

ОПТИМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ СИГНАЛАМИ ПО КАНАЛУ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСОЙ

И. Д. Задеренко

В тех случаях, когда символы алфавита, с помощью которых передается дискретная информация, независимы и равновероятны, критерий идеального наблюдателя совпадает с критерием минимума потерь информации [1]. В дальнейшем будем считать, что в приемнике используется оптимальная решающая схема, основанная на критерии идеального наблюдателя. Применение этой схемы допускает работу с посылками наименьшей длительности при заданной вероятности ошибки.

К. Шенноном показано [2], что существует тесная связь между вероятностью ошибочного приема и скоростью передачи информации. В частности доказано, что если скорость передачи информации меньше пропускной способности

$$C = F_k \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_n} \right), \quad (1)$$

то вероятность ошибочного приема с помощью кодирования в широком смысле может быть сделана сколь угодно малой.

Известно [1], что для реализации предела, указанного Шенноном, необходимо, чтобы при передаче по каналу с флюктуационными шумами использовались коды с очень высоким основанием m , а сигналы имели структуру, напоминающую реализации белого шума.

В реальных системах передачи информации считается допустимым ошибочный прием некоторой части переданных символов, определяемый заданной величиной вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$. При этом основание кода выбирается, как правило, не слишком высоким.

Интересно определить для таких систем максимальную скорость передачи информации, при которой вероятность ошибочного приема передаваемых элементов не превосходит заданной, а флюктуационный канал ограничен эффективной полосой пропускания F_k , и интенсивность шумов, действующих в канале, определяется величиной спектральной плотности помехи ν_0^2 . Эти ограничения часто встречаются в практике.

Скорость, определенную таким образом, обозначим R_{opt} и назовем оптимальной скоростью передачи информации. В дальнейшем будет так же использоваться понятие удельной оптимальной скорости

$$R_{\text{opt } F} = \frac{R_{\text{opt}}}{F_k}.$$

Итак, решение поставленной задачи проводится при следующих условиях:

1) информация передается по каналу с постоянными параметрами с эффективной полосой F_k ;

2) в канале действует нормальный шум со спектральной интенсивностью ν_0^2 ;

3) отношение мощности сигнала к мощности шума $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ задано. Требуется определить максимальную удельную скорость передачи информации $R_{opt F}$, при которой вероятность ошибочного приема передаваемых элементов не превзойдет заданной величины $P_{ош}$.

Решение этой задачи целесообразно провести для класса ортогональных сигналов с основанием m . Из работ [3], [4] следует, что эти сигналы обладают рядом достоинств с точки зрения как их энергетических свойств, так и простоты реализации их приема и разделения.

Как показал Д. В. Агеев [5], максимально возможное число ортогональных функций, локализованных в интервале времени T , при условии, что их энергия максимально сосредоточена в полосе частот Δf , и при неограниченном увеличении промежутка T сколь угодно полно сосредотачивается в полосе частот Δf равно

$$m_{max} = 2T\Delta f. \tag{2}$$

Здесь под Δf будем понимать эффективную полосу частот спектра мощности сигнала. Таким образом, если задана эффективная полоса пропускания канала F_k , то максимально возможное число ортогональных функций, которые могут быть расположены в этой полосе и удовлетворять условиям теоремы Агеева, определяется выражением (2) и зависит только от длительности сигналов T .

При этом очень важен вопрос о рациональном выборе вида ортогональных сигналов, однако в данной работе он не рассматривается.

Рассмотрим систему ортогональных сигналов с активной паузой. При этом используемые в кодовых комбинациях символы представляются одним из m возможных сигналов. Выражение для вероятности неправильного приема $P_{ош}$ отдельного ортогонального сигнала при условии, что все они равновероятны и имеют одинаковую энергию, имеет вид [3]

$$P_{ош} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{(m-1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \Phi \left(\sqrt{2 \left(\frac{P_c}{P_n}\right) F_k T + v} \right) \right]^{(m-1)} \times \exp \left[-\frac{v^2}{2} \right] dv. \tag{3}$$

Здесь

$$\Phi \left(\sqrt{2 \left(\frac{P_c}{P_n}\right) F_k T + v} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\left(\sqrt{2 \left(\frac{P_c}{P_n}\right) F_k T + v}\right)} \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right] dx - \text{функция}$$

Крампа;

P_c — средняя мощность сигнала;

$P_n = \nu_0^2 F_k$ — мощность шумовой помехи;

$F_k = \frac{1}{|k(f)|_{\max}^2} \int_0^{\infty} |k(f)|^2 df$ — эффективная полоса пропускания канала;
 $|k(f)|_{\max}^2$ — максимальное значение квадрата модуля коэффициента передачи канала.

Из (3) видно, что при заданных значениях $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$, F_k и $P_{\text{ош}}$ длительность сигналов T зависит только от основания кода m , т. е.

$$T = T(m). \quad (4)$$

Таким образом, заданную вероятность ошибочного приема можно реализовать при различных соотношениях между m и T . Чтобы получить максимальную скорость передачи информации, необходимо обеспечивать заданное $P_{\text{ош}}$ при минимально возможном значении T и максимальном m . Поскольку полоса канала задана, то минимально возможная длительность ортогональных сигналов, как это следует из формулы (2), является функцией m_{max}

$$T_{\min} = T(m_{\text{max}}) = \frac{m_{\text{max}}}{2F_k}. \quad (5)$$

Подставляя теперь в (3) формулу (5), получим

$$P_{\text{ош}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2^{(m_{\text{max}}-1)}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \Phi \left(\sqrt{\left(\frac{P_c}{P_n}\right) m_{\text{max}} + v} \right) \right]^{(m_{\text{max}}-1)} \times \\ \times \exp \left[-\frac{v^2}{2} \right] dv. \quad (6)$$

Выражение (6) связывает вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$ с максимально возможным основанием кода m_{max} и через формулу (5) — с минимальной длительностью T_{\min} при условии, что $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ и F_k заданы, т. е.

$$m_{\text{max}} = m(P_{\text{ош}}). \quad (7)$$

Поскольку $m(P_{\text{ош}})$ не выражается через элементарные функции, то в общем случае при расчетах необходимо применять численные методы, однако при относительно больших значениях превышения сигнала над помехой (аргумент функции Крампа значительно больше единицы) можно воспользоваться следующим приближенным значением формулы (6) [6]:

$$P_{\text{ош}} \approx \frac{m_{\text{max}} - 1}{2} \left\{ 1 - \Phi \left[\sqrt{\left(\frac{P_c}{P_n}\right) \frac{m_{\text{max}}}{2}} \right] \right\} \quad (8) \\ \text{при} \left[\sqrt{\left(\frac{P_c}{P_n}\right) \frac{m_{\text{max}}}{2}} \right] \gg 1.$$

На рис. 1 представлены графики зависимости $m_{\text{max}} = m(P_{\text{ош}})$ для некоторых значений $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$, полученные по формулам (3) и (8). Как видно из графиков, с ростом m_{max} вероятность ошибочного приема символов $P_{\text{ош}}$ падает и тем быстрее, чем больше отношение $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$.

Однако не следует забывать, что основание кода m_{\max} связано с длительностью элементарного сигнала T_{\min} . Поэтому целесообразно рассмотреть вопрос об оптимальной скорости R_{opt} .

Известно, что для сигналов с числом дискретных значений m энтропия фактически переданных последовательностей определяется выражением [1]

$$H(x) - H(x/y) = \log_2 m + P_{\text{ош}} \log_2 P_{\text{ош}} + (1 - P_{\text{ош}}) \log_2 (1 - P_{\text{ош}}), \quad (9)$$

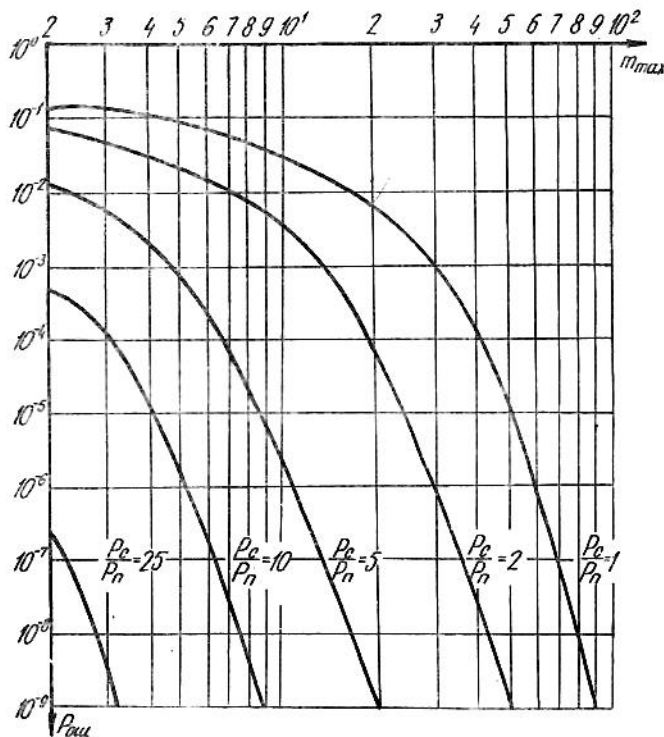


Рис. 1.

где $H(x)$ — энтропия источника сигнала;

$H(x/y)$ — условная энтропия помехи,

а скорость передачи информации

$$R = \frac{H(x) - H(x/y)}{T}, \quad (10)$$

где T — длительность ортогонального сигнала.

Используя формулы (5), (7), (9) и (10), запишем выражение для удельной оптимальной скорости передачи, т. е. максимальной удельной скорости передачи, при которой обеспечивается заданная вероятность ошибочного приема передаваемых элементов

$$R_{\text{opt F}} = \frac{H(x) - H(x/y)}{F_{\text{к}}} = \frac{\log_2 [m_{\max}] + P_{\text{ош}} \log_2 \frac{P_{\text{ош}}}{[m_{\max} - 1]} + (1 - P_{\text{ош}}) \log_2 (1 - P_{\text{ош}})}{m_{\max}}. \quad (11)$$

Практически представляют интерес малые значения $P_{\text{ош}}$. Для этого случая выражение (11) можно записать в виде

$$R'_{\text{opt } F} \approx 2 \frac{\log_2 m_{\text{max}}}{m_{\text{max}}}. \quad (12)$$

Очевидно, $R'_{\text{opt } F} > R_{\text{opt } F}$, т. е. $R'_{\text{opt } F}$ представляет в общем случае максимально возможное значение для удельной оптимальной скорости передачи, поэтому в дальнейшем будем обозначать его $R_{\text{opt } F \text{ max}}$.

Анализ выражения (12) показал, что оптимальным основанием кода является $m_{\text{max}} = e$, т. е. m_{max} , при котором скорость достигает максимального значения, нужно выбирать равным трем.

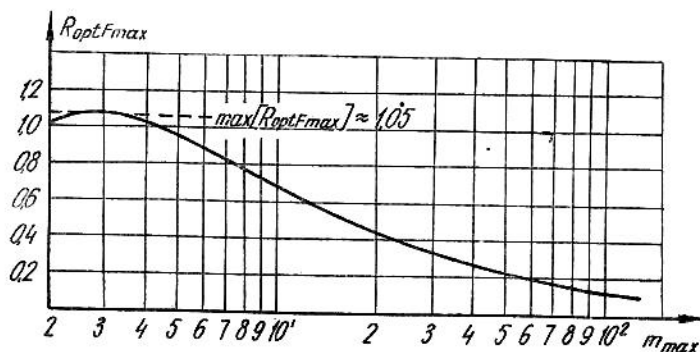


Рис. 2.

На рис. 2 представлен график зависимости $R_{\text{opt } F \text{ max}}$ как функция от m_{max} . Как видно из графика, при принятых ограничениях максимально достигнутое значение скорости $\max[R_{\text{opt } F \text{ max}}] = 1,05 \cdot \left[\frac{\partial v \cdot e \partial}{\text{сек} \cdot \text{гц}} \right]$. Для получения $R_{\text{opt } F \text{ max}}$, близкого к максимальному, необходимо применять коды с малым основанием ($m_{\text{max}} \leq 8$). Однако это возможно, если отношение $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ достаточно велико, так что, несмотря на малое основание кода, получаемая вероятность ошибки не превосходит заданной, т. е. m_{max} удовлетворяет уравнению (8). Таким образом, чем меньше заданное значение вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ и отношения $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$, тем большее основание кода m_{max} необходимо применять и тем с меньшей удельной оптимальной скоростью может осуществляться передача информации.

На рис. 3 показана зависимость $R_{\text{opt } F}$ как функции от допустимой вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ (графики построены по формуле 11) для различных значений $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$.

При больших значениях допустимой вероятности ошибки ($P_{\text{ош}} > 0,1$) уравнение (6) не выполняется даже при значениях $m_{\text{max}} = 2$, т. е. при заданном значении $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ и минимально возможном основании $m_{\text{max}} = 2$, которое определяет, согласно уравнению (2), минимальное значение T_{min}

$$\min[T_{\text{min}}] = \frac{1}{F_k}, \quad (13)$$

фактическая вероятность ошибки будет получаться меньше допустимой. Поэтому удельная скорость передачи $R_{opt F}$ в этой области значений $P_{ош}$ постоянна и будет определяться только отношением $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$. На рис. 3 эта часть графиков изображена пунктирными линиями.

В заключение сравним удельную оптимальную скорость передачи информации $R_{opt F}$ с удельной скоростью передачи, которую можно получить в бинарной ортогональной системе R_{2F} при различных значениях отношения $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ и при условии, что вероятность ошибки $P_{ош}$ в обоих слу-

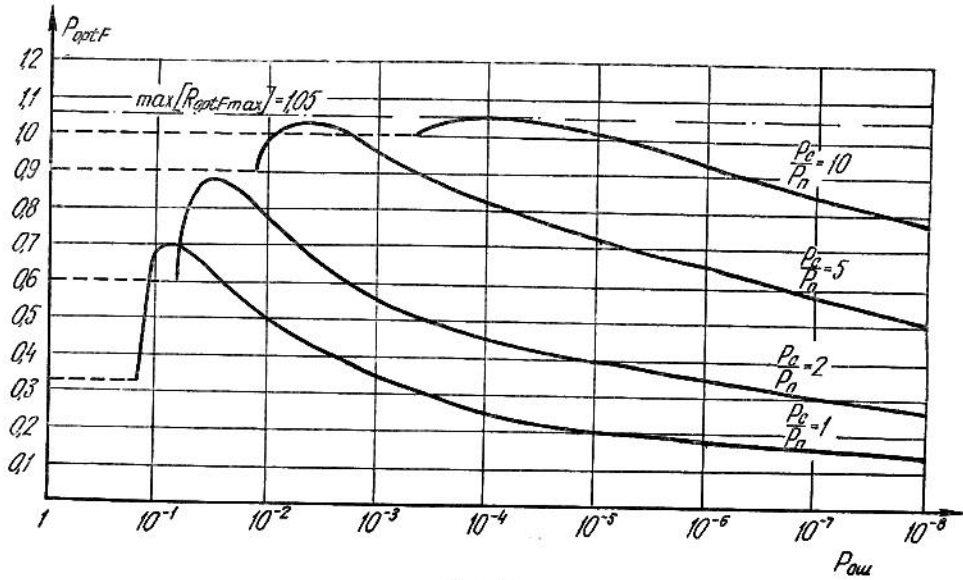


Рис. 3.

чаях поддерживается одинаковой. С этой целью на графике 4 приведены кривые $R_{2F} = R_{2F} \left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ и $R_{opt F} = R_{opt F} \left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ для двух значений допустимой вероятности ошибки ($P_{ош} = 10^{-4}$ и 10^{-7}), где

$$R_{2F} = \frac{1 + P_{ош} \log_2 P_{ош} + (1 - P_{ош}) \log_2 (1 - P_{ош})}{T_{min} F_k} \quad (14)$$

Это выражение вытекает из формулы (11), а T_{min} , входящее в него, при заданном значении $P_{ош}$ для различных отношений $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ определяется из уравнения

$$P_{ош} = \frac{1}{2} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\left(\frac{P_c}{P_n}\right) T_{min} F_k} \right) \right] \quad (15)$$

При вычислении T_{min} необходимо иметь в виду, что теоретически минимально возможное значение T_{min} для случая $m = 2$ определяется по формуле (13) и может быть получено, как следует из (15), при достаточно большом значении $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$. При дальнейшем увеличении $\left(\frac{P_c}{P_n}\right) T_{min}$ будет оста-

ваться постоянным и равным своему минимальному значению. Величина R_{2F} при этом достигает своего максимального значения, после чего, очевидно, также остается постоянной и равной

$$R_{2F \max} = 1 + P_{\text{ош}} \log_2 P_{\text{ош}} + (1 - P_{\text{ош}}) \log_2 (1 - P_{\text{ош}}). \quad (16)$$

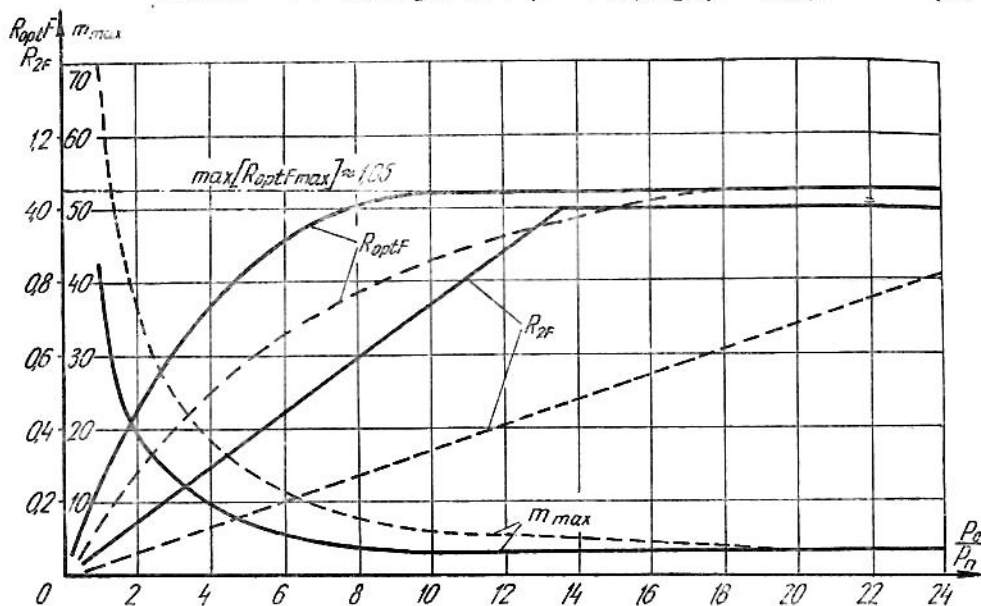


Рис. 4.

При малых значениях вероятности ошибки ($P_{\text{ош}} < 10^{-2}$) выражение (16) можно записать так:

$$R_{2F \max} \approx 1 \left[\frac{\partial \text{в.ед/сек}}{\partial \epsilon} \right] \quad (17)$$

$R_{\text{opt } F}$ вычислялось по формулам (11), (3) и (8).

Кроме зависимостей, указанных выше, на рис. 4 показаны изменения основания кода m_{max} , соответствующие значениям оптимальной скорости передачи $R_{\text{opt } F}$.

Все зависимости на рис. 4, относящиеся к вероятности ошибки $P_{\text{ош}} = 10^{-4}$, нанесены сплошными линиями, а к $P_{\text{ош}} = 10^{-7}$ — пунктирными.

Полученные графики показывают, что применение кодов с основанием $m = m_{\text{max}}$ для большого диапазона значений $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ дает значительный

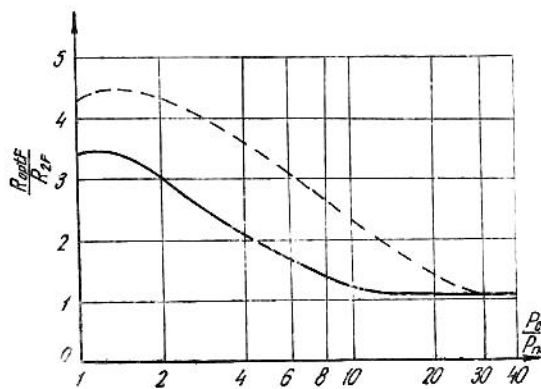


Рис. 5.

выигрыш в скорости передачи информации по сравнению со случаем, когда основание кода представлено двумя ортогональными сигналами.

На рис. 5 приведена зависимость величины этого выигрыша $\frac{R_{opt F}}{R_{2F}}$ как функция отношения $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ для тех же значений вероятностей ошибки ($P_{ош} = 10^{-4}, 10^{-7}$). Максимальное значение величины $\frac{R_{opt F}}{R_{2F}}$ соответствует малым отношениям $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ и может быть реализовано, как это следует из рис. 4, применением достаточно высоких оснований кода. Так, для $P_{ош} = 10^{-7}$ максимальное значение $\frac{R_{opt F}}{R_{2F}}$ равно 4,5 и соответствует отношению $\left(\frac{P_c}{P_n}\right) = 1,5$, при этом основание кода $m_{max} = 52$. С увеличением допустимой вероятности ошибки $P_{ош}$ и отношения $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$ величина выигрыша уменьшается, однако при этом резко уменьшается требуемое значение m_{max} , что значительно упрощает практическую реализацию подобных систем.

Так, увеличив отношение $\frac{P_c}{P_n} = 1,5$ в два раза, т. е. обеспечив $\frac{P_c}{P_n} = 3$, получим для

$P_{ош} = 10^{-7}$ значение $\frac{R_{opt F}}{R_{2F}} = 3,9$, а требуемое основание кода $m_{max} = 24$.

Если удельные скорости передачи информации равны, т. е. $R_{2F} = R_{opt F}$, то, как следует из графиков рис. 4, применение оснований кода $m = m_{max}$ позволяет осуществлять передачу информации с заданной скоростью при значительно меньшем отношении $\left(\frac{P_c}{P_n}\right)$, чем в случае бинарных ортогональных систем.

На рис. 6 изображены изменения отношения $\frac{(P_c/P_n)m=2}{(P_c/P_n)m=m_{max}}$ в зависимости от $R_{opt F}$ для рассмотренных случаев, т. е. когда вероятности ошибки $P_{ош} = 10^{-4}$ и 10^{-7} .

В заключение отметим, что рассмотренные ортогональные системы с активной паузой и с основанием $m = m_{max}$ помимо положительных свойств имеют некоторые недостатки, наиболее существенный из которых заключается в том, что удельная оптимальная скорость передачи информации $R_{opt F}$ ни при каких условиях не может быть сделана больше некоторого максимального значения, равного

$$\max [R_{opt F \max}] = 1,05 \left[\frac{\text{дв. ед./сек}}{\text{гц}} \right].$$

В этом смысле лучшие результаты удается получить, применяя системы, использующие биортогональные сигналы.

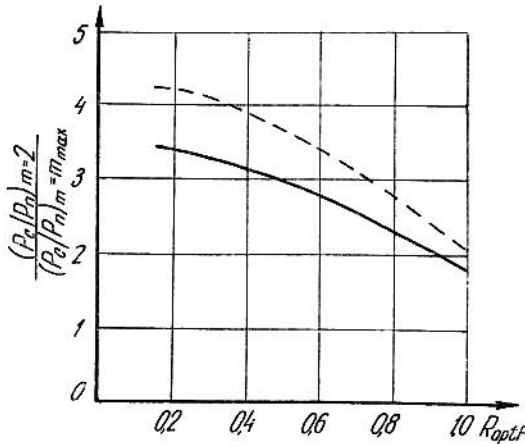
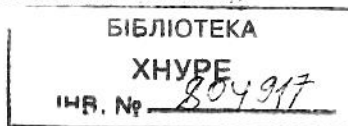


Рис. 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Финк. Теория передачи дискретных сообщений. Изд-во «Сов. радио», 1963.
 2. К. Е. Шеннон. Статистическая теория передачи электрических сигналов. Сб. «Теория передачи импульсных сигналов при наличии помех». Изд-во ИЛ, 1953.
 3. В. А. Котельников. Теория потенциальной помехоустойчивости. Госэнергоиздат, 1956.
 4. Передача цифровой информации. Сборник статей под редакцией С. И. Самойленко. Изд-во ИЛ, 1963.
 5. Д. В. Агеев. Основы теории линейной селекции. Научно-технический сборник ЛЭИС, 1935, № 10.
 6. Б. А. Варшавер. К теории передачи дискретных сигналов при флюктуационных помехах. Труды МЭИ, вып. XXIX, Госэнергоиздат, 1957.
-