К ВОПРОСУ О СТАТИСТИКЕ ОШИБОК В КАНАЛАХ СВЯЗИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

А. С. Масичук, Н. П. Суворов

Известно [1 — 3], что при передаче двоичной информации по каналам связи случайные ошибки, возникающие при этом в результате воздействия помех, группируются в пачки различной длины. От того, насколько объективно учитывается этот факт, зависит эффект решения целого ряда практически важных задач (выбор алгоритма кодирования, моделирование каналов и систем связи и т. п.).

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы по возможности полнее отразить математически причинно-следственную взаимосвязь процесса образования пакетов ошибок. Вывод формул для расчета вероятности появления определенного числа пакетов ошибок на заданном интервале времени основан на следующих предположениях:

а) каждый пакет ошибок вызывается своей, не зависимой от других, физической причиной;

б) моменты возникновения причин пакетов ошибок никак не связаны с их длительностью, а совпадение начал двух и более причин практически невозможно;

в) закон распределения длин пакетов — показательный, т. е.

$$F(t) = 1 - e^{-\nu t},$$

где $\tau_{\text{ср}} = \frac{1}{\nu}$ — средняя длина пакета;

г) возможно перекрытие пачек ошибок, состоящее в том, что в течение интервала времени t может одновременно действовать несколько причин ошибок.

На основании сделанных предположений можно сказать, что моменты начал пачек ошибок образуют простейший поток с параметром $\lambda = \text{const}$. (λ — среднее число моментов возникновения пакетов ошибок). В этом случае вероятность того, что в течение интервала времени t появятся k начал пачек ошибок, будет равна

$$v_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \tag{1}$$

Если поток начал пачек нестационарен, то выражение (1) имеет вид

$$v_k(\tau, \tau + \xi) = \frac{[\Lambda(\tau, \tau + \xi)]^k}{k!} e^{-\Lambda(\tau, \tau+\xi)}, \tag{2}$$

где $\Lambda(\tau, \tau + \xi) = \int\limits_{\tau}^{\tau+\xi} \lambda(t)\,dt$ — среднее число моментов возникновения пакетов ошибок на интервале $[\tau, \tau + \xi]$;

$\lambda(t)$ — мгновенное значение параметра;

τ — начало рассматриваемого промежутка времени.

Рассмотрим теперь возможные варианты воздействия помех на канал связи. В любой момент времени t канал связи может оказаться в одном из следующих состояний:

канал свободен от помех;

в канале действует одна причина, вызывающая пачку ошибок;

в канале действуют две причины, вызывающие каждая пачку ошибок, и так далее;

в канале действуют n причин.

Задача состоит в определении вероятного состояния канала связи $p_k(t)$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ для любого момента времени t.

Если известно, что в начальный момент времени t_0 в канале действует k причин ошибок (при этом $p_k(t_0) = 1$, а $p_{j \neq k}(t_0) = 0$, $j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$), то за любой произвольный промежуток времени $[t_0, t_0 + t_1]$ априорно можно ожидать какого-то нового распределения вероятностей $p_k(t_1)$, а в момент времени t_2 — распределение вероятностей $p_k(t_2)$ и так далее с вероятностями перехода в эти состояния $p_{k,i}(t_0, t_0 + t_1)$ $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Определение искомых вероятностей возможных состояний канала связи через переходные вероятности $p_{k,i}(t_0, t_0 + t_1) = (p_{k,i}(t)$ облегчается применением математического аппарата марковских процессов, для которых неизвестные вероятности состояний $p_k(t)$ определяются из обыкновенных интегродифференциальных уравнений.

Искомые вероятности $p_k(t)$ находят из системы $n + 1$ дифференциальных уравнений, известных в теории массового обслуживания как уравнения Эрланга:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \nu p_1(t),\\
&\frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - (\lambda + \nu)\, p_1(t) + 2\nu p_2(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\nu)\, p_k(t) + (k+1)\,\nu p_{k+1}(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - n\nu p_n(t).
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Интегрируя эти уравнения при известных начальных условиях для $t_0 = 0$, получаем зависимость искомых вероятностей $p_k(t)$ от параметров λ и ν. Для этих вероятностей при достаточно большом значении t существуют предельные стационарные значения вероятностей p_k, равные

$$p_k = \lim_{t \to \infty} p_k(t).$$

Так как при этом все $\frac{dp_k}{dt} = 0$, то система дифференциальных уравнений (3) превращается в систему обычных алгебраических уравнений, из которых для любого значения $k=0, 1, 2, \ldots, n$ получаем

$$p_k = \frac{\lambda^k}{\nu^k k!} p_0 = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \tag{4}$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\nu}$ — приведенная плотность потока начал пакетов ошибок.

Из условия нормировки

$$\sum_{k=0}^{n} p_{\text{к}} = p_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} = 1 \tag{5}$$

определяем

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}. \tag{6}$$

Выражение (4) окончательно примет вид

$$p_{\text{к}} = \frac{\rho^k}{k! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n. \tag{7}$$

Зная параметр потока начал пачек ошибок λ и математическое ожидание длины пакета $\tau_{\text{ср}} = \frac{1}{\nu}$ (по материалам статистических испытаний канала связи), можно определить вероятность $p_{\text{к}}$ того, что в произвольно взятый момент времени в канале связи одновременно будут действовать k причин пачек ошибок. Тем самым учитывается эффект перекрытия пакетов ошибок во времени. При решении задачи большое значение имела предпосылка о показательном законе распределения длин пакетов ошибок, так как только в этом случае процесс перехода канала связи из одного состояния в другое является марковским. Однако, основываясь на результатах работы [5], можно показать, что конечные формулы (6), (7) будут справедливы при любом законе распределения длин пакетов.

При практических вычислениях надо знать n — число причин ошибок, одновременно действующих в канале связи, что не всегда может быть известно. Поэтому попытаемся формулы (6), (7) несколько преобразовать. При $n \to \infty$ выражение (7) имеет вид

$$p_{\text{к}} = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}.$$

Но при $n \to \infty$ вывод формул (6), (7) несправедлив, так как марковский процесс определен для случая конечного состояния систем. Для проведения дальнейшего анализа при $n \to \infty$ можно воспользоваться методом производящих функций [4].

Составление дифференциальных уравнений при $n \to \infty$ в принципе ничем не отличается от указанного ранее при ограниченном n, только канал уже может переходить из состояния n в $(n+1)$ и так далее.

При бесконечном множестве различных состояний канала связи имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \nu p_1(t),$$

$$\frac{dp_к(t)}{dt} = \lambda p_{к-1}(t) - (\lambda + k\nu)\, p_к(t) + \nu(k+1)\, p_{к+1}(t) \quad k > 0. \tag{8}$$

Решение этой системы методами интегрирования — довольно сложная задача. Однако для всех $k > 0$ система (8) состоит из уравнений одинакового типа, что позволяет применить для ее решения метод производящих функций.

Пусть

$$\Phi(t,\ x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_к(t)\, x^k - \tag{9}$$

ряд, абсолютно сходящийся при любых t и $|x| \leqslant 1$.

Если определить вид производящей функции (9), то, разложив ее в ряд по степеням k можно будет определить и вероятности $p_к(t)$, являющиеся коэффициентами разложения.

Дифференцирование равенства (9) по t дает

$$\frac{\partial \Phi(t,\ x)}{\partial t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{dp_к(t)}{dt} \cdot x^k. \tag{10}$$

Подставив значения из системы (8) в (10), получим

$$\frac{\partial \Phi(t,\ x)}{\partial t} = -\lambda p_0(t) + \nu p_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} [\lambda p_{k-1}(t) -$$

$$- (\lambda + k\nu)\, p_к(t) + \nu(k+1)\, p_{k+1}(t)]\, x^k =$$

$$= \lambda(x-1) \sum_{k=0}^{\infty} p_к(t)\, x^k - \nu(x-1) \sum_{k=1}^{\infty} k p_к(t)\, x^{k-1}$$

$$\frac{\partial \Phi(t,\ x)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_к(t)\, x^{k-1}. \tag{11}$$

Ряд (11) при $x = 1$ равен математическому ожиданию числа действующих в канале причин ошибок. Эта величина конечна, и, следовательно, дифференцирование ряда правомерно, а поэтому

$$\frac{\partial \Phi(t,\ x)}{\partial t} = \lambda(x-1)\, \Phi(t,\ x) - \nu(x-1) \frac{\partial \Phi(t,\ x)}{\partial x}. \tag{12}$$

Будем искать производящую функцию в виде

$$\Phi(t,\ x) = e^{\rho(x-1)(1-e^{-\nu t})} F(t,\ x),$$

где $F(t,\ x)$ — новая неизвестная функция.

Обозначим $e^{\rho(x-1)(1-e^{-\nu t})} = G(t,\ x)$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= G \frac{\partial F}{\partial t} + FG\lambda(x-1)\, e^{-\nu t} \\ \frac{\partial \Phi}{dx} &= G \frac{\partial F}{\partial x} + FG\rho(1 - e^{-\nu t}). \end{aligned} \tag{13}$$

Подставим (13) в (12)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + (x-1)\nu\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \lambda(x-1)\Phi = G\left\{\frac{\partial F}{\partial t} + F\lambda(x-1)e^{-\nu t} + \right.$$

$$\left. + (x-1)\nu\frac{\partial F}{\partial x} + (x-1)\lambda(1-e^{-\nu t})F - \lambda(x-1)F\right\} =$$

$$= G\left\{\frac{\partial F}{\partial t} + (x-1)\nu\frac{\partial F}{\partial x}\right\}.$$

Таким образом, выражение (12) эквивалентно следующему уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (x-1)\nu\frac{\partial F}{\partial x} = 0. \tag{14}$$

Введем вспомогательную функцию

$$L(t, x) = (x-1)e^{-\nu t}.$$

Докажем, что $L(t, x)$ и $F(t, x)$ связаны функциональной зависимостью. С этой целью составим функциональный определитель Остроградского—Якоби

$$\frac{D(F, L)}{D(t, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial t}, & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial t}, & \frac{\partial L}{\partial x} \end{vmatrix} = e^{-\nu t}\left[\frac{\partial F}{\partial t} + (x-1)\nu\frac{\partial F}{\partial x}\right].$$

Согласно (14)

$$\frac{D(F, L)}{D(t, x)} = 0,$$

это означает, что

$$F = R(L) = R[(x-1)e^{-\nu t}],$$

где R — произвольная дифференцируемая функция.

Итак,

$$\Phi(t, x) = e^{\rho(x-1)(1-e^{-\nu t})}R[(x-1)e^{-\nu t}]. \tag{15}$$

Полученное выражение является общим решением дифференциального уравнения (12). Для определения вида функции R необходимо воспользоваться начальными условиями.

Пусть в начальный момент времени $t=0$ имеем $p_к(0) = \alpha_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), где α_k — известные числа.

В частности, если известно, что в момент $t=0$ в канале действуют i причин ошибок, то $\alpha_i = 1$, а $\alpha_k = 0\,(k \neq i)$. Во всех случаях выполняется условие нормировки $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k = 1$. Выражение (9) принимает вид

$$\Phi(0, x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_к(0)\,x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k,$$

а выражение (15) — $\Phi(0, x) = R(x-1)$.

Следовательно,

$$R(x-1) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k.$$

Если обозначить $x - 1 = Z$, то

$$R(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (1+Z)^k,$$

а

$$R[(x-1)e^{-\nu t}] = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k [1 + (x-1)e^{-\nu t}]^k. \qquad (16)$$

Формулу (15) с учетом (16) можно записать окончательно в виде

$$\Phi(t, x) = e^{\rho(x-1)(1-e^{-\nu t})} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k [1 + (x-1)e^{-\nu t}]^k. \qquad (17)$$

Этот ряд абсолютно сходится при $t > 0$ и $|x| \leqslant 1$, так как при этом выполняется условие

$$|1 + (x-1)e^{-\nu t}| \leqslant 1.$$

Вероятности $p_к(t)$ равны коэффициентам при x^k в разложении (17) по степеням x. Для упрощения операции разложения зададимся следующими начальными условиями:

$$p_0(0) = \alpha_0 = 1, \quad p_к(0) = \alpha_k = 0. \qquad (18)$$

Это значит, что с вероятностью, равной единице, можно считать канал свободным от помех в момент $t = 0$. Конечные же результаты оказываются справедливыми при любом предположении относительно начальных условий [4].

Подставим (18) в (17)

$$\Phi(t, x) = e^{\rho(x-1)(1-e^{-\nu t})} = e^{-\rho(1-e^{-\nu t})} e^{\rho(1-e^{-\nu t})x}.$$

Разлагая второй сомножитель в этом выражении в ряд по степеням показателя e, получим

$$\Phi(t, x) = e^{-\rho(1-e^{-\nu t})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} [\rho(1-e^{-\nu t})]^k.$$

Следовательно, вероятность того, что в момент времени t в канале связи будут действовать k причин ошибок, равна

$$p_к(t) = \frac{1}{k!} \rho^k (1-e^{-\nu t})^k e^{-\rho(1-e^{-\nu t})}.$$

В пределе при $t \to \infty$

$$p_к = \lim_{t \to \infty} p_к(t) = \frac{1}{k!} \rho^k e^{-\rho} = \frac{(\lambda\tau_{ср})^k}{k!} e^{-\lambda\tau_{ср}}.$$

Определим вероятность того, что в течение интервала времени $[0, T]$ в канале возникнут не более k пачек ошибок при условии появления k причин ошибок. Искомая вероятность будет равна произведению вероятности отсутствия помех в начальный момент времени на вероятность возникновения за время T k причин ошибок.

$$p_{к\leqslant}(T) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda(T+\tau_{ср})},$$

Вероятность появления в канале не более $(k-1)$ пачек ошибок за время T равна

$$p_{(k-1)\leqslant}(T) = \frac{(\lambda T)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(T+\tau_{\text{ср}})}.$$

Вероятность появления ровно k пачек за время T

$$p_{\text{к}}(T) = p_{k\leqslant}(T) - p_{(k-1)\leqslant}(T) = \begin{cases} (\lambda T)^{k-1}\frac{(\lambda T - k)}{k!} e^{-\lambda(T+\tau_{\text{ср}})}, & k < \lambda T, \\ 0, & k \geqslant \lambda T. \end{cases} \quad (19)$$

Для $k = 0$ за время T имеем

$$p_0(T) = e^{-\lambda(T+\tau_{\text{ср}})},$$

а вероятность возникновения ошибок

$$p_{\text{ош}}(T) = 1 - e^{-\lambda(T+\tau_{\text{ср}})}.$$

При нестационарном потоке моментов возникновения причин ошибок можно показать, что вероятность одновременного действия k пакетов в интервале времени $[\tau, \tau+\xi]$ подчинена тому же закону (19).

$$p_{\text{к}}(\tau, \tau+\xi) = \begin{cases} [\Lambda(\tau, \tau+\xi)]^{k-1}\frac{[\Lambda(\tau, \tau+\xi) - k]}{k!} e^{-[\Lambda(\tau, \tau+\xi)+\Lambda'(t, \tau)]}, & k < \Lambda(\tau, \tau+\xi), \\ 0, & k \geqslant \Lambda(\tau, \tau+\xi). \end{cases}$$

Здесь параметр потока переменный $\lambda(t)$ и для интервала $[\tau, \tau+\xi]$

$$\Lambda(\tau, \tau+\xi) = \int_{\tau}^{\tau+\xi} \lambda(t)\, dt,$$

$$\Lambda'(t, \tau) = e^{-(\tau-t)} \int_{t}^{\tau} e^{u}\lambda(u)\, du,$$

где $\tau - t = \tau_m$ — максимально возможная длина пакета ошибок.

Полагая $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$, получим (19).

Таким образом, на основании учета эффекта перекрытия причин, вызывающих ошибки на выходе каналов передачи двоичной информации, получены формулы, которые определяют вероятности появления заданного числа пачек ошибок на известном интервале времени для стационарного и нестационарного потоков начал пачек ошибок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Пуртов, А. С. Замрий, И. Ф. Шаповалов. Характер распределения ошибок в телефонных каналах при передаче дискретных сигналов. «Электросвязь», 1965, № 6.

2. A. B. Fontain. Error statistics and codins for digital data transmission over telephone and teletype circnits. Proc. IEEE, 1963, 51, № 3.

3. К. А. Брусиловский. Измерения искажений импульсов в системах передачи дискретной информации. Изд-во «Наука», М.—Л., 1965.

4. А. Я. Хинчин. Работы по математической теории массового обслуживания. Физматгиз, 1963.

5. Б. А. Севастьянов. Эргодическая теория для марковских процессов и ее приложения к телефонным задачам с отказами. Теория вероятностей и ее применение, т. II, выпуск I, 1957.