38}$$

Подставив значение $\bar{n}_{1\delta}$ в (35), окончательно получим

$$\bar{n}_1 = \frac{q_0}{q_1p_1^\gamma(1-p_0^\gamma)}\left\{1 - p_1^\gamma + \left[\frac{p_0}{q_0}\left(1-p_0^{\gamma-1}\right) - \frac{p_0p_1(p_1^{\gamma-1}-p_0^{\gamma-1})}{p_1-p_0}\right]\right\}. \tag{39}$$

Результаты расчета величины $\bar{n}_1$ для рассматриваемого метода и серийной процедуры представлены в таблице.

$\bar{n}_0 = 10^8$, $p_0 = 1 - p_1$

p_1	0,9	0,85	0,8	0,75
k	8	10	13	16
$\bar{n}_1$ рассм. метод	10	14	20	30
γ	8	10	11	13
$\bar{n}_1$ серийн. проц.	13	27	53	165

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Е. Башаринов, Б. С. Флейшман. Методы статистического последовательного анализа и их приложения. Изд-во «Сов. радио», 1962.

2. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Изд-во «Мир», 1964.

3. Н. Ф. Клюев. Обнаружение импульсных сигналов с помощью накопителей дискретного действия. Изд-во «Сов. радио», 1963.