ПОВЫШЕНИЕ ДОСТОВЕРНОСТИ ДИСКРЕТНОГО КАНАЛА МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ПОТОКА ОШИБОК

Н. П. Суворов

Рассмотрим стационарный случайный импульсный поток с детерминированным тактовым интервалом, значение которого в фиксированный момент времени может быть либо 0, либо 1. Обозначим вероятность появления 0 и 1 соответственно $p(0)$ и $p(1)$. Будем считать данный поток коррелированным, причем вид функции корреляции предполагается известным.

Во многих практических случаях возникает задача экстраполяции указанного импульсного потока, заключающаяся в том, что, зная значения потока $X[x(n),\ x(n-1), \ldots, x(n-m)]$ в предыдущие моменты времени $t(n),\ t(n-1), \ldots,\ t(n-m)$, требуется предсказать значение импульсного потока в следующий момент времени $t(n+\alpha)$, α — целое число. Как известно [1], в качестве меры отклонения предсказанного значения $y=y(n+\alpha)$ от действительного значения потока $y^*=x(n+\alpha)$ принимается величина

$$\varepsilon = y - y^*. \tag{1}$$

Чем меньше ошибка ε, тем эффективнее будет осуществляться предсказание. Среднеквадратичная ошибка предсказания имеет вид

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{(y-y^*)^2}, \tag{2}$$

где «—» знак усреднения.

Если осуществляется линейная экстраполяция, то предсказанное значение выразится в виде

$$y = \sum_{k=0}^{m} C(k)\, x(n-k). \tag{3}$$

Такой закон экстраполяции осуществляется импульсным фильтром, импульсная характеристика которого $C(k)$ равна

$$C(k) = \begin{cases} a_k & \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant m, \\ 0 & \text{при} \quad k > m; \end{cases} \tag{4}$$

a_k — постоянные числа. С учетом (3) и (4) (1) и (2) примут соответственно вид

$$\varepsilon = \sum_{k=0}^{m} a_k x(n-k) - y^*,$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \overline{[\sum_{k=0}^{m} a_k x(n-k) - y^*]^2}. \tag{5}$$

После преобразований в (5) получим

$$\overline{\varepsilon^2} = R_{y^*y^*}(0) - 2\sum_{k=0}^{m} a_k R_{xy^*}(k) + \sum_{k=0}^{m}\sum_{r=0}^{m} a_k a_r R_{xx}(k-r), \tag{6}$$

где $R_{y^*y^*}(0)$, $R_{xy^*}(k)$, $R_{xx}(k-r)$ — функции корреляции

$R_{xx}(k-r) = \overline{x(n-k)\,x(n-r)}$ и т. д.

Определим условия, при которых (6) достигает минимума, для чего необходимо продифференцировать это выражение по a_k и приравнять производную нулю

$$\frac{\overline{\partial\varepsilon^2}}{\partial a_k} = -2R_{xy^*}(k) + 2\sum_{r=0}^{m} a_r R_{xx}(k-r) = 0,$$

следовательно, при оптимальном предсказании значения коэффициентов a_k определяется из условия

$$R_{xy^*}(k) = \sum_{r=0}^{m} a_r R_{xx}(k-r), \quad k = 0,1, \ldots, m. \tag{7}$$

Если осуществляется предсказание на один шаг вперед, то $y^* = x(n+1)$ и система (7) имеет вид

$$R_{xx}(k+1) = \sum_{r=0}^{m} a_r R_{xx}(k-r), \quad k = 0,1, \ldots, m.$$

Аналогичные выражения получаются при предсказании на α шагов вперед. Минимальное значение дисперсии ошибки предсказания получим, если в выражение (6) в качестве коэффициентов a_k подставим их значения, найденные из решения системы (7),

$$\min\overline{\varepsilon^2} = R_{y^*y^*}(0) - \sum_{k=0}^{m} a_k R_{xy^*}(k). \tag{8}$$

Для эргодического импульсного потока функция корреляции равна

$$R_{xx}(k-r) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} x_i(n-k)\,x_j(n-r)\,p\,[x_i(n-k), x_j(n-r)], \tag{9}$$

где $x_0(n-k) = 0$, $x_1(n-k) = 1$, следовательно, (9) имеет вид

$$R_{xx}(k-r) = p\,[x_1(n-k),\ x_1(n-r)] = p(x_1)\,b(k-r), \tag{10}$$

где $b(k-r) = p\,[x_1(n-k)/x_1(n-r)]$ — коэффициент корреляции. Из (10) видно, что функция корреляции данного потока определяется безусловной вероятностью появления 1, т. е. $p(x_1) = p(1)$ и условной вероятностью появления 1 через $(k-r)$ тактов.

Таким образом, предсказываемое значение потока X в момент времени $t(n+\alpha)$ основывается на определении коэффициентов a_k, которые находятся из решения системы уравнений (7). Но в общем случае в результате решения этой системы значения a_k, а, следовательно, и предсказанные значения y, будут лежать в интервале [0—1], в то время как истинное значение y^* может быть только либо 0, либо 1. Для обоснованного принятия решения относительно того, считать ли y за 0 или за 1, можно использовать решающую схему, минимизирующую полную вероятность ошибки в определении предсказанного значения. Из (1) видно, что предсказанное значение y может представлять собой сумму сигнала, действительное значение которого $x_1 = 1$ плюс сигнал ошибки, т. е.

$$y = x_1 + \varepsilon \tag{11}$$

либо сумму сигнала, действительное значение которого $x_0 = 0$ плюс сигнал ошибки, т. е.

$$y = x_0 + \varepsilon. \tag{12}$$

Закон распределения ошибок ε считаем известным. В дальнейшем для определенности будем полагать его нормальным. Задача решающей схемы состоит в том, чтобы на основании предсказанного значения вынести одно из двух (11) или (12) решений, т. е. либо предсказанное значение равно 0, если $y < u_0$, либо 1, если $y > u_0$; u_0 — некоторый порог. Решение может быть принято при двух взаимно исключающих условиях:

условие x_1 — действительное значение потока равно 1,

условие x_0 —действительное значение потока равно 0, соответственно обозначим:

решение x_1^* — предсказанное значение равно 1,

решение x_0^* — предсказанное значение равно 0.

Качественными показателями решающей схемы являются [2]:

$P_{\text{пр. о}} = P(x_1^*/x_1)$ — условная вероятность правильного обнаружения,

$P_{\text{проп}} = P(x_0^*/x_1)$ — пропуск цели,

$P_{\text{л. т}} = P(x_1^*/x_0)$ — ложная тревога,

$P_{\text{пр. н}} = P(x_0^*/x_0)$ — условная вероятность правильного необнаружения.

Оптимальная решающая схема должна обеспечить минимум полной вероятности ошибки, определяемой выражением

$$P_{\text{ош}} = p(x_0)P_{\text{л. т.}} + p(x_1)P_{\text{проп}}. \tag{13}$$

Обозначим плотность вероятности предсказанной величины y при условиях, когда действительное значение сигнала $x_0 = 0$ и когда $x_1 = 1$ соответственно

$$w(y/x_0) = w_1(y)$$
$$w(y/x_1) = w_2(y). \tag{14}$$

Учитывая ранее принятое предположение о нормальном законе распределения ошибок, предсказания выражения (14) можно записать следующим образом:

$$w_1(y) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \tag{15}$$

$$w_2(y) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-1)^2}{2\sigma^2}}$$

α — нормировочный коэффициент;

$\sigma^2 = \overline{\varepsilon}^2$ — среднеквадратичная ошибка предсказания.

Выражение (13) может быть представлено в виде

$$P_{\text{ош.}} = p(x_0)\int_{u_0}^{1} w_1'(y)\,dy + p(x_1)\int_{0}^{u_0} w_2'(y)\,dy. \tag{16}$$

Для минимизации полной вероятности ошибки достаточно продифференцировать последнее выражение по u_0, с учетом выражений (15), и приравнять производную нулю

$$\frac{dp_{\text{ош.}}}{du_0} = -p(x_0)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{u_0^2}{2\sigma^2}} + p(x_1)\,e^{-\frac{(u_0-1)^2}{2\sigma^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} = 0.$$

Оптимальное значение порога будет иметь значение

$$u_0 = \sigma^2 \ln\frac{p(x_0)}{p(x_1)} + \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Если $p(x_0) = p(x_1) = \frac{1}{2}$, то $u_0 = \frac{1}{2}$. На практике часто бывают случаи, когда $p(x_0) \neq p(x_1)$. Тогда значение порога зависит от априорных вероятностей появления 0 и 1 в импульсном потоке. Кроме того, как видно из (17), значение порога определяется среднеквадратичной ошибкой предсказания. Поскольку предсказания на различное число шагов вперед σ^2 изменяется в соответствии с (8), то, следовательно, и порог в оптимальной решающей схеме должен меняться при предсказании на различное число шагов вперед с учетом выражения дисперсии ошибок предсказания. Окончательное выражение вероятности ошибки предсказания, с учетом выражения (17), можно записать в виде

$$p_{\text{ош.}} = \alpha p(x_0)\left\{F\left(\frac{1}{6}\right) - F\left[\sigma\ln\frac{p(x_0)}{p(x_1)} + \frac{1}{2\sigma}\right]\right\} + \alpha p(x_1)\left\{F\left[\sigma\ln\frac{p(x_0)}{p(x_1)} - \frac{1}{2\sigma} - F\left(-\frac{1}{\sigma}\right)\right]\right\}, \tag{18}$$

где

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \text{ — функция Лапласа.}$$

Приведенный выше метод предсказания значений импульсного потока может быть применен для повышения достоверности двоичной информации, передаваемой по каналам с шумами. Если поток ошибок в канале известен, т. е. известна функция корреляции потока, вероятность появления ошибочных позиций $p(1)$ и поток ошибок является стационарным, то, зная предысторию потока, можно предсказывать, будет или не будет ошибка в следующие моменты времени и таким образом проводить коррекцию ошибок в передаваемой информации. Каков выигрыш в скорости и достоверности информации можно при этом получить, зависит в каждом конкретном случае от вида функции корреляции потока ошибок. Однако принципиальную возможность осуществления подобного метода повышения достоверности двоичной информации и некоторые количественные характеристики можно получить, предположив, что поток ошибок может быть описан простой цепью Маркова. Известно [3], что пропускная способность двоичного канала с независимыми ошибками имеет вид

$$C = 1 - H(p) \tag{19}$$

$H(p)$ — энтропия потока ошибок,

p — вероятность ошибки.

Энтропию потока ошибок, описываемых простой марковской цепью, можно определить [4] в виде

$$H = -\sum_{i=1}^{\pi}\sum_{k=1}^{\pi} p_i p_{ik} \log p_{ik}, \tag{20}$$

где p_i — вероятность i-го состояния цепи,

p_{ik} — вероятность перехода цепи из i-го состояния в k-е.

Двоичный канал может быть задан в этом случае матрицей переходных вероятностей

$$\Pi = \begin{vmatrix} p\left({}^1/_1\right) & p\left({}^0/_1\right) \\ p\left({}^1/_0\right) & p\left({}^0/_0\right) \end{vmatrix} \tag{21}$$

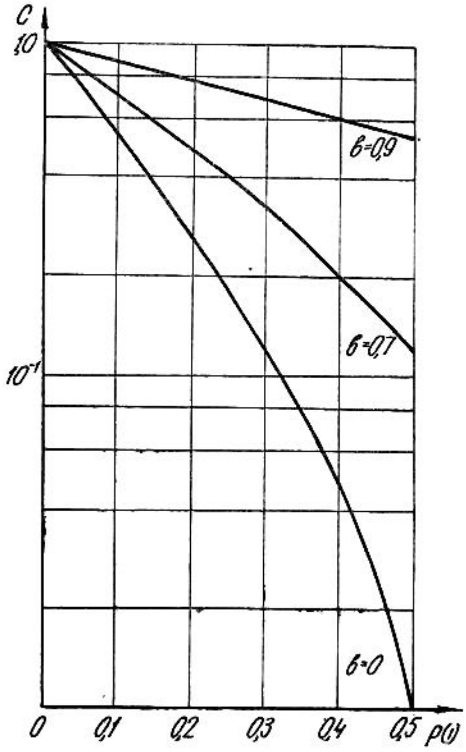

Рис. 1.

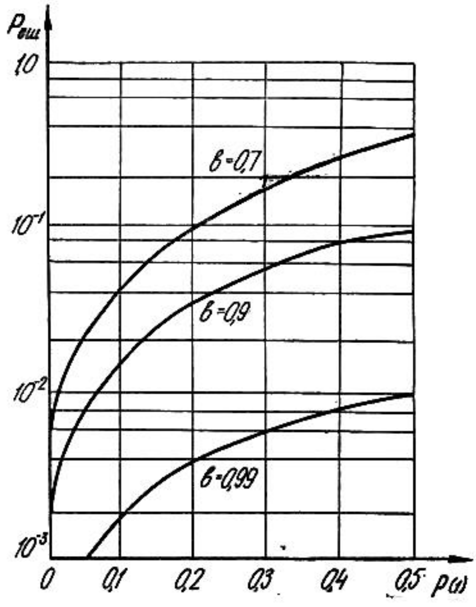

Рис. 2.

1 — ошибочный прием,

0 — правильный прием.

С учетом (21), (22) выражение (20) примет вид

$$C = 1 + p(1)\left\{p\left({}^1/_1\right)\log p\left({}^1/_1\right) + \left[1 - p\left({}^1/_1\right)\right]\log\left[1 - p\left({}^1/_1\right)\right]\right\} +$$
$$+ p(0)\left\{p\left({}^1/_0\right)\log p\left({}^1/_0\right) + \left[1 - p\left({}^1/_0\right)\right]\log\left[1 - p\left({}^1/_0\right)\right\}. \tag{22}$$

Если ошибки возникают независимо, то $p\left({}^1/_1\right) = p\left({}^1/_0\right) = p(1)$, и тогда выражение (22) переходит в (19).

Для простой марковской цепи с матрицей переходных вероятностей (21) при некоторых дополнительных условиях, называемых условиями эргодичности, которые выполняются для всех каналов, представляющих практический интерес, существуют безусловные вероятности; они выражаются [5—6] в виде

$$p(1) = \frac{p(^1/_0)}{1 - p(^1/_1) + p(^1/_0)}, \quad p(0) = \frac{1 - p(^1/_1)}{1 - p(^1/_1) + p(^1/_0)} \tag{23}$$

из (23) можно определить

$$p(^1/_0) = \frac{p(1)}{p(0)}(1 - b),$$

где $b = p(^1/_1)$ — коэффициент корреляции потока ошибок.
Пропускная способность запишется следующим образом:

$$C = 1 + p(1)\{b \log b + (1 - b)\log(1 - b)\} +$$
$$p(0)\left\{\frac{p(1)}{p(0)}(1 - b)\log\frac{p(1)}{p(0)}(1 - b) + \left[1 - \frac{p(1)}{p(0)}(1 - b)\right]\log\left[1 - \frac{p(1)}{p(0)}(1 - b)\right]\right\} \tag{24}$$

Расчеты, проведенные в соответствии с (24) для различных значений $p(1)$ и b, показаны на рис. 1, откуда видно, что учет зависимости ошибок в канале может привести к значительному увеличению скорости передачи информации. В силу этого необходимо осуществлять предсказание потока зависимых ошибок. Вероятность ошибки предсказания с учетом (13) может быть записана в виде

$$p_{\text{ош.}} = p(0)\,p(^1/_0) + p(1)\,p(^0/_1) = 2p(1)(1 - b). \tag{25}$$

Значения $p_{\text{ош.}}$ при различных значениях $p(1)$ и b приведены на рис. 2. При больших значениях коэффициента корреляции ошибок, $p_{\text{ош.}}$ может быть довольно малой, и, таким образом, ясно, что предсказание ошибок позволит повысить достоверность передаваемой информации. Отметим, что пропускная способность простого марковского канала может быть получена с учетом выражения (19), где вероятность ошибки определяется вероятностью ошибки предсказания (25). При более сложных связях между ошибками, пропускная способность каналов с зависимыми ошибками тоже может быть оценена по формуле (19), но с учетом вероятности ошибок предсказания, определяемой выражением (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Яглом. Теория экстраполирования и фильтрации случайных процессов. Украинский математический журнал, 1954, том 6, № 1.
2. И. Н. Амиантов. Применение теории решений к задачам обнаружения сигналов и выделения сигналов из шумов. Издание ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1958.
3. К. Шеннон. Математическая теория связи, сб. «Шеннон К., Работы по теории информации и кибернетике», Изд-во ИЛ., 1963.
4. А. Я. Хинчин. Понятие энтропии в теории вероятности. Успехи математических наук, 1953, 8, вып. 3.
5. Л. М. Финк. Теория передачи дискретных сообщений. Изд-во «Сов. радио», М., 1963.
6. В. И. Романовский. Дискретные цепи Маркова. Гостехиздат, М.—Л., 1949.