ВОПРОСЫ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИНФОРМАЦИИ

С. Н. Терентьев, С. Е. Фалькович

В работе рассматриваются системы передачи количественной информации цифровым методом. Под количественной информацией понимаются сообщения, которые имеют смысл некоторой величины l. Полагается, что величина l может принимать любые значения из интервала $(L_0;\ L_m)$ с заданной априорной вероятностью $p(l)$. Передача ведется цифровым методом. Это означает, что величина l квантована на некоторое число M уровней

$$l_N = L_0 + \frac{2N-1}{2}\Delta l;\ N = 1, \ldots M, \tag{1}$$

где Δl — шаг квантования

$$\Delta l = \frac{L_m - L_0}{M+1}. \tag{2}$$

Объектом передачи являются означающие номера уровней числа N, закодированные позиционным (обычно двоичным) кодом, так что ансамбль передаваемых сообщений представляет собой созокупность

$$\{l_N\} = l_1, \ldots l_M \text{ или } \{N\} = 1, \ldots M. \tag{3}$$

Ансамбль решений (или оценок), принимаемых в процессе приема, представляет собой аналогичную совокупность, обозначаемую в дальнейшем теми же символами, что и сообщения, но со звездочкой $\{l_N^*\}$ или $\{N^*\}$. Оптимальной называется система, которая обеспечивает наилучшие в смысле выбранного критерия решения. Наиболее общий критерий оптимума — критерий среднего риска сводится к обеспечению минимума математического ожидания ρ некоторой функции $r\,(l_j^*;\ l_i)$ сообщения l_i и оценки l_j^*, называемой функцией потерь.

$$\rho = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} r\,(l_j^*;\ l_i)\,p\,(l_i)\,p\,(l_j^*/l_i), \tag{4}$$

Здесь $p(l_i)$ (как и выше) — априорная вероятность передачи различных сообщений. $p(l_j^*/l_i)$ — условная вероятность реализации решения l_j^* при условии, что было передано сообщение l_i.

Характер оптимальности решения и рекомендации по выбору тех или иных элементов и параметров системы зависит от выбора вида функции потерь r. В теории передачи дискретных сообщений [1] наиболее широко используется простая функция потерь

$$r\,(l_j^*;\ l_i) = 1 - \delta_{ij}, \tag{5}$$

которая принимает значения 0 для всех правильных решений ($i = j$) и 1 для всех неправильных ($i \neq j$). Результаты подстановки простой функции потерь (5) в общую формулу (4) хорошо известны [1]. Помехоустойчивость (качество) системы характеризуется средней вероятностью ошибочного решения. Оптимальной оказывается система (полагается $p(l_i) = \text{const}$), у которой одинаковые вероятности ошибочного решения для всех элементов сигнала и соответственно равномерное распределение энергии сигнала по элементам.

Использование простой функции потерь оправдано в тех случаях, когда любое неправильное решение можно считать одинаково нежелательным. При передаче количественной информации не безразлично, какое из неправильных решений будет принято. Цену ошибки или потери, связанные с ошибкой, следует считать некоторой монотонно возрастающей функцией абсолютной величины ошибки $|l_j^* - l_i|$. В подавляющем большинстве случаев разумно, как это делается при оценке непрерывных параметров, принять квадратичную функцию потерь

$$r(l_j^*;\ l_i) = (l_j^* - l_i)^2. \tag{6}$$

При этом помехоустойчивость системы и ее качество характеризуются величиной средней квадратичной ошибки σ^2, а критерий оптимума сводится к широко используемому в статистике критерию минимума этой ошибки

$$\rho = \sigma^2 = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{M} (l_j^* - l_i)^2\, p(l_i)\, p(l_i^* \,|\, l_i). \tag{7}$$

или, подставляя (1), получим

$$\sigma^2 = (\Delta l)^2\, \overline{\Delta N^2}, \tag{8}$$

где ΔN — ошибка решения, равная разности между переданным числом N и принятым решением N^*

$$\Delta N = N - N^*, \tag{9}$$

а черта над величиной здесь и в дальнейшем означает статистическое усреднение по всем возможным значениям передаваемых сообщений N и принимаемых решений N^*.

Поскольку в теории передачи дискретных сообщений, как правило, используется критерий, основанный на применении простой функции потерь [1], целесообразно выделить из класса система передачи дискретной информации системы передачи количественной информации и оценивать их качество или помехоустойчивость по критерию средней квадратичной ошибки. В дальнейшем рассматривается оптимизация некоторых параметров системы передачи количественной информации по сформированному критерию при следующих допущениях.

1. Прием производится на фоне аддитивных флюктуационных помех с постоянной спектральной интенсивностью N_0.
2. Числа передаются двоичным кодом (0, 1).
3. Оптимально поэлементно обрабатываются принимаемые сигналы, которые для упрощения алгебраических расчетов и конечных формул полагаются некогерентными.
4. Априорные распределения вероятностей чисел 0 и 1 в различных разрядах полагаются независимыми и известными.

Если числа N, подлежащие передаче по системе связи, кодируются двоичным позиционным кодом, то имеет место следующее выражение:

$$N = \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} a_k. \tag{10}$$

Здесь k — номер разряда (позиции) двоичного числа;
$m = [\log_2 M]$ — значность двоичного числа, равная целой части двоичного логарифма от максимального из передаваемых чисел;
a_k — цифры 0 или 1, стоящие на k-й позиции.

При наличии помех в канале символы a_k могут искажаться. Поэтому на выходе приемного устройства будет наблюдаться последовательность a_1^*, a_2^* ... a_m^*, вообще говоря, отличная от переданной последовательности a_1, a_2 ... a_m, а принятое число

$$N^* = \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} a_k^*. \tag{11}$$

При этом ошибка в значении принятого числа

$$\overline{\Delta N} = N^* - N = \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} (a_k^* - a_k). \tag{12}$$

Среднее значение ошибки можно найти, если известны априорные вероятности появления в k-м разряде нуля — $P_k(0)$ единицы $P_k(1)$, вероятности искажений $P_k(1/0)$ и $P_k(0/1)$

$$\Delta N = \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} [P_k(0) P_k(1/0) - P_k(1) P_k(0/1)]. \tag{13}$$

Как было сказано выше, оптимизацию системы передачи количественной информации целесообразно вести не по минимуму средней вероятности ошибок, а по минимуму средней квадратичной ошибки. Квадрат ошибки в значении принятого числа

$$\Delta N^2 = \sum_{k=1}^{m} 2^{2(k-1)} (a_k^* - a_k)^2 + \\ + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} 2^{k+j-2} (1 - \delta_{jk}) (a_k^* - a_k)(a_j^* - a_j). \tag{14}$$

Средняя квадратичная ошибка

$$\overline{\Delta N^2} = \sum_{k=1}^{m} 2^{2(k-1)} [P_k(0) P_k(1/0) + P_k(1) P_k(0/1) + \\ + \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} 2^{k+j-2} (1 - \delta_{jk}) [P_k(0) P_k(1/0) - P_k(1) P_k(0/1)] [P_j(0) P_j(1/0) - \\ - P_j(1) P_j(0/1)] \tag{15}$$

Здесь $\delta_{jk} = \left| \begin{array}{l} 1, \text{ если } j = k \\ 0, \text{ если } j \neq k. \end{array} \right.$

Для простоты рассмотрим случай, когда априорные вероятности $P_k(0) = P_k(1)$ и канал симметричный, т. е. $P_k(1/0) = P_k(0/1)$.

Здесь выражение для среднеквадратической ошибки упростится

$$\overline{\Delta N^2} = \sum_{k=1}^{m} 2^{2(k-1)} P_{\text{ош } k}, \tag{16}$$

где $P_{\text{ош } k} = P_k(0/1) = P_k(1/0)$.

В дальнейшем задача оптимизации системы передачи сводится к минимизации выражения (16). Это достигается наложением некоторого дополнительного условия на способ формирования кодовой комбинации, отображающей передаваемое число.

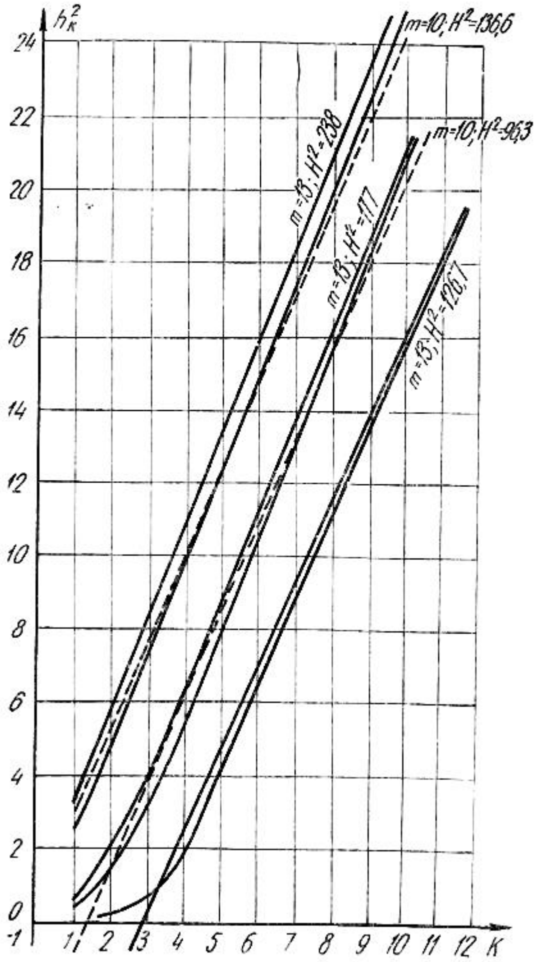

Рис 1.

Разумно, например, потребовать, чтобы минимум среднеквадратичной ошибки обеспечивался без увеличения общей энергии кодовой комбинации. При бинарном кодировании это требование равносильно сохранению скорости передачи двоичных чисел в секунду, так как при этом продолжительность кодовой комбинации остается постоянной.

Введем следующие обозначения: Q_k — энергия элемента кодовой комбинации на k-й позиции, N_0 — спектральная плотность флюктуационных шумов в канале.

$$h_k^2 = \frac{Q_k}{N_0}. \tag{17}$$

Теперь задачу оптиматизации можно сформулировать окончательно. Требуется найти минимум

$$\Delta N^2 = \sum_{k=1}^{m} 2^{2(k-1)} P_{\text{ош } k} \tag{18}$$

при условии, что

$$\sum_{k=1}^{m} h_k^2 = H^2.$$

Для определенности будем полагать, что передача ведется с частотной манипуляцией, а прием — некогерентный. Тогда, при наличии в канале нормального шума, вероятность ошибки в приеме элемента кодовой комбинации определяется известным выражением (1)

$$P_{\text{ош } k} = \frac{1}{2} e^{-\frac{h_k^2}{2}}. \tag{19}$$

Подставляя (19) в (18), получим

$$\overline{\Delta N^2} = \sum_{k=1}^{m} 2^{2(k-1)} \frac{1}{2} e^{-\frac{h_k^2}{2}}, \qquad \sum_{k=1}^{m} h_k^2 = H^2 \tag{20}$$

Решение этой вариационной задачи дает следующий результат. Минимум дисперсии ошибки передаваемых чисел системой связи обеспечивается, когда на передающей стороне в m-значном двоичном числе символы a_k имеют энергию h_k^2, соответствующую следующей функции от k:

$$h_k^2 = \frac{H^2}{[\log_2 M]} - 4 \ln 2 \left(\frac{[\log_2 M + 1]}{2} - k \right). \tag{21}$$

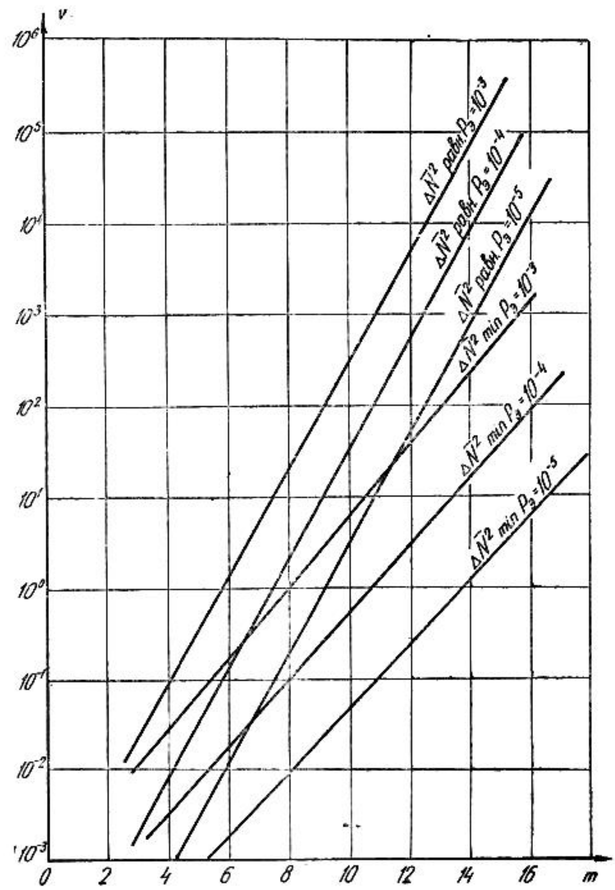

Рис. 2.

На рис. 1 приведен график зависимости энергии посылок от номера разряда, обеспечивающей минимум дисперсии ошибки $\overline{\Delta N^2_{\min}}$ при заданной энергии кодового слова H^2. На этом же графике пунктирными линиями показана зависимость $h_k^2 = f(k)$ при когерентном приеме. Как видно из графиков, отличие в законе оптимального распределения энергии при когерентном и некогерентном приеме незначительное.

На рис. 2 приведены графики зависимости дисперсии ошибки от разрядности m.

Из графиков видно, что при оптимальном распределении энергии кодового слова между символами a_k дисперсия ошибки $\overline{\Delta N^2_{\min}}$ уменьшается в $100 \div 500$ раз по сравнению с дисперсией ошибки, возникающей при передаче чисел N обычным позиционным двоичным кодам.

Легко показать что сохраняя дисперсию ошибки неизменной, при оптимальном распределении $h_k^2 = f(k)$, энергию кодового слова можно уменьшить в $2 \div 2{,}5$ раза. Это равносильно выигрышу в скорости передачи во столько же раз.

Выше были изложены вопросы оптимизации системы, предназначенной для передачи чисел N. Если система предназначена для передачи чисел, несущих информацию об изменении некоторой непрерывной величины $l \in \{L_0;\ L_m\}$, то с точки зрения оптимизации такой системы важным является вопрос о выборе шага квантования Δl или, что то же самое, о значности кода

$$m = [\log_2 M].$$

Понятно, что ошибка в передаче величины l будет зависеть как от величины шага квантования Δl, так и от точности передачи числа N. Дисперсия этой ошибки

$$\sigma^2_{\text{общ}} = \sigma^2_{\text{кв}} + \sigma^2_{\text{ш}}. \tag{22}$$

Здесь $\sigma^2_{\text{кв}}$ — дисперсия ошибки вследствие квантования величин l;

$\sigma^2_{\text{ш}}$ — дисперсия ошибки в передаче числа N за счет шумов.

Задача оптимизации сводится к определению оптимального числа разрядов двоичного кода, с помощью которого передаются все значения $l_N \in \{l_0;\ l_M\}$. При этом для заданных условий в канале ошибка $\sigma^2_{\text{общ}}$ должна быть минимальной.

Для простоты будем полагать, что величина $l \in \{0,\ L_m\}$ имеет равномерный закон распределения плотности вероятностей

$$\varphi(l) = \frac{1}{L_m}.$$

Тогда дисперсию ошибки квантования легко определить из выражения [2]

$$\sigma^2_{\text{кв}} = \int\limits_{l_N - 0,5\Delta l}^{l_N + 0,5\Delta l} (l - l_N)^2 \varphi(l)\, dl = \frac{1}{12}\left(\frac{L_m}{M}\right)^2 \tag{23}$$

Дисперсия ошибки $\sigma^2_{\text{ш}}$ определится из выражения

$$\sigma^2_{\text{ш}} = \left(\frac{L_m}{M}\right)^2 \overline{\Delta N^2}. \tag{24}$$

При оптимальном распределении $h^2_{k\,\text{opt}}$, с учетом (21),

$$\sigma^2_{\text{ш}\,\min} = \left(\frac{L_m}{M}\right)^2 \sum_{k=1}^{m} 4^{(k-1)} \exp\left[-\frac{H^2}{2m} + \ln 2^{m-1} - \ln 4^{k-1}\right]. \tag{25}$$

После несложных преобразований выражения (25) и учета (23) и (22) будем иметь

$$y = \frac{\sigma^2_{\text{общ}}}{L^2_m} = \frac{1}{12 \cdot 4^m} + \frac{m}{4 \cdot 2^m} \exp\left(-\frac{H^2}{2^n}\right). \tag{26}$$

Полученное выражение позволяет определить оптимальное число разрядов двоичного кода, обеспечивающего минимальную общую ошибку $\sigma^2_{\text{общ}}$.

На рис. 3 приведены графики зависимости $y_3 = f_3(m)$, построенные по выражению (26). Из графиков видно, что, начиная с некоторого значения $m_{\text{opt}} = [\log M_{\text{opt}}]$, увеличение значности кода (т. е. числа уровней квантования M) не только не уменьшает ошибки $\sigma_{\text{общ}}$, но даже приводит к ее увеличению. Это особенно хорошо видно из графиков, $y_2 = f_2(m)$ рис. 4. Графики построены для случаев, когда на приемной стороне производится когерентный прием и распределение $h^2_{k\,\mathrm{opt}} = f(k)$. На этом же рисунке приведены графики $y_1 = f_1(m)$ для случая, когда распределение энергии кодового слова равномерное, т. е. $h^2_k = \frac{H^2}{m}$. Из

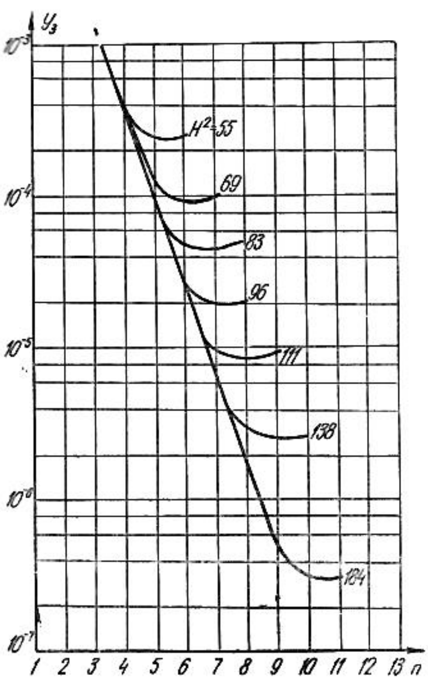

Рис. 3.

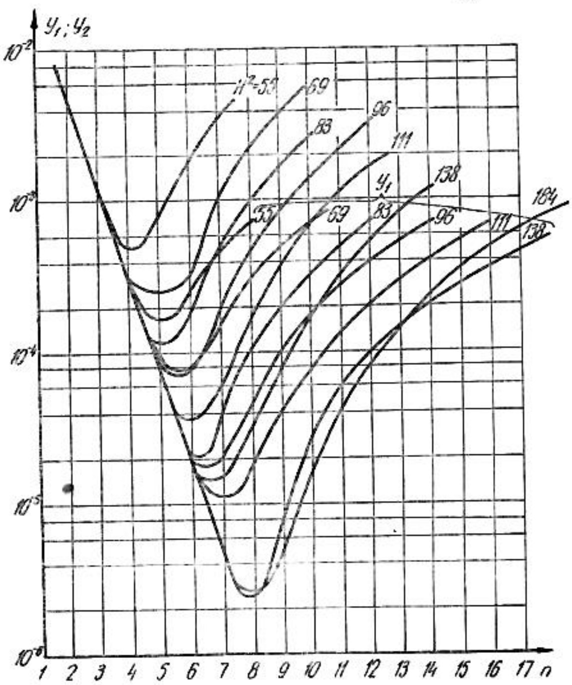

Рис. 4.

сравнения графиков видно, что при значности код $m = 7 \div 8$ и достаточно большом отношении энергии сигнала к спектральной плотности шумов оптимальные системы передачи позволяют уменьшить дисперсию ошибки на порядок. Эти же графики свидетельствуют о том, что стремление повысить точность передачи дискретной величины путем увеличения числа уровней квантования без учета погрешностей передачи может привести к увеличению дисперсии ошибки на $2 \div 3$ порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Финк. Теория передачи дискретных сообщений. Изд-во «Сов. радио», 1963.
2. Е. А. Дроздов, А. П. Пятибратов. Автоматическое преобразование и кодирование информации. Изд-во «Сов. радио», 1964.