ИНФОРМАЦИЯ И ИНФОРМАТИВНОСТЬ ДВОИЧНЫХ СИГНАЛОВ

Х. М. Виленский

Классический критерий минимума среднего риска дает оценку системы передачи информации с точки зрения вероятностей и значимостей ошибочных и правильных решений. Для ряда практических применений и, в частности, для большинства современных радиосистем, такая оценка недостаточна, ибо существенную роль играет использование сигнала и канала по мощности, времени и спектру. В связи с этим в последние годы отмечается все расширяющееся проникновение информационных критериев в технику связи и управления, цифровую систему автоматики, вычислительную технику, теорию надежности и т. д.

Накопленный за последние годы опыт разработки радиосистем различного назначения [1, 2, 3] показывает, что технически оправданными информационными критериями являются критерий максимума информации (выражающий скорость передачи информации на символ или в единицу времени) и критерий максимума информативности (выражающий количество принятой информации, приходящееся на единицу затраченной средней энергии сигнала). Для пользования этими критериями требуются явные вычисления информации и информативности реальных каналов связи.

Известно, что любые дискретные сообщения можно перевести в двоичный алфавит, который наиболее удобен для аппаратурной реализации. Ансамбль сигналов любой двоичной системы состоит из двух сигналов, поэтому для большей общности, наглядности и упрощения записей примем следующую систему обозначений: $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — сигналы, $p_1 = p$ и $p_2 = 1 - p$ — априорные вероятности, $Э_1$ и $Э_2$ — энергии, $q_1 = \frac{2Э_1}{N_0}$ и $q_2 = \frac{2Э_2}{N_0}$ — энергетические отношения сигнал-помеха соответственно сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (N_0 — спектральная плотность помехи), $q_{ср} = p_1q_1 + p_2q_2$ — среднее энергетическое отношение сигнал-помеха, при $q_1 = q_2 = q$ величина $q_{ср} = q$.

В настоящей работе исследуются аналоговые информационные показатели двоичных сигналов — информация и информативность. Предполагается, что над принимаемым сигналом производятся лишь те необратимые операции, которые достаточны для извлечения из него всей возможной информации. Известно [4], что эти операции формируют функцию правдоподобия или любую функцию, являющуюся информационным эквивалентом функции правдоподобия. Выходное напряжение такого «достаточного» приемника представляет собой смесь сигнала и шума и является непрерывной величиной даже в том случае, когда на вход приемника поступают дискретные сигналы. Информация, содержащаяся в выходном непрерывном напряжении (названная выше аналоговой), во многих случаях не может быть непосредственно использована. Тогда применяется дальнейшая обработка сигнала с целью извлечения из него цифровой (дискретной) информации, что связано с потерями информации. Знание аналоговой информации позволяет оценить степень совершенства методов и устройств (квантующих, накопительных, решающих), которые служат для получения цифровой информации.

Аналоговая информация двоичных систем произвольного типа

Выведем соотношения для вычисления аналоговой информации и информативности двоичных сигналов произвольного типа, не делая никаких предположений о характере действующей в канале помехи. Воспользуемся для этого основным информационным соотношением

$$I = H(x) - M_y[H(x/y)], \tag{1}$$

где x и y — многомерные векторы, представляющие соответственно посланный и наблюдаемый на входе приемника сигнал, $H(x)$ — энтропия априорного распределения $p(x)$, $H(x/y)$ — энтропия апостериорного распределения $p(x)$, $M_y[H(x/y)]$ — усредненная по всем значениям y энтропия $H(x/y)$,

$$M_y[H(x/y)] = -\iint p(x)\,P(y/x)\lg[P(x/y)]\,dx\,dy, \tag{2}$$

$P(y/x)$ — функция правдоподобия.

Для двоичного сигнала последнее соотношение преобразуется к виду

$$M_y[H(x/y)] = -p_1\int P(y/x_1)\lg[P(x_1/y)]\,dy - \\ - p_2\int P(y/x_2)\lg[P(x_2/y)]\,dy, \tag{3}$$

где $P(y/x_1)$ и $P(y/x_2)$, $P(x_1/y)$ и $P(x_2/y)$ — функции правдоподобия и апостериорные плотности вероятностей наличия в принятом (наблюдаемом) колебании сигналов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соответственно.

Воспользовавшись известным соотношением для обобщенного коэффициента правдоподобия [5]

$$l_1 = \frac{p_1P(y/x_1)}{p_2P(y/x_2)} = \frac{P(x_1/y)}{P(x_2/y)} \tag{4}$$

и очевидным соотношением

$$P(x_2/y) = 1 - P(x_1/y),$$

находим

$$P(x_1/y) = \frac{l_1}{1+l_1}, \quad P(x_2/y) = \frac{1}{1+l_1}.$$

Аналогично (4) определяем величину $l_2 = \frac{1}{l_1}$.

Подставляя теперь выражения для $P(x_1/y)$ и $P(x_2/y)$ в (3) и возвращаясь к исходному соотношению (1), будем иметь

$$I = -p_1\lg p_1 - p_2\lg p_2 - p_1\int P(y/x_1)\lg[1 + l_2(y)]\,dy - \\ - p_2\int P(y/x_2)\lg[1 + l_1(y)]\,dy. \tag{5}$$

Полученное общее соотношение для аналоговой информации, как и следовало ожидать, совершенно симметрично относительно индексов (сигналов) 1 и 2, однако индексы у функции правдоподобия и коэффициента правдоподобия в каждом подынтегральном выражении различны, т. е. каждая подынтегральная функция содержит функцию правдоподобия одного и коэффициент правдоподобия другого из различаемых сигналов.

При $p_1 = p_2$ информационные интегралы, входящие в (5), как это можно показать, равны друг другу. Тогда выражение для аналоговой информации принимает наиболее простой вид

$$I = 1 - \int P(y/x_i) \lg [1 + l_j(y)]\, dy; \quad i,\ j = 1,\ 2; \quad i \neq j. \tag{6}$$

Отметим, что формула для аналоговой информации, применительно к частному случаю обнаружения радиолокационного сигнала, приводится в работе [6]. Эта формула, однако, отличается от полученных здесь формул (5) и (6).

Переходя от информации к информативности, заметим прежде всего, что хотя информация сигнала всегда стремится к нулю при $q \to 0$ или $p \to 0$, изменяется монотонно с изменением этих величин, информативность сигнала при этом в общем случае изменяется не монотонно и не стремится к нулю.

Отправляясь от исходного определения информативности

$$V = \frac{I}{q} \tag{7}$$

и составляя условие $V' = 0$, находим экстремальное значение информативности $V_э = I'$, которое наступает при $q_э = \frac{I}{I'}$ (I' — значение производной I по параметру q в точке $q = q_э$). Отсюда следует, что в точках экстремума всегда

$$\frac{I}{q} = \frac{dI}{dq} \tag{8}$$

и, в частности, при $q \to 0$

$$V(0) = \frac{0}{0} = \lim_{q \to 0} I'(q). \tag{9}$$

Этот предел можно, как видно из (5), найти также по формуле

$$V(0) = -\int \{\lim_{q \to 0} [P(y,\ q)]\}\, dy, \tag{10}$$

если только несобственные интегралы в (5) и (10) удовлетворяют условиям непрерывной дифференцируемости и равномерной сходимости.

Нам остается максимизировать информацию и информативность по параметру p. Для этого представим выражение (5) в виде

$$I = -p \lg p - (1 - p) \lg (1 - p) - \varphi (p,\ q). \tag{11}$$

На основании (11) можно написать следующее:

1) для $q \gg 1$, когда энтропия помехи $\varphi(p,\ q) \to 0$,

$$I \approx -p \lg p - (1 - p) \lg (1 - p); \tag{12}$$

2) для $q \ll 1$, когда энтропия помехи $\varphi(p, q)$ стремится к энтропии сигнала,

$$I = -p \lg p - (1-p) \lg (1-p) + p \lg p \varphi_1(q) + \\ + [(1-p) \lg (1-p)] \varphi_2(q). \tag{13}$$

В обоих случаях, из условия $\frac{dI}{dp} = 0$, оптимальная априорная вероятность оказывается равной 0,5. Этот вывод справедлив для любых значений q, что вполне естественно: в аналоговом случае передаваемые сигналы в одинаковой мере подвержены влиянию помех и способа обработки, так что максимум информации всегда совпадает с максимумом энтропии источника.

Иначе обстоит дело при максимизации информативности сигнала. Отметим сначала тот единственный случай, когда информативность, как и информация, достигает максимума при $p = 0{,}5$. Такое положение имеет место при различении сигналов с одинаковой энергией, когда

$$q_{\text{ср}} = p_1 q + p_2 q = q$$

оказывается независимой от априорной вероятности p.

Применительно к задаче обнаружения имеем для $q \gg 1$ (Здесь $q_2 = 0$, $q_1 = q$)

$$V = \frac{I}{pq} = -\frac{p \lg p + (1-p) \lg (1-p)}{pq},$$

а при $q \ll 1$

$$V = \frac{I}{pq} = -\lg p \frac{1-\varphi_1(q)}{q} - \frac{(1-p) \lg (1-p)}{p} \frac{1-\varphi_2(q)}{q}.$$

Из условия $\frac{dV}{dp} = 0$ находим, что в обоих случаях $V = V_{\text{макс}}$ при $p \to 0$. При любом q

$$V_{\text{макс}} = \frac{1}{q} \lim_{p \to 0} I'(p). \tag{14}$$

Информация и информативность основных типов двоичных сигналов

Рассмотрим с информационной точки зрения три типа двоичных сигналов: сигнал с полностью известными параметрами, сигнал с неизвестными (паразитными) параметрами, шумовой сигнал, принимаемый на фоне белой гауссовой аддитивной помехи.

Начнем с парафазного двоичного сигнала, удовлетворяющего условию $x_1(t) = -x_2(t)$. Такой сигнал соответствует предельному случаю фазовой манипуляции полностью известного сигнала. Требуемые (для расчета) функции правдоподобия можно получить следующим образом.

Одномерные функции правдоподобия для k-й выборки имеют здесь вид

$$P(y_k/x_{1k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-(y_k - x_k)^2}{2\sigma^2}}, \tag{15}$$

$$P(y_k/x_{2k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-(y_k + x_k)^2}{2\sigma^2}}, \tag{16}$$

где $\sigma = N_0 F$ — дисперсия помехи, F — полоса частот.

Для решения поставленной задачи необходимо перейти к многомерным (в случае белого шума — к бесконечно-мерным) функциям правдоподобия, которые, как показано в [7] применительно к (15), имеют вид

$$P(z/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,v_0} e^{\frac{-(z-Э)^2}{2v_0^2}},$$

$$P(z/x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,v_0} e^{\frac{-(z+Э)^2}{2v_0^2}},$$

где z — оптимально преобразованное колебание y на выходе оптимального фильтра, являющееся одномерной гауссовой величиной с дисперсией

$$v_0^2 = \frac{ЭN_0}{2}.$$

Учитывая, что

$$\frac{Э}{v_0} = \sqrt{\frac{2Э}{N_0}} = \sqrt{q},$$

имеем

$$P(z/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,v_0} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{v_0} - \sqrt{q}\right)^2},$$

$$P(z/x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,v_0} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{v_0} + \sqrt{q}\right)^2}.$$

Поскольку

$$P(z/x_1) = p(y/x_1) = P[y(t)/x_1(t)],$$
$$P(z/x_2) = P(y/x_2) = P[y(t)/x_2(t)],$$

в формуле (5) можно оперировать одномерной величиной z вместо многомерного вектора y.

Сделанный вывод вытекает из общего свойства оптимальной схемы обработки двоичных сигналов: такая схема всегда преобразует многомерный (бесконечно-мерный) входной сигнал в одномерный выходной сигнал (этим обстоятельством мы будем пользоваться далее без особых оговорок).

Считаем, что при вычислении информации по формуле (5) дисперсия выходного эффекта исчезает в процессе интегрирования, функциям правдоподобия для рассматриваемого парафазного сигнала можно придать простой вид

$$P(y/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-\sqrt{q})^2}, \tag{17}$$

$$P(y/x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y+\sqrt{q})^2}, \tag{18}$$

где вместо z мы сохранили обозначение y.

Подставляя (17, 18) в (5), находим выраженную в двоичных единицах информацию

$$I = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-\sqrt{q})^2} \lg\left(1 + e^{-2y\sqrt{q}}\right) dy. \tag{19}$$

При $q \to 0$ это соотношение можно переписать в виде

$$I = 1 - e^{-\frac{q}{2}},$$

при этом информативность

$$V = \frac{1 - e^{-\frac{q}{2}}}{q},$$

откуда следует, что потенциальная информативность

$$V_{\text{макс}} = \lim_{q \to 0} V = 0,5 \text{ двоичных единиц.}$$

В предельном случае амплитудной манипуляции (случай обнаружения) функции правдоподобия имеют вид

$$P(y/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-\sqrt{q})^2},$$

$$P(y/x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2},$$

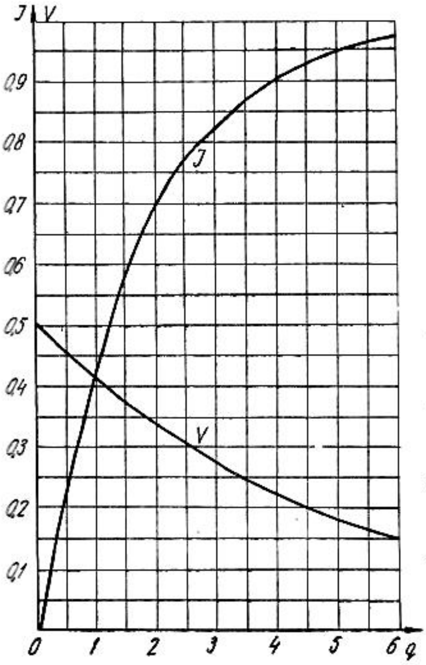

Рис. 1.

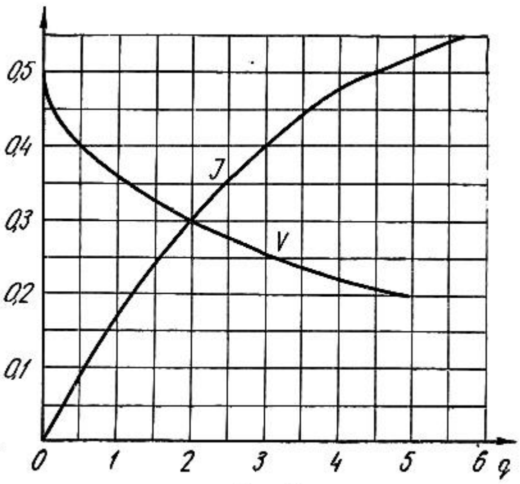

Рис. 2.

а информация (при $p = 0,5$)

$$I = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(y-\sqrt{q})^2} \lg\left[1 + \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{e^{-\frac{1}{2}(y-\sqrt{q})^2}}\right] dy. \tag{20}$$

При $q \to 0$ имеем

$$I = 1 - e^{-\frac{q}{4}}.$$

Отсюда снова получаем $V_{\text{макс}} = 0,5$ двоичных единиц (с учетом того, что средняя энергия сигнала теперь в 2 раза меньше). Вместе с этим при

$q \to 0$ и $p \to 0$ из (7) получаем абсолютный максимум информативности $V_{макс} = 0{,}5$ натуральных единиц информации.

На рис. 1 и 2 представлены полные информационные характеристики фазо-манипулированных и амплитудно-манипулированных сигналов указанного типа.

В качестве флюктуирующего сигнала рассмотрим сигнал со случайной равномерно-распределенной начальной фазой и случайной, распределенной по закону Релея амплитудой. Бесконечно-мерные функции правдоподобия (при $q_1 = q,\ q_2 = 0,\ p_1 = p_2$) имеют здесь вид

$$P(y/x_1) = \frac{y}{1+\frac{q}{2}} e^{-\frac{y^2}{2\left(1+\frac{q}{2}\right)}},\quad P(y/x_2) = ye^{-\frac{y^2}{2}},$$

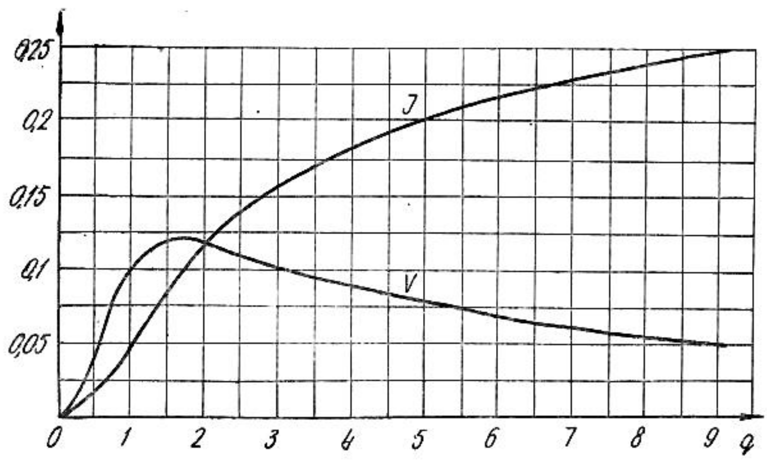

Рис. 3.

а информация, согласно (5),

$$I = 1 - \frac{1}{1+\frac{q}{2}} \int\limits_0^\infty ye^{-\frac{y^2}{2\left(1+\frac{q}{2}\right)}} \lg\left[1 + \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{e^{-\frac{y^2}{2\left(1+\frac{q}{2}\right)}}}\right] dy. \tag{21}$$

Пользуясь (10), легко установить, что при $q \to 0$ информативность $V_{мин} = 0$; это характерно для сигналов с паразитными параметрами. На рис. 3 представлены соответствующие информационные характеристики, из которых видно, что потенциальная информативность такого сигнала, равная 0,12 двоичных единиц, достигается при $q \approx 1{,}5$.

При разрешении флюктуирующего сигнала рассматриваемого типа от такого же мешающего сигнала (при наличии гауссового шума), коэффициент использования энергии, как показано в [7],

$$\gamma = 1 - \rho^2 \frac{E}{E + N_0},$$

где ρ — коэффициент корреляции, E — средняя энергия мешающего сигнала. С учетом этого легко получить информационные характеристики разрешения двух сигналов, полагая в формуле (21) величину q уменьшенной в γ раз.

В задаче обнаружения одного гауссового сигнала на фоне другого такого же гауссового сигнала (эти сигналы могут отличаться только дисперсиями, равными соответственно σ_c^2 и σ_n^2) функции правдоподобия получают следующий вид

$$P(y/x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n\sqrt{1+q}}\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma_n^2(1+q)}},$$

$$P(y/x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_n}\,e^{-\frac{y^2}{2\sigma_n^2}}.$$

При малых q информация такого сигнала приводится к простой формуле (при $p = 0{,}5$)

$$I = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\lg\left(1 + e^{-\frac{qy^2}{2}}\right)dy.$$

Отсюда следует, что потенциальная информативность, равная 0,25 натуральных единиц, достигается здесь, как и у полностью известного сигнала, при $q \to 0$.

Информационные характеристики двоичного гауссового сигнала (при $p = 0{,}5$) и «полного» (идеального шенноновского) гауссового сигнала, для которого, согласно [8], информативность на символ (при базе, равной единице)

$$V = \frac{1}{2}\,\frac{\ln(1+q)}{q},$$

представлены на рис. 4.

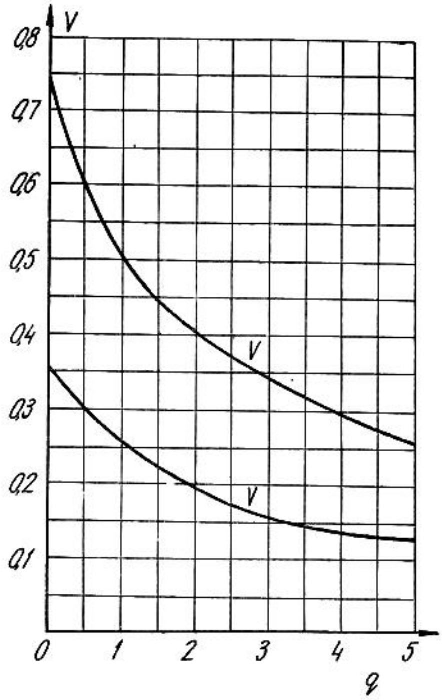

Рис. 4.

Для анализа любых других видов информации и способов манипуляции необходимо располагать соответствующими функциями правдоподобия. В приложении приведены в качестве примера функции правдоподобия для нескольких видов двоичной информации (сигналов с полностью известными параметрами), которые могут использоваться для решения ряда информационных задач.

ВЫВОДЫ

1. Получены выражения для нахождения информации и информативности произвольной аналоговой двоичной системы. Эти информационные показатели оптимизированы по априорной вероятности и энергетическому параметру.

2. Найдены полные информационные характеристики трех основных типов двоичных сигналов, позволяющие установить некоторые общие закономерности процесса передачи двоичной информации, в том числе

асимптотические данные для проектирования оптимальных информационных систем.

3. В противоположность информации сигнала, которая всегда достигает максимума при $p = 0{,}5$ и $q \to \infty$, информативность максимальна при значениях p и q, зависящих от типа сигнала. При $q = q_{\text{опт}}$ информативность равна крутизне информационной характеристики $I = I(q)$.

4. Информативность «полностью известного» и «полностью случайного» сигналов достигает максимума при $q \to 0$ — в первом случае она равна 0,5 двоичных единиц (0,35 натуральных единиц), во втором случае — 0,25 натуральных единиц (в обоих случаях при заданном $p = 0{,}5$). Абсолютный максимум информативности этих же сигналов, равный 0,5 натуральных единиц, достигается, когда одновременно $q \to 0$ и $p \to 0$.

5. Информативность двоичного гауссового сигнала (при $p = 0{,}5$) в два раза меньше информативности идеального гауссового сигнала, имеющего структуру белого гауссового шума.

6. Информативность двоичных сигналов с паразитными параметрами достигает максимума при $q > 0$, а потенциальная информативность достигается при $p \to 0$. Информативность сигналов с распределенной по закону Релея амплитудой и равновероятной фазой достигает максимума, равного 0,12 двоичных единиц, при $q \cong 1{,}5$ (если априорные вероятности p_1 и p_2 одинаковы).

7. Оптимальная априорная вероятность двоичного сигнала зависит от глубины манипуляции $r = \frac{q_2}{q_1}$: она изменяется от 0 до 0,5 при изменении r от 0 до 1.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании оптимальных систем передачи, обработки и хранения информации в устройствах различного назначения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Функции правдоподобия двоичных сигналов, (не содержащих паразитных параметров), для различных видов информации

Вид информации	Функции правдоподобия
1. Обнаружение амплитудно-манипулированных сигналов ($q_1 = q$; $q_2 = 0$)	$\operatorname{exs}\left[-\frac{1}{2}(y - \sqrt{q})\right]^2$; $\operatorname{exs}\left[-\frac{1}{2}y^2\right]$.
2. Различение амплитудно-манипулированных сигналов	$\operatorname{exs}\left[-\frac{1}{2}(y - \sqrt{q_1})^2\right]$; $\operatorname{exs}\left[-\frac{1}{2}(y - \sqrt{q_2})^2\right]$.
3. Различение фазо-манипулированных сигналов	$\operatorname{exs}\left[-\frac{1}{2}(y - \sqrt{q})^2\right]$; $\operatorname{exs}\left[-\frac{1}{2}(y + \sqrt{q})^2\right]$.
4. Различение частотно-манипулированных сигналов	$\operatorname{exs}\left[-\frac{1}{2}\left(y - \sqrt{\frac{q}{2}}\right)^2\right]$; $\operatorname{exs}\left[-\frac{1}{2}\left(y + \sqrt{\frac{q}{2}}\right)^2\right]$.
5. Различение амплитудно- и фазо-манипулированных сигналов	$\operatorname{exs}\left[-\frac{1}{2}(y - \sqrt{q_1})^2\right]$; $\operatorname{exs}\left[-\frac{1}{2}(y + \sqrt{q_2})^2\right]$.
6. Различение амплитудно- и частотно-манипулированных сигналов.	$\operatorname{exs}\left[-\frac{1}{2}\left(y - \sqrt{\frac{q_1}{2}}\right)^2\right]$; $\operatorname{exs}\left[-\frac{1}{2}\left(y +\right.\right.$

Продолжение

Вид информации	Функции правдоподобия
	$+\sqrt{\frac{q_2}{2}}\Big)^2\Big]$.
7. Разрешение одного сигнала от другого сигнала	$\mathrm{exs}\left[-\frac{1}{2}\left(y-\sqrt{\frac{q}{2}(1-\rho)}\right)^2\right]$; $\mathrm{exs}\left[-\frac{1}{2}y^2\right]$.
8. Взаимное разрешение двух сигналов	$\mathrm{exs}\left[-\frac{1}{2}\left(y-\sqrt{\frac{q}{2}(1-\rho)}\right)^2\right]$; $\mathrm{exs}\left[-\frac{1}{2}\left(y+\sqrt{\frac{q}{2}(1-\rho)}\right)^2\right]$.

Примечания. Нормирующий множитель $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ везде для простоты опущен; в п. 3, 4, 7, 8 $q_1=q_2=q$; в п. 4 и 6 сигналы ортогональны; в п. 3 и 5 сдвиг фаз равен π; в п. 7 и 8 коэффициент взаимной корреляции

$$\rho=\frac{1}{Э}\int_0^T x_1(t)\,x_2(t)\,dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Финк. Теория передачи дискретной информации. Изд-во «Сов. радио» М., 1963.
2. Сборник статей «Передача цифровой информации» (перевод под ред. С. И. Самойленко). Изд-во ИЛ, М., 1963.
3. А. Г. Зюко. Помехоустойчивость и эффективность систем связи. Связьиздат, М., 1963.
4. С. Е. Фалькович. Прием радиолокационных сигналов на фоне флюктуационных помех. Изд-во «Сов. радио», М., 1961.
5. Д. Ван-Митер, Д. Мидлтон. Современные статистические методы в теории приема сигналов. Сборник статей «Прием сигналов при наличии шума» (перевод под редакцией Л. С. Гуткина). Изд-во ИЛ., М., 1960.
6. Ф. П. Тарасенко. Сравнение методов радиолокационного приема с точки зрения теории информации. «Радиотехника», 1959, № 7.
7. Я. Д. Ширман, В. Н. Голиков. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. Изд-во «Сов. радио», 1963.
8. К. Шеннон. Работы по теории информации и кибернетике. Изд-во ИЛ, М., 1963.