ИНФОРМАЦИЯ ДВОИЧНЫХ СИГНАЛОВ СО СЛУЧАЙНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ ПРИ ОБНАРУЖЕНИИ

С. Ю. Олейников

В радиосвязи, радиолокации, радионавигации и других областях техники связи распространенным и характерным является некогерентный прием сигналов. Неопределенность фазы гармонических составляющих сигнала может быть вызвана различными причинами: условиями формирования сигнала в передающем устройстве, флюктуацией времени распространения сигнала в канале связи, случайными свойствами отражающей поверхности и т. д.

Представим сигнал, поступающий на вход приемного устройства канала связи, в виде [1]

$$y(t) = x(t, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots) + n(t),$$

где $n(t)$ — функция помехи,

$x(t, a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots)$ — функция сигнала, зависящая от времени и параметров $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$,

$a_1, a_2, \dots$ — параметры, несущие информацию о наблюдаемом процессе.

$b_1, b_2, \dots$ — случайные параметры сигнала, которые с точки зрения передачи информации можно считать паразитными.

К числу паразитных параметров можно отнести и случайную фазу принимаемого сигнала.

Для информационного анализа исследуемой операции необходимо получить зависимости количества информации $I(q)$ и информативности $V(q)$ от энергии полезного сигнала, которую можно характеризовать энергетическим отношением сигнал-помеха

$$q = \frac{2Э}{N_0},$$

где Э — энергия полезного сигнала,

N_0 — спектральная плотность помехи.

Информативностью будем называть отношение количества информации к величине средней нормированной энергии

$$V = \frac{I}{\sum\limits_{n=1}^{m} p_n q_n}$$

p_n — априорная вероятность появления сигнала, $m = 2$.

Анализ указанных зависимостей проведем как до квантования, так и после него, что позволит сравнить эффективность проведенной обработки сигнала, выяснить ее информационный к. п. д. Далее, решая вариационную задачу оптимизации условий обработки сигнала, найдем зависимость оптимального порога квантования $k_{\text{опт}}(q)$ для двух критериев согласования канала связи — минимальной вероятности ошибки и максимума получаемой информации; наконец, выясним вопрос о целесообразности регулирования порога квантования при изменении уровня приходящего сигнала для получения максимальной информации.

Исходным соотношением для подсчета количества информации, заключенного в двоичном сигнале до квантования, является формула [2]. Известно, что функция правдоподобия $P(y/x)$ для сигнала со случайной начальной фазой имеет вид [1]

$$P(y/x) = \frac{y}{\nu_0^2} e^{-\frac{y^2}{2\nu_0^2} - \frac{q}{2}} I_0\left(\frac{y\sqrt{q}}{\nu_0}\right), \tag{1}$$

где $\nu_0 = \sqrt{\frac{N_0}{2} Э}$ — среднеквадратичное значение шумовой составляющей корреляционного интеграла $\nu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} n(t)\, x(t)\, dt$,

I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Функцию правдоподобия для случая отсутствия сигнала получим, положив в выражении (1) $Э = 0$

$$P(y/_0) = \frac{y}{\nu_0^2} e^{-\frac{y^2}{2\nu_0^2}}.$$

Рассмотрим случай наибольшей неопределенности, когда априорные вероятности одинаковы и равны 0,5. Формула для подсчета количества информации приобретает вид

$$I = 1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{y}{\nu_0^2} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\nu_0^2} - \frac{q}{2}} \cdot I_0\left(\frac{y\sqrt{q}}{\nu_0}\right) \log\left[1 + \frac{e^{q/2}}{I_0\left(\frac{y\sqrt{q}}{\nu_0}\right)}\right] dy -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} \frac{y}{\nu_0^2} e^{-\frac{y^2}{2\nu_0^2}} \log\left[1 + \frac{I_0\left(\frac{y\sqrt{q}}{\nu_0}\right)}{e^{q/2}}\right] dy. \tag{2}$$

Интегралы в формуле (2) не выражаются через известные функции, поэтому для получения аналитического выражения зависимости $I(q)$ рассмотрим сначала область $q \ll 1$, где справедливы следующие допущения:

1) коэффициенты правдоподобия при малых уровнях полезного сигнала близки к 1

$$\frac{e^{q/2}}{I_0\left(\frac{y\sqrt{q}}{\nu_0}\right)} \simeq \frac{I_0\left(\frac{y\sqrt{q}}{\nu_0}\right)}{e^{q/2}} \simeq 1;$$

2) модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка можно разложить в степенной ряд, ограничиваясь только первыми двумя членами разложения

$$I_0\left(\frac{y\sqrt{q}}{\nu_0}\right) = 1 + \frac{y^2 q}{4\nu_0^2}.$$

Тогда формула (2) приобретает вид

$$I = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-q/2} - \frac{q}{2}\, e^{-q/2}\right).$$

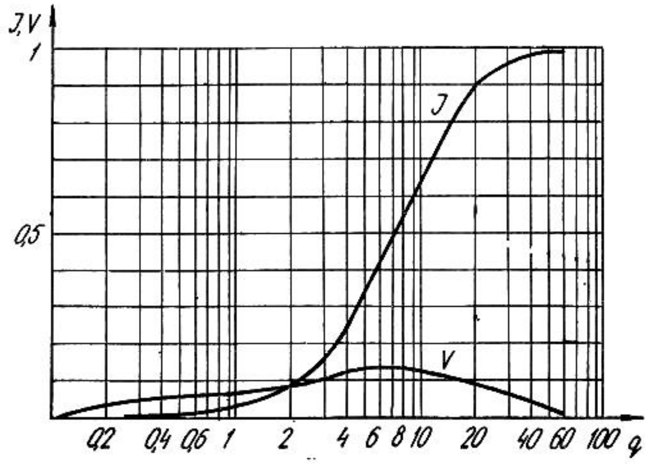

Рис. 1.

Анализируя полученное выражение, можно заключить, что первая производная от информации по параметру q при $q \to 0$ стремится к 0: при очень малых уровнях сигнала прирост получаемой информации невелик.

С помощью числового интегрирования исследовано поведение величин I, V при других значениях q. Результаты представлены на рис. 1. Характерным в полученных результатах является наличие экстремума для функции $V(q)$. Это значит, что работа при определенных уровнях полезного сигнала приведет к наибольшему уплотнению канала связи информацией на единицу энергии полезного сигнала.

На рис. 2 представлены зависимости $I(p)$ и $V(p)$ для случая $q = 1$, а также кривая $qV(p)$ для $q \gg 1$.

Подвергая сигнал, поступающий на вход решающего устройства, квантованию, мы тем самым разрушаем часть полезной информации. Выясним, при каких условиях величина информационных потерь будет наименьшей. С этой целью рассмотрим формулу для количества информации, получаемой после квантования при обнаружении двоичного сигнала [3], которая при равных априорных вероятностях запишется так:

$$I = \frac{1}{2}\left(\alpha_1 \log\frac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_2} + \beta_2 \log\frac{2\beta_2}{\alpha_1 + \beta_2} + \alpha_2 \log\frac{2\alpha_2}{\alpha_2 + \beta_1} + \beta_1 \log\frac{2\beta_1}{\alpha_2 + \beta_1}\right),$$

где $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$.

Вероятности правильного обнаружения β_2 и ложной тревоги α_1 для сигнала со случайной начальной фазой определяется следующими выражениями [1]:

$$\beta_2 = \int_{\sqrt{k}}^{\infty} s \cdot I_0(s\sqrt{q}) \cdot e^{-\frac{s^2+q}{s}} ds = Q(\sqrt{k};\ \sqrt{q}) \tag{3}$$

$$\alpha_1 = e^{-\frac{k}{2}}, \text{ где } k = \frac{y_0^2}{\nu_0^2}. \tag{4}$$

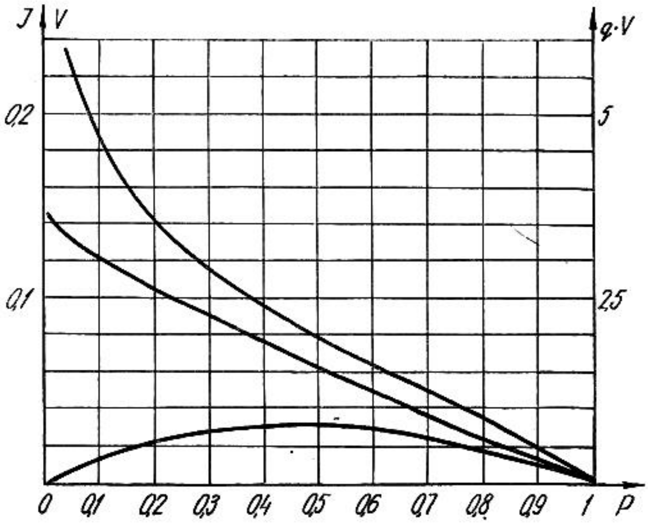

Рис. 2.

Подставляя (3) и (4) в условие максимизации I в зависимости от порога квантования [3], получим

$$\frac{e^{q/2}}{I_0(\sqrt{kq})} = \frac{\log \dfrac{Q(\sqrt{k};\sqrt{q})\,[2 - e^{-\frac{k}{2}} - Q(\sqrt{k};\sqrt{q})]}{[1 - Q(\sqrt{k};\sqrt{q})]\,[e^{-\frac{k}{2}} + Q(\sqrt{k};\sqrt{q})]}}{\log \dfrac{e^{-\frac{k}{2}}\,[2 - e^{-\frac{k}{2}} - Q(\sqrt{k};\sqrt{q})]}{(1 - e^{-\frac{k}{2}})\,[e^{-\frac{k}{2}} + Q(\sqrt{k};\sqrt{q})]}}. \tag{5}$$

С помощью этого трансцендентного уравнения, в которое входит интеграл вероятностей распределения Релея — Райса Q, находим зависимость оптимального порога квантования k от величины q, представленную на рис. 3. Уравнение (5) в области значений $q \gg 1$ преобразуется в более удобную для расчетов форму заменой функции I_0 и Q их приближенными выражениями

$$e^{\frac{q}{2} - \sqrt{kq}} = \frac{\ln 2\sqrt{\pi}(\sqrt{q} - \sqrt{k}) + (\sqrt{q} - \sqrt{k})^2}{\sqrt{2\pi\sqrt{kq}}\,\frac{k}{2}}.$$

Из графика рис. 3 видно, что при малых значениях q величина k близка к 3, при $q \gg 1$ k стремится к значению $q/4$. Чтобы провести сравнение, на рис. 3 представлен график зависимости $k(q)$, где критерием оптимума выбран минимум вероятности ошибки, для которого справедливо условие [3]

$$\frac{\alpha_1'}{\beta_2'} = \frac{e^{q/2}}{I_0(\sqrt{kq})} = 1.$$

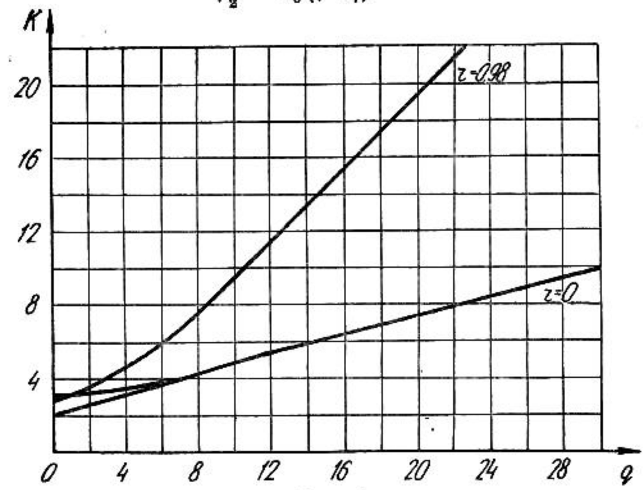

Рис. 3

При значениях $q > 10$ оптимальные пороги квантования для получения минимума вероятности ошибки и максимума информации мало отличаются друг от друга и стремятся к величине $q/4$.

Далее находим зависимости $I(q)$ и $V(q)$ для оптимально квантованного сигнала. Результаты представлены на рис. 4. Характерно, что зна-

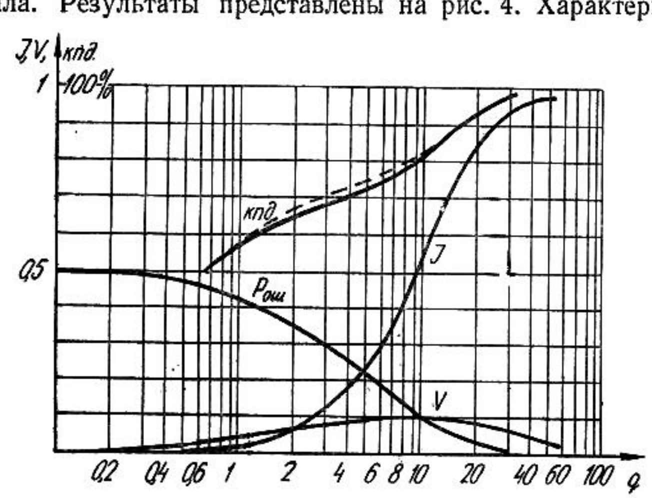

Рис. 4.

чение q, при котором величина V максимальна, сдвигается в сторону больших значений q, причем максимальное значение информативности уменьшается. На этом же рисунке приведена зависимость средней вероятности ошибки $P = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1)$ от уровня приходящего сигнала, когда порог квантования выбирается из соображений минимальной вероятности ошибки.

Полученные информационные зависимости $I(q)$ и $k_{\text{опт}}(q)$ для случая квантованной информации в основном совпадают с результатами ранее опубликованной работы [4].

Рассмотрим вопрос о целесообразности следящего порога квантования. Пусть величина принимаемого сигнала меняется в два раза по сравнению с уровнем, обеспечивающим максимальную информативность $V_{\text{макс}} = 0{,}1$ *дв. ед.*, причем порог квантования фиксирован. Информативность при этом падает до 0,07. Если же установить оптимальный порог квантования для нового значения уровня принимаемого сигнала, то получим информативность $V = 0{,}09$ *дв. ед.* Выигрыш составит 20%. Как указывалось выше, все полученные результаты относятся к случаю, когда априорные вероятности сигнала одинаковы; известно, однако, что условие равенства априорных вероятностей не является оптимальным для получения максимального количества информации. С помощью уравнения

$$\frac{\alpha_1'}{\beta_1'} = \frac{1 - \alpha_1(1+\varepsilon)}{1 - \beta_2(1+\varepsilon)} \frac{\log \dfrac{\beta_1}{\beta_2 \cdot \varepsilon}}{\log \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 \cdot \varepsilon}},$$

где $\varepsilon = \dfrac{p(\alpha_2 - \beta_1) + \beta_1}{p(\alpha_1 - \beta_2) + \beta_2}$, были получены результаты, позволяющие сравнить информационный к. п. д., получаемый при согласовании канала связи по всем параметрам, с информационным к. п. д., получаемым при фиксированном распределении априорных вероятностей (случай наибольшей неопределенности). На рис. 3 характер изменения информационного к. п. д. при полном согласовании представлен пунктирной кривой. Выигрыш, получаемый благодаря полному согласованию, по сравнению со случаем наибольшей неопределенности не превышает $3 \div 4\%$.

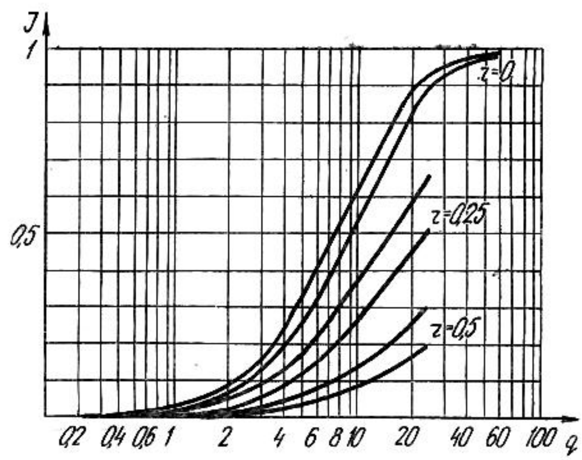

Рис. 5.

Обнаружение двоичных сигналов можно рассматривать как частный случай различения двух амплитудно-манипулированных сигналов при индексе манипуляции $r = q_2/q_1 = 0$. При значениях $r > 0$ количество аналоговой и дискретной информации уменьшается по сравнению со случаем $r = 0$. При этом кривая зависимости $k_{\text{опт}}(q)$ вращается вокруг точки с координатами $q = 1$, $k = 3$; а при $r \to 1$ стремится к прямой с уравнением $k = q$ (см. рис. 3). На рис. 5 представлены зависимости $I(q)$ до и после квантования при $r = 0{,}5$ и $r = 0{,}25$.

ВЫВОДЫ

1. Представляется возможность путем правильного выбора энергетического соотношения сигнал-шум получить наибольшее уплотнение канала связи информацией, приходящейся на единицу энергии полезного сигнала. Для $p = 0{,}5$ величина $q_{\text{опт}} \cong 7$, при этом информативность $V_{\text{макс}} = 0{,}14$ *дв. ед.*

2. При обнаружении сигнала со случайной начальной фазой можно, в зависимости от предъявляемых требований, выбрать наиболее подходящий режим работы, пользуясь кривыми $I(q)$ и $P(q)$, представляемыми на рис. 4. Максимальная информативность квантованного сигнала $V_{макс}$ равная 0,1 *дв. ед.* достигается при $q_{опт} \approxeq 9$.

3. Введение следящего порога квантования позволяет получить существенный выигрыш по информативности.

4. При $q > 10$ можно установить единый порог квантования, выгодный с точки зрения минимизации средней вероятности ошибки, так и максимизации получаемой информации.

5. Для квантованных на два уровня сигналов выбор оптимального распределения априорных вероятностей в общем случае существенно влияет на величину информации, однако при оптимальном пороге квантования не дает значительного выигрыша по сравнению со случаем равных априорных вероятностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Д. Ширман, В. И. Голиков. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. Изд-во «Сов. радио», 1963.

2. Х. М. Виленский. Информация и информативность двоичных сигналов. (В этом сборнике).

3. Х. М. Виленский. Информатика двоичных систем. Тезисы докладов на 22 и 23 научной конференции. Изд-во ХАИ, 1965 и 1966.

4. Ф. П. Тарасенко. Об оптимальном пороге квантования принимаемого сигнала для бинарных систем обнаружения. «Известия вузов МВО СССР. Радиотехника», 1959, № 3.