ПРИМЕНЕНИЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ К ОДНОМУ КЛАССУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

А. Г. Руткас

В статье показано, как операторный комплекс, понятие которого введено в [6, 7], позволяет решать различные задачи для передающих реактивных многополюсников с сосредоточенными элементами. Рассмотрен также случай, когда многополюсник не обладает операторным комплексом.

1. Здесь используется терминология теории графов в соответствии с [1]. Мультиграф обозначается как $G = (x, \Gamma)$, где x — множество вершин x_i, Γ — множество ребер q_l. Пусть многополюсник $\overline{\Phi}$ без трансформаторов содержит m входных ребер $q_1^{(-)}, \ldots, q_m^{(-)}$; m выходных $q_1^{(+)}, \ldots, q_m^{(+)}$; μ индуктивностей — ребер $q_{L_1}, \ldots, q_{L\mu}$; $\eta = N - \mu$ емкостей — ребер $q_{c(\mu+1)}, \ldots, q_{cN}$ [3, 8, 9]. Тогда $\overline{\Phi}$ есть мультиграф, каждому ребру q_j которого отвечает два комплексных числа — ток I_j и напряжение U_j. В отличие от замкнутой системы $\overline{\Phi}$ многополюсник без внешних ребер $q_i^{(\pm)}$ называется незамкнутым и обозначается через Φ. Изучая колебания, установившиеся на частоте ω, можно ограничиться амплитудными значениями токов и напряжений.

Вектор $\vec{\varphi}^{(-)} = (U_1^{(-)}, \ldots, U_m^{(-)}; I_m^{(-)}, \ldots, I_1^{(-)})$ называется входным, $\vec{\varphi}^{(+)} = (U_1^{(+)}, \ldots, U_m^{(+)}; I_m^{(+)}), \ldots, I_1^{(+)}$ — выходным [8, 9], $\vec{\psi} = (\sqrt{L_1} I_{L1}, \ldots, \sqrt{L_\mu} I_{L\mu}; \sqrt{C_{\mu+1}} U_{c(\mu+1)}, \ldots, \sqrt{C_N} U_{cN})$ — вектором внутренних состояний многополюсника $\overline{\Phi}$. Если по заданному $\vec{\varphi}^{(-)}$ можно определить электрическое состояние всей цепи $\overline{\Phi}$, то в силу линейности системы $\overline{\Phi}$ существуют отображения $r(\omega)$, $S(\omega): \vec{\psi} = R(\omega)\vec{\varphi}^{(-)}$, $\vec{\varphi}^{(+)} = S(\omega)\vec{\varphi}^{(-)}$. Матрица $S(\omega)$ называется передаточной [8, 9]. Согласно [6] незамкнутый многополюсник Φ, для которого существуют отображения R и S, называется открытой системой.

Пусть T — квадратная матрица порядка N, элементы которой — комплексные постоянные t_{jk}; в координатном N-мерном пространстве H матрица T задает линейный оператор T. Аналогично в n-мерном пространстве E некоторая квадратная матрица $J = \|J_{\alpha\beta}\|$, задает оператор J. Очевидно, $\vec{\psi}$ принадлежит $H (\vec{\psi} \in H)$, а при $n = 2m \vec{\varphi}^{(\pm)} \in E$. По отношению к системе Φ пространство H называется пространством внутренних состояний, E — пространством входов и выходов. Согласно [6] операторный комплекс $[T, e_\alpha, J]$ — это совокупность оператора T, оператора J $(J = J^*,\ J^2 = I)$ и векторов $\mathbf{e}_\alpha$ $(\mathbf{e}_\alpha \in H)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, для которой выполняется соотношение

$$\frac{T - T^*}{i}\vec{\psi} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\vec{\psi},\ \mathbf{e}_\alpha\right) J_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\beta. \quad (1)$$

Операторный комплекс $[T, e_\alpha, J]$ принадлежит открытой системе Ф, если он связан с отображениями $R(\omega)$, $S(\omega)$ следующим образом:

$$(T - \omega I)\vec{\psi} = \sum_{\alpha=1}^{n}\varphi_\alpha^{(-)}\mathbf{e}_\alpha, \quad (2)$$

$$\vec{\varphi}^{(+)} = \vec{\varphi}^{(-)} - i\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\vec{\psi},\ \mathbf{e}_\alpha\right) J\mathbf{a}_\alpha, \quad (3)$$

где $\varphi_\alpha^{(-)}$ — компоненты вектора $\vec{\varphi}^{(-)}$, $\mathbf{a}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{a}_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

Удобно дать названия некоторым специальным циклам в электрической цепи $\overline{\Phi}$. Стандартный цикл Q_{Lj} (Q_β) для ребра q_{Lj} $(q_\beta^{(+)}$ — это цикл, состоящий из ребер типа q_{ck}, $q_\beta^{(-)}$ (или одного из этих типов) и в точности одного ребра q_{Lj} $(q_\beta^{(+)})$. C — цикл по определению состоит из ребер типа q_{ck}; $C^{(-)}$ — цикл, состоящий из ребер типа q_{ck}, $q_\beta^{(-)}$; $C^{(+)}$ — цикл — из ребер типа q_{ck}, $q_\beta^{(+)}$.

Из уравнений (2), (3) вытекает формула для отображения $S(\omega)$ [6]:

$$S(\omega) = I - \|(\mathbf{e}_\alpha (T - \omega I)^{-1},\ \vec{e}_\beta)\|\, J. \quad (4)$$

Если многополюснику Ф принадлежит операторный комплекс $[T, e_\alpha, J]$, то $S(\infty) = I$, т. е. Ф осуществляет единичную передачу на бесконечной частоте. Можно доказать следующее.

Теорема 1. Чтобы многополюснику Ф принадлежал операторный комлекс, необходимо и достаточно выполнение таких условий: 1) $S(\infty) = I$; 2) в Ф отсутствуют C, $C^{(+)}$, $C^{(-)}$ — циклы; 3) $\mu = M - m$, где μ — число индуктивностей, m — число входных ребер, M — цикломатическое число* мультиграфа $\overline{\Phi}$.

При выполнении условий теоремы 1 для каждого ребра q_{Lj}, $q_\beta^{(+)}$ в $\overline{\Phi}$ имеется единственный стандартный цикл.

2. Примеры построения операторных комплексов

Пример 1. Замкнутый четырехполюсник $\overline{\Phi}_0 = G = (x, \Gamma)$ (рис. 1) имеет $|x| = 3$, $|\Gamma| = 5$, $\Gamma = \{q^{(-)}, q_L, q_{L1}, q_{c2}, q^{(+)}\}$, число входных ребер $m = 1$. Очевидно, C, $C^{(-)}$, $C^{(+)}$ — циклы отсутствуют; $S(\infty) = I$; $M = |\Gamma| - |x| + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$, $M - m = \mu = 2$. Условия теоремы 1 выполнены. Стандартные вектор-циклы суть: $\mathbf{Q}_L = (1, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{Q}_{L1} = (1, 0, 1, 1, 0)$, $\vec{Q} = (1, 0, 0, 0, 1)$, где входящим в цикл ребрам соответствуют единицы (ср. Г). Принимается: $\vec{\varphi}^{(-)} = (U^{(-)}, I^{(-)})$; $\vec{\psi} = (\sqrt{L}I_L,\ \sqrt{L_1}I_{L1},\ \sqrt{C}U_c) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

* $M = |\Gamma| - |x| + 1$, где $|\Gamma|$ — число ребер, $|x|$ — число вершин мультиграфа $\overline{\Phi} = G = (x, \Gamma)$.

Из уравнений цепи $\overline{\Phi}_0$ в установившемся режиме легко получить зависимости между компонентами векторов $\vec{\varphi}^{(-)}$, $\vec{\psi}$

$$\begin{cases} U^{(-)} = i\omega L I_L \\ U^{(-)} - U_c = i\omega L_1 I_{L1} \\ I_{L1} = i\omega C U_c \end{cases} \qquad \begin{cases} -\omega\xi_1 = \dfrac{i}{\sqrt{L}} U^{(-)} \\ \dfrac{i}{\sqrt{LC_1}}\xi_3 - \omega\xi_2 = \dfrac{i}{\sqrt{L_1}} U^{(-)} \\ -\dfrac{i}{\sqrt{LC_1}}\xi_2 - \omega\xi_3 = 0. \end{cases}$$

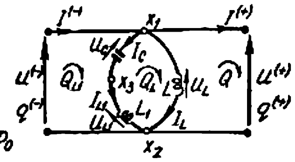

Рис. 1.

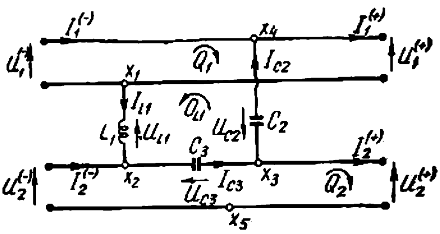

Рис. 2.

Запись последней системы в форме (2) дает следующий операторный комплекс:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{i}{\sqrt{L_1 C}} \\ 0 & \dfrac{i}{\sqrt{CL_1}} & 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \left(\frac{i}{\sqrt{L}};\ \frac{i}{\sqrt{L_1}};\ 0\right); \\ \mathbf{e}_2 &= (0;\quad 0;\quad 0) \end{aligned} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Условие (1) выполнено: $\vec{\psi}\dfrac{T - T^*}{i} = 0 = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{2}\left(\vec{\psi},\mathbf{e}_\alpha\right) J_{\alpha\beta}\mathbf{e}_\beta = \left(\vec{\psi},\ \mathbf{e}_1\right)\mathbf{e}_2 + {}$ $+ \left(\vec{\psi},\mathbf{e}_2\right)\mathbf{e}_1$.

После вычислений по формуле (4) получаем

$$S_0(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1 - \omega^2 C(L + L_1)}{i\omega L(1 - L_1 C\omega^2)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Такой же вид имеет передаточная матрица четырехполюсника Φ_0, вычисленная непосредственно по рис. 1, что еще раз свидетельствует о справедливости (3) и является проверкой правильности всех вычислений.

Пример 2. В замкнутом восьмиполюснике $\overline{\Phi} = (x, \Gamma)$ (рис. 2) количество вершин $|x| = 5$; $|\Gamma| = 7$; $\Gamma = \{q_1^{(-)},\ q_2^{(-)}\ q_{L1},\ q_{c2},\ q_{c3},\ q_1^{(+)}\ q_2^{(+)}\}$; $M = 3$; $\mu = 1$; $m = 2$. Операторный комплекс, принадлежащий восьмиполюснику Φ, существует. Стандартными вектор-циклами являются

$$\vec{Q}_{L1} = (-1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0);\ \vec{Q}_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0);$$

$$\vec{Q}_2 = (0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1).$$

Легко получить связи между компонентами векторов $\vec{\varphi}^{(-)} = (U_1^{(-)}, U_2^{(-)}, I_2^{(-)}, I_1^{(-)}$ и $\vec{\psi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\sqrt{L_1} I_{L1};\ \sqrt{C_2} U_{c2};\ \sqrt{C_3} U_{c3})$:

$$\begin{cases} -U_1^{(-)} - U_{c2} - U_{c3} = i\omega L_1 I_{L1} \\ I_{L1} = i\omega C_2 U_{c2} \\ I_2^{(+)} + I_{L1} = i\omega C_3 U_{c3}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{i}{\sqrt{C_2 L_1}} \xi_2 + \frac{i}{\sqrt{C_3 L_1}} \xi_3 - \omega \xi_1 = -\frac{i}{\sqrt{L_1}} U_1^{(-)} \\ -\frac{i}{\sqrt{L_1 C_2}} \xi_1 - \omega \xi_2 = 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{L_1 C_3}} \xi_1 - \omega \xi_3 = \frac{i}{\sqrt{C_3}} I_2^{(-)}. \end{cases}$$

Сравнение последней системы с (2) позволяет записать операторный комплекс

$$T = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{L_1 C_2}} & -\frac{i}{\sqrt{L_1 C_3}} \\ \frac{i}{\sqrt{C_2 L_1}} & 0 & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{C_3 L_1}} & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \begin{matrix} e_1 = \left(-\frac{i}{\sqrt{L_1}}, 0, 0\right) \\ e_2 = (0,\ 0,\ 0) \\ e_3 = \left(0,\ 0,\ \frac{i}{\sqrt{C_3}}\right) \\ e_4 = (0,\ 0,\ 0) \end{matrix}; \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $T = T^*$. Легко проверить уравнение (1):

$$\vec{\psi} \frac{T - T^*}{i} = 0 = \sum_{\alpha, \beta = 1}^{4} \left(\vec{\psi}, e_\alpha\right) J_{\alpha\beta} e^\beta.$$

По формуле (4), после соответствующих вычислений, получается передаточная матрица восьмиполюсника

$$S(\omega) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{L_1 C_3 K(\omega)} & 0 & -\frac{i\omega}{L_1 K(\omega)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega^2 - \frac{1}{L_1 C_2}}{i\omega C_3 K(\omega)} & 1 & -\frac{1}{L_1 C_3 K(\omega)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

где $K(\omega) = -\omega^2 + \frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$.

Проверкой служит вычисление $S(\omega)$ по уравнениям электрической цепи Φ (см. рис. 2) из условия $\vec{\varphi}^{(+)} = \vec{\varphi}^{(-)} S(\omega)$.

3. Некоторые применения операторного комплекса

1. По формуле (4) можно находить передаточную матрицу $S(\omega)$ многополюсника.

2. Больший интерес представляет разложение открытой системы Φ в цепочку простейших открытых систем Φ_k, аналогичное разложению

колебаний замкнутой системы по собственным колебаниям [6, 7]. Пусть $\Phi_k\,(k=1,\ \ldots,\ N)$ открытые системы, у которых пространства входных состояний $\vec{\varphi}^{(-)}$ $\left((\text{и выходных } \vec{\varphi}^{(+)}\right)$ совпадают: $E_1 = E_2 = \ldots : E_N = E$. Этим системам соответствуют отображения

$$\vec{\psi}_k = R_k(\omega)\,\vec{\varphi}_k^{(-)},\quad \vec{\varphi}_k^{(+)} = S_k(\omega)\,\vec{\varphi}_k^{(-)}\left(\vec{\varphi}_k^{(\pm)} \in E,\ \ \vec{\psi}_k \in H_k\right).$$

Построим новую открытую систему Φ, полагая для нее пространство E прежним, пространство H внутренних состояний равным ортогональной сумме пространств H_k: $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_N$, векторы $\vec{\psi} = (R_1 + R_2S_1 + \ldots + R_NS_{N-1}\ldots S_2S_1)\,\vec{\varphi}^{(-)}$, $\vec{\varphi}^{(+)} = S_NS_{N-1}\ldots S_1\vec{\varphi}^{(-)}\left(\vec{\psi} \in H,\right.$

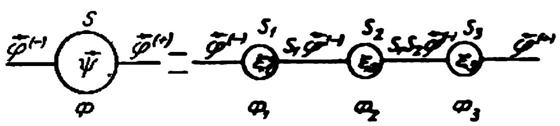

Рис. 3

$\left.\vec{\varphi}^{(\pm)} \in E\right)$. Система Φ называется цепным соединением систем Φ_k: $\Phi = \Phi_1\gamma\Phi_2\gamma\ldots\gamma\Phi_N = \mathop{\gamma}\limits_{k=1}^{N}\Phi_k$. Если размерность пространства H_k равна 1 $(\dim H_k = 1)$, то система Φ_k называется одномерной, или простейшей. Справедлива теорема [6]: Открытая система Φ, которой принадлежит операторный комплекс $[T,\ e_\alpha,\ J]$, разлагается в цепочку одномерных систем $\Phi = \mathop{\gamma}\limits_{k=1}^{N}\Phi_k$, где $N = \dim H$, $\dim H_k = 1$. Это разложение можно изобразить в виде символического равенства рис. 3 ($N = 3$), где вход Φ_k и выход Φ_{k-1} совпадают. Цепочка рис. 3 показывает, каким простейшим последовательным преобразованиям S_k подвергается входное состояние $\vec{\varphi}^{(-)}$, пока не будет получено выходное состояние $\vec{\varphi}^{(+)}$; передаточное отображение системы Φ равно $S(\omega) = S_NS_{N-1}\ldots S_1$.

Цепочка рис. 3 выясняет не только передаточные свойства системы Φ. Из [6] внутреннее состояние $\vec{\psi}$ системы Φ равно сумме $\vec{\psi} = \sum\limits_{k=1}^{N}\xi_k\vec{\psi}_k$, где число ξ_k — внутреннее состояние одномерной системы Φ_k в цепочке $\mathop{\gamma}\limits_{k=1}^{N}\Phi_k$; $\left\{\vec{\psi}_k\right\}$ — ортонормированный базис пространства H, в котором оператор T имеет треугольный вид $\vec{\psi}_kT = \sum\limits_{j=k}^{N}T_{kj}\vec{\psi}_j$. Система векторов $\left\{\vec{\psi}_k\right\}$ называется треугольным базисом оператора T. При этом

$$\xi_k = \frac{\vec{\varphi}^{(-)}S_1\ldots S_{k-1}\Pi_k^*}{\lambda_k - \omega},\qquad S_k(\omega) = I - \frac{i}{\lambda_k - \omega}\Pi_k^*\Pi_kJ, \tag{6}$$

где λ_k — собственное число T_{kk} оператора T, $\Pi_k = (d_{k1},\ \ldots,\ d_{kn})$ — вектор с компонентами $d_{kj} = \left(\vec{\psi}_k, e_j\right)$, e_j — каналовый вектор из комплекса $[T, e_\alpha, J]$ $(k = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, n)$. Символ $\left(\vec{\psi}_k, e_j\right)$ обозначает здесь скалярное произведение вектора $\vec{\psi}_k$ на вектор e в пространстве H, которому принадлежит ψ_k вместе со всем H_k.

Обратимся к примеру 2, рис. 2. Найдем собственные числа λ_1, λ_2, λ_3 оператора T: $\det(T - \lambda T) = \lambda\left(\frac{1}{L_1C_2} + \frac{1}{L_1C_3} - \lambda^2\right) = 0$; $\lambda_1 = 0$; $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{L_1}\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)}$. Собственные векторы h_k определяются из соотношения $h_kT = \lambda_k h_k$; если подставить в него векторы $h_k = (x, y, z)$ с неопределенными компонентами, то с точностью до числового множителя получится $h_1 = (0; \sqrt{C_2}; -\sqrt{C_3})$, $h_{2,3} = \left(\sqrt{L_1C_2C_3};\ -\frac{i}{\lambda_{2,3}}\sqrt{C_3};\ -\frac{i}{\lambda_{2,3}}\sqrt{C_2}\right)$. Скалярное произведение (f, g) в H определяется как произведение матрицы-строки f на матрицу-столбец g^*: $(f, g) = fg^*$. Введем векторы $\vec{\psi}_k = \frac{1}{\sqrt{(h_k, h_k)}} h_k$. Очевидно, $\left(\vec{\psi}_k, \vec{\psi}_k\right) = 1$, $\left(\vec{\psi}_k, \vec{\psi}_j\right) = 0$ при $k \neq j$. Система векторов $\vec{\psi}_1$, $\vec{\psi}_2$, $\vec{\psi}$ называется ортонормированной системой собственных векторов оператора T:

$$\vec{\psi}_1 = \left(0; \sqrt{\frac{C_2}{C_2 + C_3}};\ -\sqrt{\frac{C_3}{C_2 + C_3}}\right);\ \vec{\psi}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{C_3}{C_2 + C_3}};\right.$$

$$\left. -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{C_2}{C_2 + C_3}}\right);\ \vec{\psi}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{C_3}{C_2 + C_3}};\ \frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{C_2}{C_2 + C_3}}\right).$$

Самосопряженный оператор T $(T = T^*)$ имеет в базисе $\vec{\psi}_1$, $\vec{\psi}_2$, $\vec{\psi}_3$ диагональный вид (и, в частности, треугольный). В случае несамосопряженного T для отыскания треугольного базиса $\vec{\psi}_1$, $\vec{\psi}_2$, $\vec{\psi}_3$ пришлось бы выполнить процесс последовательной ортогонализации собственных векторов $\vec{h}_1$, h_2, h_3.

Вычислим вспомогательные векторы Π_k (6), используя каналовые векторы e_j из комплекса $[T, e_\alpha, J]$ примера 2:

$$\Pi_1 = \left(0;\ 0;\ \frac{i}{\sqrt{C_2 + C_3}};\ 0\right);\quad \Pi_2 = \left(\frac{i}{\sqrt{2L_1}};\ 0;\ -\frac{1}{\lambda_2 C_3\sqrt{2L_1}};\ 0\right);$$

$$\Pi_3 = \left(\frac{i}{\sqrt{2L_1}};\ 0;\ -\frac{1}{\lambda_3 C_3\sqrt{2L_1}};\ 0\right).$$

Многополюсник Ф (см. рис. 2) разлагается в цепочку одномерных открытых систем Φ_k, изображенную на рис. 3, где внутреннее состояние ξ_k и передаточная матрица S_k системы Φ_k определяются из формул (6):

$$S_1(\omega) = I + \frac{i}{\omega}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2 + C_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};\quad S_2(\omega) = I - \frac{i}{\lambda_2 - \omega} \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} 0 & \frac{i}{2\lambda_2 L_1 C_3} & 0 & \frac{1}{2L_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_2}{2C_3(C_2+C_3)} & 0 & -\frac{i}{2\lambda_2 L_1 C_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}; \quad S_3(\omega) = I -$$

$$-\frac{i}{\lambda_3-\omega} \begin{Vmatrix} 0 & \frac{i}{2\lambda_3 L_1 C_3} & 0 & \frac{1}{2L_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{C_3}{2C_3(C_2+C_3)} & 0 & \frac{-i}{2\lambda_3 L_1 C_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

$$\xi_2 = \frac{\vec{\varphi}^{(-)} S_1 \Pi_2^*}{\lambda_2-\omega} = -\frac{1}{\lambda_2-\omega}\frac{1}{\sqrt{2L_1}}\left(iU_1^{(-)} + \frac{1}{\lambda_2 C_3} I_2^{(-)}\right); \quad \xi_1 = \frac{\vec{\varphi}^{(-)}\Pi_1^*}{\lambda_1-\omega} =$$

$$= \frac{i}{\omega\sqrt{C_2+C_3}} I_2^{(-)}; \quad \xi_3 = \frac{\vec{\varphi}^{(-)} S_1 S_2 \Pi_3^*}{\lambda_3-\omega} = -\frac{1}{\lambda_3-\omega}\frac{1}{\sqrt{2L_1}}\left(iU_1^{(-)} + \frac{1}{\lambda_3 C_3} I_2^{(-)}\right).$$

Мы видим, что при частоте ω, близкой к собственному числу λ_k матрицы T, в резонанс входит только одно звено Φ_k цепного соединения (см. рис. 3). Вследствие самосопряженности T в нашем примере состояние ξ_2 системы Φ_2 (аналогично ξ_3) получится таким же, как вычисленное выше, если на вход Φ_2 подать не выход $\vec{\varphi}^{(-)} S_1$ системы Φ_1, а непосредственно вектор $\vec{\varphi}^{(-)}$.

Таким образом, в этой цепочке предшествующие звенья не влияют на состояние последующих и ξ_k можно вычислять по формуле

$$\xi_k = \frac{\vec{\varphi}^{(-)} \vec{\Pi}_k^*}{\lambda_k - \omega}.$$

Разложение в цепочку в случае самосопряженности T аналогично разложению в ряд Фурье по собственным колебаниям. Однако при $T \neq T^*$ состояние системы Φ_k будет зависеть не только от $\vec{\varphi}^{(-)}$, но и от предшествующих звеньев $\Phi_1, \ldots, \Phi_{k-1}$. Так, при частоте ω, близкой к λ_k, колебания $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$ систем $\Phi_1, \ldots, \Phi_{k-1}$ будут ограниченными, система Φ_k войдет в резонанс и обеспечит неограниченные колебания последующих звеньев $\Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_N$, хотя сами эти звенья имеют другие резонансные частоты.

3. Обозначая значком $\sim$ эквивалентные открытые системы (с равными передаточными отображениями), имеем для нашего примера: $\Phi \sim \Phi_1 \gamma \Phi_2 \gamma \Phi_3$. Можно рассмотреть новую открытую систему $\Phi_4 = \Phi_2 \gamma \Phi_3$, так что $\Phi \sim \Phi_1 \gamma \Phi_4$. Системы Φ_1 и Φ_4 оказываются физически осуществимыми в классе реактивных восьмиполюсников; их цепное соединение (рис. 4) дает цепочку далее не разложимых реактивных восьмиполюсников, эквивалентную исходному восьмиполюснику рис. 2, если $k = \frac{C_2+C_3}{C_2}$; $L = \frac{C_2 C_3}{C_2+C_3}$; $C = L_1$; $C_0 = C_2 + C_3$. Получение и обоснование

этих утверждений мы здесь не приводим, однако в их справедливости можно убедиться, непосредственно вычисляя передаточные матрицы восьмиполюсников Φ_1, Φ_4 по рис. 4; произведение этих матриц равно $S(\omega)$ из примера 2. Как показывает пример (рис. 4), операторные комплексы могут применяться для синтеза передаточной матрицы $S(\omega)$ в виде цепочки многополюсников (ср. [4, 8, 11]).

4. Пусть на вход многополюсника Φ подан произвольный входной сигнал $\vec{\varphi}^{(-)}(t)$. Соотношение (2) заменяется на следующее:

$$i\frac{d\vec{\psi}}{dt} + T\vec{\psi} = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_\alpha^{(-)}(t)\vec{e}_\alpha. \tag{7}$$

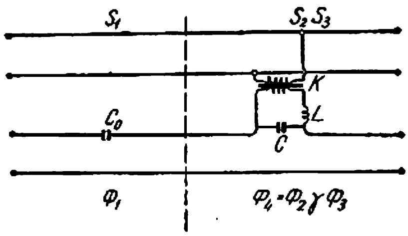

Рис. 4.

По определению, многополюснику Φ в неустановившемся режиме принадлежит операторный комплекс $[T, e_\alpha, J]$, если выполнены соотношения (1), (3), (7), где векторы $\vec{\psi}$, $\vec{\varphi}^{(\pm)}$ зависят от времени, $\varphi_\alpha^{(-)}(t)$—компоненты вектора $\vec{\varphi}^{(-)}(t)$. Очевидно, этот комплекс не зависит от времени и совпадает с операторным комплексом, полученным выше для установившихся колебаний.

Применения комплекса $[T, e_\alpha, J]$ для изучения произвольных колебаний Φ аналогичны рассмотренным выше. Так, решение (7) обычным путем дает внутреннее состояние $\vec{\psi}(t)$, удовлетворяющее начальному условию $\vec{\psi}(t_0)$ (ср. (2)).

$$\vec{\psi}(t) = \vec{\psi}(t_0)e^{iT(t-t_0)} - i\int_{t_0}^{t} \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_\alpha^{(-)}(s)\vec{e}_\alpha e^{iT(t-s)}\,ds.$$

Подставляя найденное $\vec{\psi}(t)$ в (3), получаем выходное состояние $\vec{\varphi}^{(+)}(t)$. Разложение в цепочку остается справедливым, формулы состояний простейших систем цепочки при нулевых начальных условиях приобретают вид (ср. (6)):

$$\vec{\varphi}_k^{(-)}(t)\,S_k = \vec{\varphi}_k^{(-)}(t) - \int_0^t e^{i\lambda_k(t-s)}\cdot\vec{\varphi}_k^{(-)}(s)\,\Pi_k^*\Pi_k J\,ds,$$

$$\xi_k = \vec{\varphi}_k^{(-)}(t)\,R_k = -i\int_0^t e^{i\lambda_k(t-s)}\,\vec{\varphi}_k^{(-)}(s)\,\Pi_k^*\,ds,$$

где $\vec{\varphi}_k^{(-)}(t) = \vec{\varphi}^{(-)}(t)S_1S_2\ldots S_{k-1}$ — состояние, поданное на вход простейшей системы Φ_k из цепочки; λ_k — соответствующее собственное число оператора T; векторы Π_k определяются по каналовым векторам и треугольному базису оператора T и совпадают с вычисленными Π_k для (6).

4. Случай многополюсника, не имеющего операторного комплекса

Здесь будет показано, как для многополюсника Φ, который не удовлетворяет условиям теоремы 1, построить многополюсник Φ_0, сколь угодно мало отличающийся от Ф и обладающий операторным комплексом $[T, e_a, J]$. С помощью последнего можно не только изучать Ф с любой точностью, но и получать предельным переходом $\Phi_0 \to \Phi$ некоторые характеристики самой системы Ф (в частности отображения $(R(\omega), S(\omega))$. Например, четырехполюсник Ф (рис. 5) не удовлетворяет условиям теоремы 1, ребра q_c и $q^{(-)}$ образуют $C^{(-)}$-цикл. Операторный комплекс, принадлежащий Ф, не существует. Однако это положение можно исправить, добавляя к $\bar{\Phi}$ двухполюсник q_{L1} со сколь угодно малым коэффициентом L_1 так, чтобы получить четырехполюсник Φ_0 (см. рис. 1), изученный в примере 1.

Непосредственно по рис. 5 получается следующая передаточная матрица для Ф:

$$S(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1-\omega^2 LC}{i\omega L} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

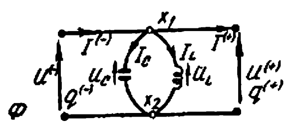

Рис. 5

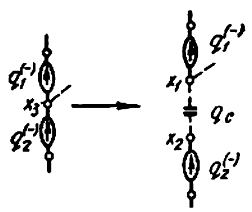

Рис. 6.

Поскольку при $L_1 = 0$ индуктивное сопротивление $i\omega L_1 = 0$, мы можем написать $\Phi = \lim\limits_{L_1 \to 0} \Phi_0$, имея в виду физический смысл предельного перехода. Сравнивая $S(\omega)$ с матрицей $S_0(\omega)$ в (5), имеем уже строго $S(\omega) = \lim\limits_{L_1 \to 0} S_0(\omega)$. Аналогично для внутренних состояний справедливо $\vec{\psi} = \lim\limits_{L_1 \to 0} \vec{\psi}_0$, т. е. $R(\omega) = \lim\limits_{L_1 \to 0} R_0(\omega)$.

Определим две элементарные операции над мультиграфом $G = \bar{\Phi} = (X, \Gamma)$:

1°. Удаление ребра q из G, приводящее к образованию нового мультиграфа $G_1 = (X, \Gamma_1)$, где $\Gamma_1 = \Gamma / q$ суть множество ребер Γ без q.

2°. Стягивание ребра q: q сначала удаляется из $G = (X, \Gamma)$, затем инцидентные ему вершины x_1 и x_2 сливаются в одну x_3 так, что вершина x_3 инцидентна тем же ребрам из множества Γ_1, которые в свою очередь были инцидентными x_1 или x_2.

Многополюсник Φ_1 назовем элементарным расширением Ф, если $\bar{\Phi}$ получается из $\bar{\Phi}_1$ удалением или стягиванием некоторого ребра $q_L (q_o)$; примем обозначение $\Phi < \Phi_1$.

При $\Phi_2 > \Phi_1 > \Phi$, считаем Φ_2 расширением Ф (в данном случае неэлементарным) с сохранением обозначения $\Phi_2 > \Phi$. Ниже проводятся последовательные расширения Ф так, чтобы удовлетворить всем условиям теоремы 1.

1. $\Phi_1 > \Phi$. Требуем, чтобы каждые два входных ребра в $\overline{\Phi}_1$ (соответственно выходных) не были соседними (т. е. инцидентными одной и той же вершины). Если в $\overline{\Phi}$ для некоторой пары $q_{\beta 1}^{(-)}$, $q_{\beta 2}^{(-)}$ это условие не выполнено (рис. 6), то введением нового ребра q_c (пунктир на рис. 6) можно изолировать $q_{\beta 1}^{(-)}$ от $q_{\beta 2}^{(-)}$. Исходный многополюсник $\overline{\Phi}$ получается из $\overline{\Phi}_1$ путем применения к q_c операции 2°.

2. $\Phi_2 > \Phi_1$. В Φ_2 устанавливается взаимно однозначное соответствие между $q_\beta^{(-)}$ и $q_\beta^{(+)}$ ($\beta = 1, \ldots m$). Для каждого β имеется цикл Q_β, состоящий из пары внешних ребер $q_\beta^{(-)}$, $q_\beta^{(+)}$ и еще, может быть, емкостей $q_{ск}$, $Q_{\beta 1}$ и $Q_{\beta 2}$ не имеют общих точек при $\beta_1 \neq \beta_2$. При отсутствии в $\overline{\Phi}_1$ указанного цикла Q_β для заданного β его можно образовать добавлением одного или двух ребер $q_{ск}$, как на рис. 6. Очевидно, Q_β является стандартным для $q_\beta^{(+)}$.

3. $\Phi_3 > \Phi_2$. Многополюсник Φ_2 расширим до Φ_3 добавлением индуктивностей q_{Lj} так, чтобы $\overline{\Phi}_3$ не имел C, $C^{(-)}$, $C^{(+)}$-циклов. Так, например, на рис. 7 добавленное ребро q_{L1} размыкает C-цикл с образованием

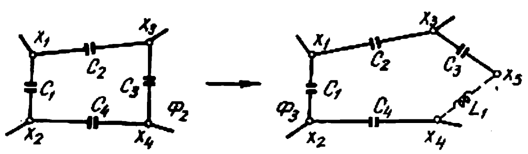

Рис. 7.

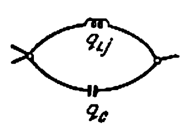

Рис. 8.

новой вершины x_5. При этом циклы Q_β можно сохранить, ибо любой $C, C^{(-)}$, $C^{(+)}$-цикл в $\overline{\Phi}_2$ содержит хотя бы одно ребро $q_{ск}$, не принадлежащее циклам Q_β.

4. $\Phi_4 > \Phi_3$. Если в $\overline{\Phi}_3$ ребро q_{Lj} имеет стандартный цикл Q_{Lj}, то последний единственный, иначе в $\overline{\Phi}_3$ существовали бы C, $C^{(-)}$-циклы. Если же для q_{Lj} нет стандартного цикла, мы построим его, добавляя ребро q_c, рис. 8.

При последовательном удалении из Φ_4 всех ребер q_{Lj}, $q_\beta^{(+)}$ каждый раз размыкается соответствующий стандартный цикл, а в итоге не остается ни одного элементарного цикла. Как известно, при такой ситуации система стандартных циклов образует базис мультиграфа $\overline{\Phi}_4$, так что для $\overline{\Phi}_4$ выполнено равенство $\mu = M - m$. Следовательно, $\overline{\Phi}_4$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Пусть многополюсник Φ является открытой системой $(R(\omega), S(\omega))$, а Φ_0 — элементарное расширение Φ. Тогда и Φ_0 — открытая система $(R_0(\omega), S_0(\omega))$. Для доказательства надо выписать две системы уравнений: электрической цепи $\overline{\Phi}$ и цепи $\overline{\Phi}_0$, где в правые части перенесены входные токи и напряжения. Остальные токи и напряжения выражаются через входные, если определитель системы отличен от нуля. Но для первой системы это так. Легко видеть, что отсюда следует отличие от нуля определителя второй системы. Проверяется также, что операция 1° над ребром q из Φ_0 соответствует предельному переходу $Y_q \to 0$, а операция 2° — предельному переходу $Z_q \to 0$ в системе уравнений для $\overline{\Phi}_0$, где $Y_q = \frac{I_q}{U_q}$ — проводимость ребра q, $Z_q = \frac{U_q}{I_q}$ — его сопротивление. Например, когда q — индуктивность, то $Y_q = \frac{1}{i\omega L}$, $Z_q = i\omega L$, так что $Y_q \to 0$ при $L \to \infty$, $Z_q \to 0$ при $L \to 0$. Из той же проверки следует, что отображения $R_0(\omega)$, $S_0(\omega)$ системы Φ_0 стремятся к отображениям $R(\omega)$, $S(\omega)$ системы Φ, когда параметр $L \left(\frac{1}{L}, C, \frac{1}{C}\right)$ ребра q стремится к нулю (см. пример рис. 5). Доказана.

Теорема 2. В классе многополюсников любая открытая система Φ допускает расширение Φ_4, которому принадлежит операторный комплекс; параметры расширения можно выбрать так, чтобы электрические состояния цепей $\overline{\Phi}$ и $\overline{\Phi}_4$ различались сколь угодно мало.

Некоторые замечания

Для общих реактивных многополюсников, отличающихся от рассмотренных здесь наличием трансформаторов (взаимных индуктивностей) без потерь, также удалось получить результаты, аналогичные теоремам 1 и 2. В связи с развиваемым аппаратом выглядит перспективным изучение следующих вопросов:

1. Исследование многополюсника Φ $(R(\omega), S(\omega))$ с помощью последовательности операторных комплексов $\left[T_k, e_\alpha^k, J\right]$, принадлежащих многополюсникам $\Phi_k(R_k(\omega), S_k(\omega))$, где $\Phi_к$ — расширение Φ, $\lim\limits_{k\to\infty} S_k(\omega) = S(\omega)$, $\lim\limits_{k\to\infty} R_k(\omega) = R(\omega)$ (см. теорему 2).

2. Перечисление многополюсников с одинаковым отображением $S(\omega)$ — проблема эквивалентности (В. Кауэр). Эта проблема, столь важная для приложений, связана с понятием унитарной эквивалентности комплексов, введенным в [6].

3. Указать условия реализуемости матрицы $S(\omega)$ в виде реактивного многополюсника без трансформаторов [12].

4. Исследовать различные оптимальные задачи синтеза: реализация передаточной матрицы $S(\omega)$ с использованием наименьшего числа идеальных трансформаторов, или наименьшего числа сосредоточенных элементов L, C и т. п.

5. Включение электрических цепей с омическими сопротивлениями в теорию открытых систем (принципиально это возможно).

6. Построение операторного комплекса для непередающего многополюсника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берж К., Теория графов и ее применения. ИЛ, М, 1962.

2. Бродский М. С., Лившиц М. С. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, УМН, 1958, 13. 1/79/3.

3. Зелях Э. В. Основы общей теории линейных электрических схем, Изд-во АН СССР, М., 1951.

4. Лившиц М. С., Флексер Э. С. Разложение реактивного четырехполюсника в цепочку простейших четырехполюсников, ДАН СССР, 1960, 135, 3. 542.

5. Лившиц М. С., Флексер Э. С. Синтез передающей линии по заданным частотным характеристикам, Зап. мех-мат. фак-та Харьковского гос. ун-та и Харьковского мат. общества, Изд-во ХГУ, т. XXVIII, 4, 149—162. 1961.

6. Лившиц М. С. О линейных физических системах, соединенных с внешним миром каналами связи. Известия АН СССР, серия математ.; 27, 5, 993—1030, 1963.

7. Лившиц М. С. «Открытые системы как линейные автоматы», Изв. АН СССР, серия математ., 27,6 (1963, 1215—1228).

8. Руткас А. Г. О цепочечном синтезе реактивного многополюсника, «Радиотехника и электроника», 1961, 11, 1889—1945.

9. Руткас А. Г. Передаточная матрица пассивного многополюсника, Тр. Харьк. горного института, Изд-во ХГУ, XI, 89—94. 1962.

10. Сешу С., Балабанян Н. Анализ линейных цепей, Госэнергоиздат. 1963.

11. Talbot, A. New Method of Synthesis of Reactance Networks, Proc. I. E E., 1954, 101, pt. 4, Monograph N 77, p. 73.

12. «The Realization of n-Port Networks without Transformers» — A Panel Discussion, IRE Transactions on Circuit Theory, v. ct — 9, Sept., 1962, N 3, 202—215.