# К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СКОРОСТИ ПЕРЕДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ БИОРТОГОНАЛЬНЫМИ СИГНАЛАМИ С АКТИВНОЙ ПАУЗОЙ

*И. Д. Задеренко*

В данной работе рассматривается вопрос о максимально возможной скорости передачи дискретной информации биортогональными сигналами с активной паузой по каналу с постоянными параметрами и ограниченной полосой $F_к$ при условии, что вероятность ошибочного приема сигналов не превышает заданной. При этом предполагается, что передаваемые сигналы равновероятны, независимы и характеризуются одинаковой энергией.

Скорость, определенную таким образом, обозначим $R_{(1)\,opt}$ и назовем оптимальной скоростью передачи дискретной информации биортогональными сигналами, кроме этого, будем также пользоваться понятием удельной оптимальной скорости $R_{(1)\,opt\,F} = \frac{R_{(1)\,opt}}{F_к}$.

Постановка задачи совпадает с принятой в работе [1] при рассмотрении оптимальной скорости передачи дискретной информации ортогональными сигналами.

Следовательно, считаем, что в приемнике используется оптимальная решающая схема, основанная на критерии идеального наблюдателя и позволяющая работать с сигналами наименьшей длительности при заданной вероятности ошибки; канал связи с эффективной полосой $F_к$ находится под воздействием флюктуационной помехи со спектральной плотностью $\nu_0^2$; отношение мощности сигнала к мощности помехи $\left(\frac{P_с}{P_п}\right)$ задано.

Рассмотрим систему биортогональных сигналов с активной паузой с некоторым основанием $m_{(1)}$. Будем считать, что используемые в кодовых комбинациях при передаче символы представляются одним биортогональным сигналом из $m_{(1)}$ возможных.

Отметим, что эти системы не являются эквидистантными и в энергетическом отношении несколько проигрывают эквидистантным (частным случаем последних, как известно, являются ортогональные системы с активной паузой). Тем не менее комплексное рассмотрение биортогональных систем с активной паузой не только с энергетической точки зрения, но и с точки зрения оптимальной скорости передачи информации, как будет показано ниже, является весьма целесообразным.

Находя оптимальную скорость передачи $R_{(1)\,opt}$, которая, как следует из определения, является максимально возможной при условии, что вероятность ошибочного приема не превосходит заданной, будем учитывать взаимосвязь степени уплотнения информацией передаваемых сигналов с вероятностью ошибочного приема отдельных сигналов $p_{ош}$.

Для рассматриваемого случая вероятность неправильного приема сигнала идеальным приемником найдем из выражения [2]

$$p_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \Phi\left( \sqrt{2\left(\frac{p_c}{p_п}\right) F_к T} + v \right) \right]^{\frac{m_{(1)}}{2} - 1} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv, \quad (1)$$

где

$$\Phi\left( \sqrt{2\left(\frac{p_c}{p_п}\right) F_к T} + v \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{2\left(\frac{p_c}{p_п}\right) F_к T}+v} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] dx -$$

— функция Крампа;

$p_c$ — средняя мощность шумовой помехи;

$p_п = \nu_0^2 F_к$ — мощность шумовой помехи;

$F_к = \frac{1}{|k(f)|^2_{\max}} \int_0^{\infty} |k(f)|^2 df$ — эффективная полоса пропускания канала;

$|k(f)|^2_{\max}$ — максимальное значение квадрата модуля коэффициента передачи канала.

Выражение (1) показывает, что при заданных значениях $\left(\frac{p_c}{p_п}\right)$, $F_к$ и $p_{\text{ош}}$ длительность сигналов $T$ зависит только от основания кода $m_{(1)}$, т. е. $T = T[m_{(1)}]$.

Следовательно, заданную вероятность ошибочного приема можно обеспечить при различных соотношениях между основанием кода $m_{(1)}$ и длительностью сигнала $T$. Так как нас интересует максимально возможная скорость передачи информации при условии, что вероятность ошибочного приема не превосходит заданной, то, очевидно, заданное значение $p_{\text{ош}}$ необходимо обеспечивать при минимально возможном $T$ и максимальном $m_{(1)}$.

Для биортогональных систем максимальное число различных сигналов $m_{(1)\max}$ в случае, когда заданы эффективная полоса канала $F_к$ и длительность сигналов $T$, легко определить, учитывая, что для каждого из ортогональных сигналов $m_{\max}$ существует противоположный и, следовательно, $m_{(1)\max} = 2m_{\max}$.

В свою очередь $m_{\max}$ для заданных условий определяется теоремой Агеева [3] $m_{\max} = 2F_к T$, окончательно для $m_{(1)\max}$ имеем

$$m_{(1)\max} = 4F_к T. \quad (2)$$

Очевидно, что в биортогональных системах с активной паузой $m_{(1)\max}$ всегда четное число, причем для каждого сигнала $Z_i(t)$ $\left(\text{где } i = 1, 2 \ldots \frac{m_{(1)\max}}{2}\right)$ существует противоположный $- Z_i(t)$, а остальные $(m_{(1)\max} - 2)$ сигнала ортогональны $Z_i(t)$.

Подставляя в формулу (1) значение минимальной длительности сигнала $T_{\min}$, определяемое из выражения (2) и соответствующее значение $m_{(1)\max}$, получим

$$p_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \Phi\left( \sqrt{\left(\frac{p_c}{p_п}\right) \frac{m_{(1)\max}}{2}} + v \right) \right]^{\frac{m_{(1)\max}}{2} - 1} \exp\left[-\frac{v^2}{2}\right] dv. \quad (3)$$

Выражение (3) связывает вероятность ошибки $p_{\text{ош}}$ с максимально возможным основанием кода $m_{(1)\,\max}$ при условии, что $\left(\frac{p_{\text{с}}}{p_{\text{п}}}\right)$ и $F_{\text{к}}$ заданы, т. е.

$$m_{(1)\,\max} = m\,(p_{\text{ош}}). \tag{4}$$

Эта зависимость через элементарные функции не выражается, поэтому при расчетах необходимо применять численные методы.

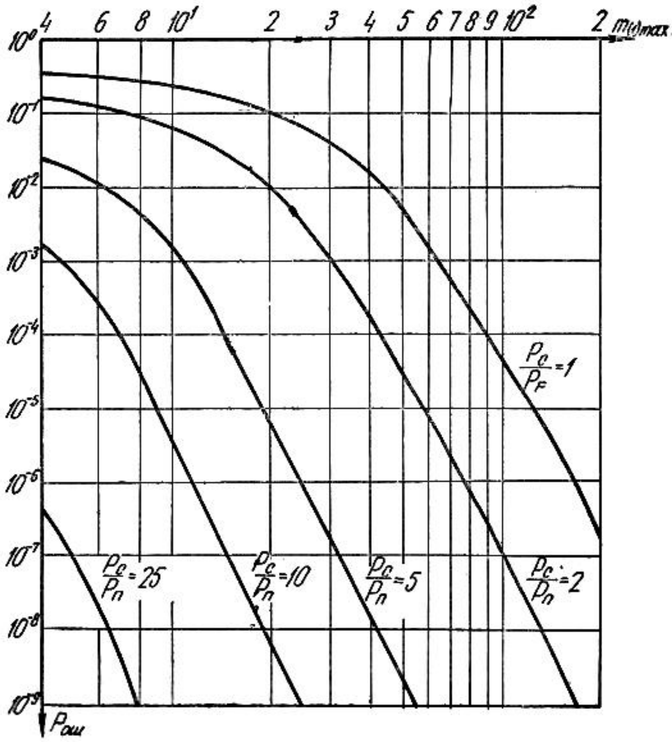


Рис. 1.

На рис. 1 представлены графики зависимости $m_{(1)\,\max} = m\,(p_{\text{ош}})$ для некоторых значений $\left(\frac{p_{\text{с}}}{p_{\text{п}}}\right)$, вычисленные по формуле (3).

Из графиков видно, что при применении более высоких оснований кодов $m_{(1)\,\max}$, вероятность ошибочного приема сигналов уменьшается и тем быстрее, чем больше отношение $\left(\frac{p_{\text{с}}}{p_{\text{п}}}\right)$.

Однако с ростом $m_{(1)\,\max}$ увеличивается, согласно выражению (2), минимальная длительность сигналов, равная

$$T_{\min} = \frac{m_{(1)\,\max}}{4F_{\text{к}}} \tag{5}$$

Учитывая вышеизложенное, найдем выражение для удельной оптимальной скорости передачи дискретной информации биортогональными сигналами. Если сигналы имеют число дискретных значений $m$, выражение для скорости передачи при заданных ограничениях будет [2]

$$R = \frac{\log_2 m + p_{ош} \log_2 \frac{p_{ош}}{m-1} + (1 - p_{ош}) \log_2 (1 - p_{ош})}{T}. \tag{6}$$

Подставляя в (6) вместо $m$ максимальное значение основания кода $m_{(1)\max}$, а вместо $T$ — минимально возможную длительность элементарных сигналов $T_{\min}$, соответствующую значению $m_{(1)\max}$ и определяемую выражением (5), при которых вероятность ошибки $p_{ош}$ не превосходит заданной,

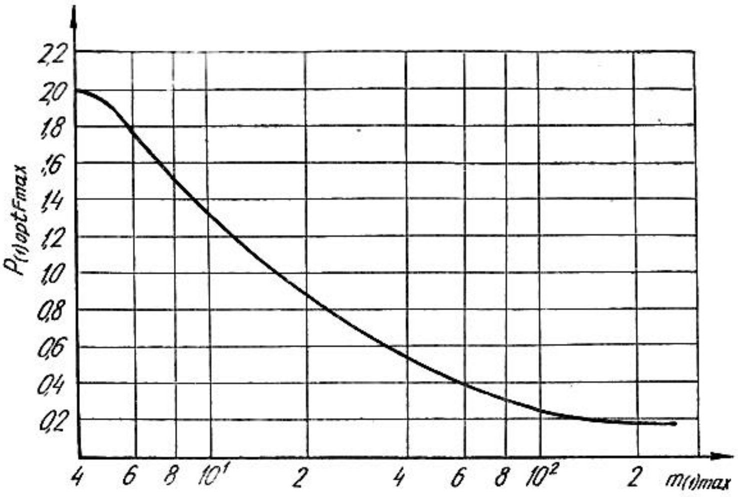


Рис. 2.

получаем окончательно выражение для удельной оптимальной скорости передачи дискретной информации биортогональными сигналами $R_{(1)\,\mathrm{opt}\,F}$

$$R_{(1)\,\mathrm{opt}\,F} = 4\,\frac{\log_2 m_{(1)\max} + p_{ош} \log_2 \frac{p_{ош}}{m_{(1)\max} - 1} + (1 - p_{ош}) \log_2 (1 - p_{ош})}{m_{(1)\max}}. \tag{7}$$

Пользуясь формулой (7), необходимо иметь в виду, что $m_{(1)\max}$ при заданном отношении $\left(\frac{p_с}{p_п}\right)$ является функцией вероятности ошибки $p_{ош}$ и определяется выражением (3) или по графикам рис. 1.

В практически важных случаях малых значений допустимых вероятностей ошибок выражение (7) можно записать

$$R'_{(1)\,\mathrm{opt}\,F} \approx 4\,\frac{\log_2 m_{(1)\max}}{m_{(1)\max}}. \tag{8}$$

Очевидно, следующее неравенство $R'_{(1)\,\mathrm{opt}\,F} > R_{(1)\,\mathrm{opt}\,F}$, т. е. $R'_{(1)\,\mathrm{opt}\,F}$ в общем случае представляет максимальное значение для удельной оптимальной скорости и будет обозначаться в дальнейшем $R_{(1)\,\mathrm{opt}\,F\max}$.

На рис. 2 изображен график зависимости $R_{(1)\,\mathrm{opt}\,F\max}$ как функция от $m_{(1)\max}$. Отметим, что график начинается с $m_{(1)\max} = 4$. Это объясняется тем, что для биортогональных систем минимальное значение $m_{(1)\max} = 4$.

Из графика видно, что $\max[R_{(1)\ \mathrm{opt}\ F\ \max}] = 2$, т. е. почти в два раза превышает максимально возможное значение удельной оптимальной скорости передачи информации для ортогональных систем.

При этом основание кода $m_{(1)\max} = 4$. Следовательно, для получения значений $R_{(1)\ \mathrm{opt}\ F\ \max}$, близких к максимальному, необходимо применять коды с малым основанием ($m_{(1)\max} = 4$; 6). Однако это возможно, если отношение $\left(\frac{p_c}{p_п}\right)$ достаточно велико и поэтому, несмотря на малое основание кода, получаемая в системе вероятность ошибки не превосходит заданной $p_{ош}$, т. е. значение $\left(\frac{p_c}{p_п}\right)$ при выбранном $m_{(1)\max}$ должно удовлетворять уравнению (3).

На рис. 3 и 4 представлена зависимость удельной оптимальной скорости передачи информации биортогональными сигналами с активной паузой $R_{(1)\ \mathrm{opt}\ F}$ как функция отношения $\left(\frac{p_c}{p_п}\right)$. При этом расчеты проводились по формулам (7) и (3). Из выражения (3) для заданной величины $p_{ош}$ и соответствующего значения $\left(\frac{p_c}{p_п}\right)$ определялось значение требуемого основания кода $m_{(1)\max}$, а затем по формуле (7) вычислялась удельная оптимальная скорость $R_{(1)\ \mathrm{opt}\ F}$. Рис. 3 соответствует случаю, когда допустимая вероятность ошибки $p_{ош} = 10^{-4}$, а рис. 4 $p_{ош} = 10^{-7}$.

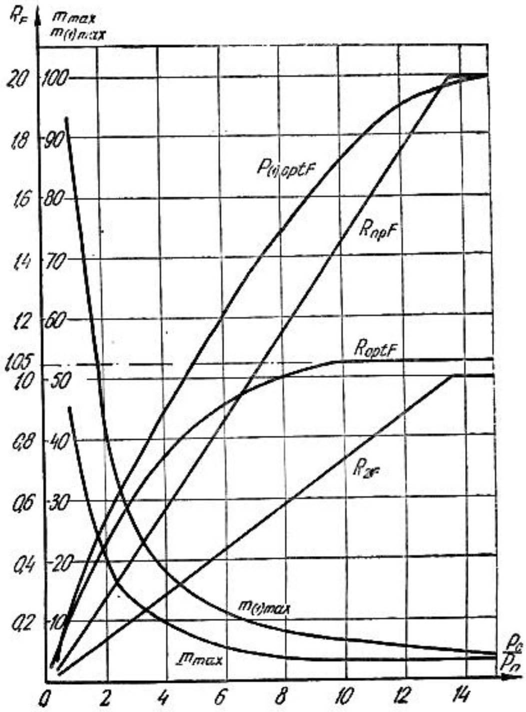


Рис. 3.

Для сравнения на этих же рисунках показаны изменения удельной скорости передачи дискретной информации в зависимости от отношения $\left(\frac{p_c}{p_п}\right)$ для ортогональных систем с активной паузой и с основанием $m = m_{\max}$ — — $R_{\mathrm{opt}\ F}$; бинарных ортогональных систем — $R_{2F}$, а также для систем с противоположными сигналами — $R_{пр.\ F}$, где $R_{пр.\ F}$, как следует из (6), определяется выражением

$$R_{пр.\ F} = \frac{1 + p_{ош} \log_2 p_{ош} + (1 - p_{ош}) \log_2 (1 - p_{ош})}{F_к T_{\min}}, \tag{9}$$

а $T_{\min}$ при заданном значении $p_{ош}$ и различных отношениях $\left(\frac{p_c}{p_п}\right)$ находим из формулы для вероятности ошибки противоположных сигналов [2]

$$p_{ош} = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\sqrt{2\left(\frac{p_c}{p_п}\right) F_к T_{\min}}\right)\right]. \tag{10}$$

Определяя $T_{min}$, необходимо помнить, что для данного случая теоретически минимально возможное значение $T_{min}$, как следует из (5), равно

$$\min [T_{min}] = \frac{1}{2F_к}. \quad (11)$$

Из (10) следует, что это значение может быть получено, если достаточно большое отношение $\left(\frac{p_с}{p_п}\right)$. При дальнейшем увеличении $\left(\frac{p_с}{p_п}\right)$ $T_{min}$ будет оставаться постоянным и равным своему минимальному значению $\frac{1}{2F_к}$. $R_{пр.\,F}$ при этом достигает своего максимального значения

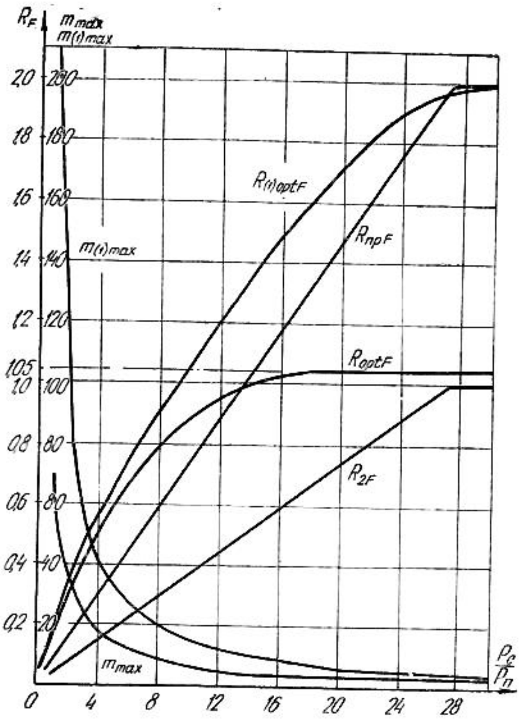

Рис. 4.

$$R_{пр.\,F.\,max} = 2\,[1 + p_{ош} \log_2 p_{ош} + (1 - p_{ош}) \log_2 (1 - p_{ош})]. \quad (12)$$

Для малых значений допустимой вероятности ошибки $p_{ош}$ выражение (12) можно записать так:

$$R_{пр.\,F.\,max} \approx 2\left[\frac{\text{дв. ед}/\text{сек}}{\text{гц}}\right] \quad (13)$$

Таким образом, при больших значениях отношения $\left(\frac{p_с}{p_п}\right)$ и малых $p_{ош}$ ($p_{ош} < 10^{-2}$) как биортогональные, так и противоположные сигналы имеют одно и то же предельное значение удельной скорости передачи информации, равное $2\,\frac{\text{дв. ед.}/\text{сек}}{\text{гц}}$.

Кроме перечисленных выше зависимостей, на рис. 3 и рис. 4 изображены изменения основания кода $m_{max}$, соответствующие значениям удельной оптимальной скорости передачи ортогональными сигналами $R_{opt\,F}$; и $m_{(1)\,max}$, соответствующие $R_{(1)\,opt\,F}$.

Зависимости $R_{opt\,F}$, $R_{2F}$ и $m_{max}$ взяты из работы [1].

Анализ полученных выражений для удельных скоростей передачи и графиков, представленных на рис. 3 и 4, показывает, что в области малых значений отношений $\left(\frac{p_с}{p_п}\right)$ при заданной допустимой вероятности ошибки $p_{ош}$ наибольшая удельная скорость передачи информации $R_F$ может быть получена при использовании ортогональных сигналов с основанием $m = m_{max}$.

Однако получаемая при этом величина удельной скорости передачи информации невелика и может быть реализована при использовании очень высоких оснований $m_{max}$.

С ростом величины отношения $\left(\frac{p_с}{p_п}\right)$, в частности для рассмотренных двух значений допустимой вероятности ошибки ($p_{ош} = 10^{-4}$ и $10^{-7}$), уже при $\left(\frac{p_c}{p_п} \geqslant 1\right)$ лучшими, с точки зрения скорости передачи информации, являются системы, использующие биортогональные сигналы с активной паузой и основанием $m = m_{(1)\,max}$. Чем больше отношение $\left(\frac{p_c}{p_п}\right)$, тем меньшее требуется основание $m_{(1)\,max}$ для обеспечения заданной вероятности ошибки и тем с большей скоростью может передаваться информация. Кроме этого, из графиков видно, что применение биортогональных сигналов с основанием $m = m_{(1)\,max}$ для большого диапазона значений $\left(\frac{p_c}{p_п}\right)$ увеличивает скорость передачи информации по сравнению с указанными выше системами.

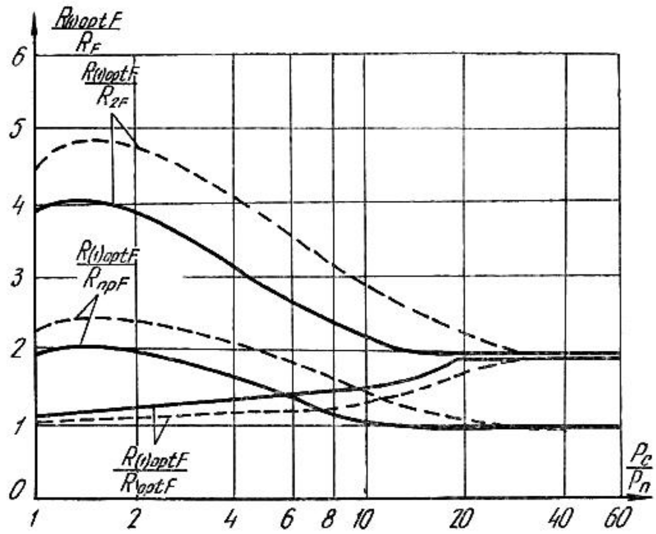


Рис. 5.

Следует, однако, отметить, что в области небольших значений $\left(\frac{p_c}{p_п}\right)$ $\left(\frac{p_c}{p_п} = 1 \div 3\right)$ применение биортогональных сигналов по сравнению с ортогональными дает небольшой выигрыш в скорости передачи (порядка 5-20%), однако для реализации этого преимущества требуются весьма высокие значения основания $m_{(1)\,max}$.

Поэтому более целесообразно, видимо, использовать в этой области значений $\left(\frac{p_c}{p_п}\right)$ ортогональные сигналы, которые мало уступают биортогональным по удельной скорости, но требуют значительно меньшего основания $m_{max}$.

На рис. 5 представлены изменения величин получаемых выигрышей $\frac{R_{(1)\,opt\,F}}{R_{2F}}$, $\frac{R_{(1)\,opt\,F}}{R_{пр.\,F}}$ и $\frac{R_{(1)\,opt\,F}}{R_{opt\,F}}$ в зависимости от величины отношения $\left(\frac{p_c}{p_п}\right)$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. И. Д. Задеренко. Оптимальная скорость передачи дискретной информации ортогональными сигналами по каналу с ограниченной полосой (печатается в данном сборнике).

2. Л. М. Финк. Теория передачи дискретных сообщений. Изд-во «Сов. радио», 1963.

3. Д. В. Агеев. Основы теории линейной селекции. Научно-технический сборник ЛЭИС, 1935, № 10.