ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ЛАМИНАРНЫХ ПОТОКАХ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Янцевич

В данной работе изучаются поляризационные свойства электромагнитных волн оптического диапазона, распространяющихся в куэттовском потоке вязкой несжимаемой жидкости при ламинарном режиме движения и режиме, который наступил после потери устойчивости, т. е. исследуются решения уравнений Максвелла при заданной зависимости тензора диэлектрической проницаемости $\check{\varepsilon}$ от тензора скоростей деформации $\check{V}$. Рассмотрение оптических характеристик потока как функций гидродинамических параметров позволяет детально проследить за изменением гидродинамической картины потока [1].

Оптическая анизотропия в ламинарном потоке вязкой несжимаемой жидкости характеризуется следующей зависимостью $\check{\varepsilon}$ от $\check{V}$:

$$\check{\varepsilon}\left(\check{V}\right) = \varepsilon_1 I + \lambda_1 \check{V}. \tag{1}$$

Рассмотрим ламинарное установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя бесконечными коаксиальными цилиндрами. Если зазор между цилиндрами мал, т. е. $r_2 - r_1 \ll \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, где r_1 и r_2 радиусы цилиндров, то поле скоростей будет следующим [2]:

$$V_\theta = \Omega r \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}; \quad v_r = v_z = 0.$$

Выражение для $\check{V}$ в физических составляющих имеет вид

$$\check{V} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Omega r}{r_2 - r_1} & 0 \\ -\frac{\Omega r}{r_2 - r_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По известному $\check{V}$ находим $\check{\varepsilon}$

$$\check{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\frac{\lambda_1 \Omega}{r_2 - r_1} r & 0 \\ -\frac{\lambda_1 \Omega}{r_2 - r_1} r & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

тогда система уравнений Максвелла для монохроматической волны имеет вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\frac{\omega}{c}\mathbf{H} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{D} \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$D_r = \varepsilon_1 E_r - \frac{\Lambda r}{r_2 - r_1} E_\theta; \quad D_\theta = -\frac{\Lambda r}{r_2 - r_1} E_r + \varepsilon_1 E_\theta; \tag{4}$$

$$D_z = \varepsilon_1 E_z; \quad \Lambda = \lambda_1 \Omega.$$

Будем искать решение уравнений (3) в виде [3]

$$\mathbf{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^{(n)}(r) e^{i(n\theta - p_n z)},$$

$$\mathbf{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{H}^{(n)}(r) e^{i(n\theta - p_n z)}. \tag{5}$$

Подставляя (4), (5) в (3), получаем

$$\begin{aligned}
& prE_\theta + \frac{\omega}{c} rH_r = -nE_z, \\
& pE_r - \frac{\omega}{c} H_\theta = i\frac{dE_z}{dr}, \\
& \frac{d(rE_\theta)}{dr} - inE_r + i\frac{\omega}{c} rH_z = 0, \\
& prH_\theta - \frac{\omega}{c} r\left(\varepsilon_1 E_r - \frac{\Lambda r}{r_2 - r_1} E_\theta\right) = -nH_z, \\
& pH_z + \frac{\omega}{c}\left(\varepsilon_1 E_\theta - \frac{\Lambda r}{r_2 - r_1} E_r\right) = i\frac{dH_z}{dr}, \\
& \frac{d(rH_\theta)}{dr} - inH_r - i\frac{\omega}{c}\varepsilon_1 rE_z = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$$E_i = E_i^{(n)}, \quad H_i = H_i^{(n)}, \quad p = p_n.$$

Система (6) является исходной для дальнейшего рассмотрения.

Отметим, что безразмерный параметр Λ в уравнениях (6) можно считать малым, так как изменение ε под влиянием градиентов скорости обычно мало. Наличие малого параметра позволяет при решении (6) воспользоваться методом малых возмущений. Будем искать $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в виде [3]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \Lambda\mathbf{E}', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \Lambda\mathbf{H}', \quad p = p_0 + \Lambda p_1, \tag{6*}$$

где p_0, $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$ соответствуют изотропному случаю. Для первого приближения получаем следующие уравнения:

$$p_0 rE'_\theta + \frac{\omega}{c} rH'_r = -nE'_z - p_1 rE^0_\theta,$$

$$p_0 E'_r - \frac{\omega}{c} H'_\theta = i\frac{dE'_z}{dr} - p_1 E^0_r,$$

$$
\begin{gathered}
\frac{d\left(rE_{\theta}^{'}\right)}{dr}-inE_{r}^{'}+i\frac{\omega}{c}H_{z}^{'}=0,\\
p_{0}rH_{\theta}^{'}-\frac{\omega}{c}r\varepsilon_{1}E_{r}^{'}=-nH_{z}^{'}-\frac{\omega}{c}\frac{r^{2}}{r_{2}-r_{1}}E_{\theta}^{0}-p_{1}rH_{\theta}^{0},\\
p_{0}H_{r}^{'}+\frac{\omega}{c}\varepsilon_{1}E_{\theta}^{'}=i\frac{dH_{z}^{'}}{dr}+\frac{\omega}{c}\frac{r}{r_{2}-r_{1}}E_{r}^{0}-p_{1}H_{r}^{0},\\
\frac{d\left(rH_{\theta}^{'}\right)}{dr}-inH_{r}^{'}-i\frac{\omega}{c}\varepsilon_{1}rE_{z}^{'}=0.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Исключая из этих уравнений $E_r^{'}$, $E_\theta^{'}$, $H_r^{'}$, $H_\theta^{'}$, имеем следующие уравнения для $E_z^{'}$ и $H_z^{'}$:

$$
\frac{d^2E_z^{'}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dE_z^{'}}{dr}+\left[\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1-p_0^2-\frac{n^2}{r^2}\right]E_z^{'}=\Phi(r),
$$

$$
\frac{d^2H_z^{'}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dH_z^{'}}{dr}+\left[\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1-p_0^2-\frac{n^2}{r^2}\right]H_z^{'}=\Psi^*(r),
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Phi(r,\ p_1)=&-i\frac{c}{\omega\varepsilon_1}\frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dr}\left[\frac{\omega}{c}p_0\frac{r^2}{r_2-r_1}E_\theta^0+p_0p_1H_\theta^0+\frac{\omega}{c}p_1rE_r^0\right]+\right.\\
&\left.+in\left(\frac{\omega}{c}p_1\varepsilon_1E_\theta^0+\frac{\omega}{c}p_0\frac{r}{r_2-r_1}E_r^0-p_0p_1H_r^0\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi^*(r,\ p_1)=&\,i\frac{c}{\omega}\frac{1}{r}\left\{\frac{d}{dr}\left[p_0p_1rE_\theta^0+\frac{\omega^2}{c^2}\frac{r^2}{r_2-r_1}E_r^0-\frac{\omega}{c}p_1rH_r^0\right]-\right.\\
&\left.-in\left(\frac{\omega^2}{c^2}\frac{r}{r_2-r_1}E_\theta^0+\frac{\omega}{c}p_1H_\theta^0+p_0p_1E_r^0\right)\right\}.
\end{aligned} \tag{8*}
$$

Если боковые поверхности цилиндров обладают бесконечной проводимостью, то из равенства нулю тангенциальных компонент **E** на границе получаем следующие граничные условия для $E_z^{'}$ и $H_z^{'}$:

$$
\left.
\begin{aligned}
&E_z^{'}=0\\
&\frac{dH_z^{'}}{dr}-i\frac{\omega}{c}\frac{r}{r_2-r_1}E_r^0+ip_1H_r^0=0
\end{aligned}
\right\}\quad \text{при } r=r_1 \text{ и } r=r_2. \tag{9}
$$

Освобождаясь от неоднородности в граничных условиях для $H_z^{'}$, окончательно имеем следующую краевую задачу для $E_z^{'}$ и $H_z^{'}$:

$$
\begin{gathered}
\frac{d^2E_z^{'}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dE_z^{'}}{dr}+\left[\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1-p_0^2-\frac{n^2}{r^2}\right]E_z^{'}=\Phi(r,\ p_1)\\
E_z^{'}=0 \text{ при } r=r_1 \text{ и } r=r_2,\\
\frac{d^2H_z^{'}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dH_z^{'}}{dr}+\left[\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1-p_0^2-\frac{n^2}{r^2}\right]H_z^{'}=\Psi(r,\ p_1)\\
\frac{dH_z^{'}}{dr}=0 \text{ при } r=r_1 \text{ и } r=r_2,
\end{gathered} \tag{10}
$$

где

$$
\Psi(r,\ p_1)=\Psi^*(r,\ p_1)+i\frac{d}{dr}\left(p_1H_r^0-\frac{\omega}{c}\frac{r}{r_2-r_1}E_r^0\right)+
$$

$$+\frac{1}{r}\, i\left(p_1 H_r^0 - \frac{\omega}{c}\frac{r}{r_2-r_1}E_r^0\right)+$$

$$+\, i\left[\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - p_0^2 - \frac{r^2}{n^2}\right]\int\left[p_1 H_r^0(r) - \frac{\omega}{c}\frac{r}{r_2-r_1}E_r^0(r)\right]dr.$$

Решение уравнений (10) имеет вид

$$\begin{aligned} E'_z(r) &= \alpha J_n(k_0 r) + \beta Y_n(k_0 r) + \Phi_1(r,\ p_1) J_n(k_0 r) + \Phi_2(r,\ p_1) Y_n(k_0 r), \\ H'_z(r) &= \gamma J_n(k_0 r) + \delta Y_n(k_0 r) + \Psi_1(r,\ p_1) J_n(k_0 r) + \Psi_2(r,\ p_1) Y_n(k_0 r), \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(r,\ p_1) &= -\frac{\pi}{2}\int r\Phi(r,\ p_1) Y_n(k_0 r)\,dr; \\ \Phi_2(r,\ p_1) &= \frac{\pi}{2}\int r\Phi(r,\ p_1) J_n(k_0 r)\,dr; \\ \Psi_1(r,\ p_1) &= -\frac{\pi}{2}\int r\Psi(r,\ p_1) Y_n(k_0 r)\,dr; \\ \Psi_2(r,\ p_1) &= \frac{\pi}{2}\int r\Psi(r,\ p_1) J_n(k_0 r)\,dr. \end{aligned} \tag{12}$$

Рассмотрим возмущение TM-волны. В этом случае для $\mathbf{H}^0$ и $\mathbf{E}^0$ имеем следующие выражения [3]:

$$E_r^0 = \frac{ik_0 p_0 C}{p_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1}\left[Y_n(k_0 r_1)\frac{dJ_n(k_0 r)}{dr} - J_n(k_0 r_1)\frac{dY_n(k_0 r)}{dr}\right]e^{i(n\theta - p_0 z)+i\omega t}$$

$$E_\theta^0 = \frac{-np_0}{r\left(p_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1\right)}E_z^0$$

$$E_z^0 = C\left[Y_n(k_0 r_1) J_n(k_0 r) - J_n(k_0 r_1) Y_n(k_0 r)\right] e^{i(n\theta - p_0 z)+i\omega t}, \tag{13}$$

$$H_\theta^0 = \frac{\omega}{c}\frac{\varepsilon_1}{p_0}E_r^0,$$

$$H_r^0 = \frac{\frac{\omega}{c}n\varepsilon_1}{r\left(p_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1\right)}E_z^0, \qquad H_z^0 \equiv 0,$$

где k_0 корни уравнения

$$J_n(k_0 r_1) Y_n(k_0 r_2) - J_n(k_0 r_2) Y_n(k_0 r_1) = 0 \tag{14}$$

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - p_0^2.$$

Тогда из формул (10) и (11) получаем

$$\begin{aligned} \alpha J_n(k_0 r_1) + \beta Y_n(k_0 r_1) &= -\Phi_1(r_1,\ p_1) J_n(k_0 r_1) - \Phi_2(r_1,\ p_1) Y_n(k_0 r_1), \\ \alpha J_n(k_0 r_2) + \beta Y_n(k_0 r_2) &= -\Phi_1(r_2,\ p_1) J_n(k_0 r_2) - \Phi_2(r_2,\ p_1) Y_n(k_0 r_2). \end{aligned} \tag{15}$$

Так как k_0 — корень уравнения (14), то из (15) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_1(r_1,\ p_1) J_n(k_0 r_1) + \Phi_2(r_1,\ p_1) Y_n(k_0 r_1) &= \chi\,[\Phi_1(r_2,\ p_1) J_n(k_0 r_2) + \\ &+ \Phi_2(r_2,\ p_1) Y_n(k_0 r_2)], \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$\chi = \frac{J_n(k_0 r_1)}{J_n(k_0 r_2)} = \frac{Y_n(k_0 r_1)}{Y_n(k_0 r_2)}.$$

Уравнение (16) можно рассматривать как характеристическое уравнение для p_1. Величина p_1 из (16) равна

$$p_1 = \frac{\varphi_1^1(r_1) + \varphi_1^2(r_1) - \chi\left[\varphi_1^1(r_2) + \varphi_1^2(r_2)\right]}{\chi\left[\varphi_2^1(r_2) + \varphi_2^2(r_2)\right] - \varphi_2^1(r_1) - \varphi_2^2(r_1)}, \tag{17}$$

где

$$\Phi(r,\ p_1) = \varphi_1(r) + p_1\varphi_2(r),$$

$$\varphi_1(r) = -\frac{ip_0}{\varepsilon_1(r_2 - r_1)}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2E_\theta^0) + \frac{n}{\varepsilon_1}\frac{p_0}{r_2 - r_1}E_r^0. \tag{17*}$$

$$\varphi_2(r) = -\frac{icp_0}{\omega\varepsilon_1}\frac{1}{r}\frac{dH_\theta^0}{dr} - \frac{i}{\varepsilon_1}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE_r^0) + nE_\theta^0 - \frac{c}{\omega\varepsilon_1}np_0H_r^0,$$

$$\Phi_1(r,\ p_1)\,J_n(k_0r) = -\frac{\pi}{2}J_n(k_0r)\int r\varphi_1(r)\,Y_n(k_0r)\,dr -$$

$$-\frac{\pi}{2}p_1J_n(k_0r)\int r\varphi_2(r)\,Y_n(k_0r)\,dr = \varphi_1^1(r) + p_1\varphi_2^1(r),$$

$$\Phi_2(r,\ p_1)\,Y_n(k_0r) = \frac{\pi}{2}Y_n(k_0r)\int r\varphi_1(r)\,J_n(k_0r)\,dr +$$

$$+\frac{\pi}{2}Y_n(k_0r)\,p_1\int r\varphi_2(r)\,J_n(k_0r)\,dr = \varphi_2^1(r) + p_1\varphi_2^2(r).$$

Перейдем теперь к H_z'. Граничные условия приводят к следующей системе уравнений относительно произвольных постоянных γ и δ:

$$\begin{aligned}
\gamma\frac{dJ_n(k_0r_1)}{dr} + \delta\frac{dY_n(k_0r_1)}{dr} &= -\psi_1(r_1,\ p_1)\frac{dJ_n(k_0r_1)}{dr} - \psi_2(r_1,\ p_1)\frac{dY_n(k_0r_1)}{dr},\\
\gamma\frac{dJ_n(k_0r_2)}{dr} + \delta\frac{dY_n(k_0r_2)}{dr} &= -\psi_1(r_2,\ p_1)\frac{dJ_n(k_0r_2)}{dr} - \psi_2(r_2,\ p_1)\frac{dY_n(k_0r_2)}{dr}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Из этой системы находим γ и δ (определитель системы отличен от нуля, так как рассматривается возмущение TM-волн).

Так как в первом приближении

$$\mathrm{Re}\,p_1 = 0, \tag{19}$$

то величина p_1 сказывается только на амплитуде электромагнитных колебаний, но не влияет на ориентацию осей эллипса поляризации.

Анизотропное возмущение TE-волн рассматривается аналогично. Заметим только, что при анизотропном возмущении TM- и TE-волн они теряют свою индивидуальность — в потоке распространяется волна, равная суперпозиции TE- и TM-волн, т. е. наличие анизотропии приводит к появлению TM-волны при распространении TE-волны и наоборот.

Рассмотрим теперь вторичное течение жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами, которое наступило в результате потери устойчивости исходным ламинарным режимом. $\check{\varepsilon}$ в данном случае в приближении (1) имеет вид [2]

$$\check{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\frac{\Lambda r}{r_2 - r_1} & 0 \\ -\frac{\Lambda r}{r_2 - r_1} & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \Lambda \frac{du}{dr} \cos kz & \frac{\Lambda}{2}\left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right] \cos kz & \frac{\Lambda}{2}\left[\frac{dw}{dr} - ku\right] \sin kz \\ \frac{\Lambda}{2}\left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right] \cos kz & \Lambda \frac{u}{r} \cos kz & -\frac{\Lambda}{2} kv \sin kz \\ \frac{\Lambda}{2}\left[\frac{dw}{dr} - ku\right] \sin kz & -\frac{\Lambda}{2} kv \sin kz & \Lambda kw \cos kz \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где $u(r)$, $v(r)$, $w(r)$ определяются следующим образом (взяты только несколько членов соответствующих разложений) [2]:

$$u(r) = \frac{2\Omega (r_2 - r_1)^3 a^2}{\nu}\left[\varphi_1\left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right) + \frac{\gamma \Omega^2}{\alpha + \beta\Omega^2}\varphi_2\left(\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right)\right] + \ldots,$$

$$v(r) = (r_2 - r_1)\left[\sin \pi \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} + \frac{\gamma\Omega^2}{\alpha + \beta\Omega^2} \sin 2\pi \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}\right] + \ldots, \tag{21}$$

$$w(r) = -\frac{2\Omega (r_2 - r_1)^3 a^2}{k\nu}\left[\frac{d\varphi_1}{dr} + \frac{\gamma\Omega^2}{\alpha + \beta\Omega^2}\frac{d\varphi_2}{dr}\right] + \ldots,$$

а $a = k\,| r_2 - r_1$ и Ω связаны следующим соотношением:

$$\Omega^2 \frac{2r_1^2 (r_2 - r_1)^3}{\nu^2 (r_2 + r_1)} = \frac{(\pi^2 + a^2)^2}{a^2 \left\{1 - 16 a^2 \pi^2 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} / [(\pi^2 + a^2)(\operatorname{sh} a + a)]\right\}}$$

(явные выражения для $\varphi_1(r)$, $\varphi_2(r)$, α, β, γ не выписаны ввиду их громоздкости).

Будем искать решение уравнений Максвелла с $\check{\varepsilon}$ вида (20) снова в форме $\mathbf{E} = \mathbf{E}^\circ + \Lambda \mathbf{E}'$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\circ + \Lambda \mathbf{H}'$.

Тогда для $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ получаем такие уравнения:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial E'_z}{\partial \theta} - r\frac{\partial E'_\theta}{\partial z}\right] + i\frac{\omega}{c} H'_r = 0,$$

$$\frac{\partial E'_r}{\partial z} - \frac{\partial E'_z}{\partial r} + i\frac{\omega}{i} H'_\theta = 0, \tag{22}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rE'_\theta\right) - \frac{\partial E'_r}{\partial \theta}\right] + i\frac{\omega}{c} H'_z = 0,$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial H'_z}{\partial \theta} - r\frac{\partial H'_\theta}{\partial z}\right] - i\frac{\omega}{c}\varepsilon_1 E'_r = i\frac{\omega}{c}\left[-\frac{r}{r_2 - r_1}E^0_\theta + \frac{du}{dr}\cos kz E^0_r + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right]\cos kz E^0_\theta + \frac{1}{2}\left[\frac{dw}{dr} - ku\right]\sin kz E^0_z\right],$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}-i\frac{\omega}{c}\varepsilon_1 E'_\theta=i\frac{\omega}{c}\left[-\frac{r}{r_2-r_1}E_r^0+\frac{1}{2}\left[\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r}\right]\cos kzE_r^0+\right.$$

$$\left.+\frac{u}{r}\cos kzE_\theta^0-\frac{1}{2}kv\sin kzE_z^0\right],$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rH'_\theta\right)-\frac{\partial H'_r}{\partial\theta}\right]-i\frac{\omega}{c}\varepsilon_1 E'_z=i\frac{\omega}{c}\left[\frac{1}{2}\left[\frac{dw}{dr}-ku\right]\sin kzE_r^0-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}kv\sin kzE_\theta^0+kw\cos kzE_z^0\right].$$

Решение системы (22) ищем в виде $\mathbf{E}'=\mathbf{E}^*+\mathbf{E}''$, $\mathbf{H}'=\mathbf{H}^*+\mathbf{H}''$, где $\mathbf{E}^*$ и $\mathbf{H}^*$ соответствуют ламинарному режиму.

Тогда для $\mathbf{E}''$ и $\mathbf{H}''$ получим систему уравнений:

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial E''_z}{\partial\theta}-r\frac{\partial E''_\theta}{\partial z}\right]+i\frac{\omega}{c}H''_r=0,$$

$$\frac{\partial E''_r}{\partial z}-\frac{\partial E''_z}{\partial r}+i\frac{\omega}{c}H''_\theta=0, \tag{23}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rE''_\theta\right)-\frac{\partial E''_r}{\partial\theta}\right]+i\frac{\omega}{c}H''_z=0,$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial H''_z}{\partial\theta}-r\frac{\partial H''_\theta}{\partial z}\right]-i\frac{\omega}{c}\varepsilon_1 E''_r=U_1(r)e^{-i(p_0-k)z+in\theta}+U_2(r)e^{-i(p_0+k)z+in\theta},$$

$$\frac{\partial H''_r}{\partial z}-\frac{\partial H''_z}{\partial r}-i\frac{\omega}{c}\varepsilon_1 E''_\theta=V_1(r)e^{-i(p_0-k)z+in\theta}+V_2(r)e^{-i(p_0+k)z+in\theta},$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rH''_\theta\right)-\frac{\partial H''_r}{\partial\theta}\right]-i\frac{\omega}{c}\varepsilon_1 E''_z=W_1(r)e^{-i(p_0-k)z+in\theta}+W_2(r)e^{-i(p_0+k)z+in\theta},$$

где

$$U_1(r)=\frac{1}{2}i\frac{\omega}{c}\frac{du}{dr}E_r^0(r)+\frac{1}{4}i\frac{\omega}{c}\left[\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r}\right]E_\theta^0(r)+\frac{1}{4}\frac{\omega}{c}\left[\frac{dw}{dr}-ku\right]E_z^0(r),$$

$$U_2(r)=\frac{1}{2}i\frac{\omega}{c}\frac{du}{dr}E_r^0(r)+\frac{1}{4}i\frac{\omega}{c}\left[\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r}\right]E_\theta^0(r)-\frac{1}{4}\frac{\omega}{c}\left[\frac{dw}{dr}-ku\right]E_z^0(r), \tag{24}$$

$$V_1(r)=i\frac{\omega}{c}\frac{1}{4}\left[\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r}\right]E_r^0(r)+i\frac{\omega}{c}\frac{1}{2}\frac{u}{r}E_\theta^0(r)-\frac{1}{4}\frac{\omega}{c}kuE_z^0(r),$$

$$V_2(r)=i\frac{\omega}{c}\frac{1}{4}\left[\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r}\right]E_r^0(r)+i\frac{\omega}{c}\frac{1}{2}\frac{u}{r}E_\theta^0(r)+\frac{1}{4}\frac{\omega}{c}kuE_z^0(r),$$

$$W_1(r)=\frac{\omega}{c}\frac{1}{4}\left[\frac{dw}{dr}-ku\right]E_r^0(r)-\frac{1}{4}\frac{\omega}{c}kvE_\theta^0(r)+i\frac{\omega}{c}\frac{1}{2}kwE_z^0(r),$$

$$W_2(r)=-\frac{\omega}{c}\frac{1}{4}\left[\frac{dw}{dr}-ku\right]E_r^0(r)+\frac{1}{4}\frac{\omega}{c}kvE_\theta^0(r)+i\frac{\omega}{c}\frac{1}{2}kwE_z^0(r).$$

Решение системы (23) можно искать в форме:

$$\mathbf{E}''=\mathbf{E}^{(1)}(r)e^{-i(p_0-k)z+in\theta}+\mathbf{E}^{(2)}(r)e^{-i(p_0+k)z+in\theta},$$

$$\mathbf{H}''=\mathbf{H}^{(1)}(r)e^{-i(p_0-k)+in\theta}+\mathbf{H}^{(2)}(r)e^{-i(p_0+k)z+in\theta}.$$

Тогда для $\mathbf{E}^{(1)}$, $\mathbf{H}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$, $\mathbf{H}^{(2)}$ окончательно получаем такие уравнения:

$$\frac{1}{r}\left[nE_z^{(1)}+r(p_0-k)E_\theta^{(1)}\right]+\frac{\omega}{c}H_r^{(1)}=0,$$

$$\begin{gathered}
(p_0-k)E_r^{(1)}-i\frac{dE_z^{(1)}}{dr}-\frac{\omega}{c}H_\theta^{(1)}=0,\\
\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}\left(rE_\theta^{(1)}\right)-inE_r^{(1)}\right]+i\frac{\omega}{c}H_z^{(1)}=0.
\end{gathered}\tag{25}$$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{r}\left[nH_z^{(1)}+r(p_0-k)H_\theta^{(1)}\right]-\frac{\omega}{c}\varepsilon_1E_r^{(1)}=-iU_1(r),\\
(p_0-k)H_r^{(1)}-i\frac{dH_z^{(1)}}{dr}+\frac{\omega}{c}\varepsilon_1E_\theta^{(1)}=iV_1(r),\\
\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}\left(rH_\theta^{(1)}\right)-inH_r^{(1)}\right]-i\frac{\omega}{c}\varepsilon_1E_z^{(1)}=W_1(r),\\
\frac{1}{r}\left[nE_z^{(2)}+r(p_0+k)E_\theta^{(2)}\right]+\frac{\omega}{c}H_r^{(2)}=0,\\
(p_0+k)E_r^{(2)}-i\frac{dE_z^{(2)}}{dr}-\frac{\omega}{c}H_\theta^{(2)}=0,\\
\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}\left(rE_\theta^{(2)}\right)-inE_r^{(2)}\right]+i\frac{\omega}{c}H_z^{(2)}=0,
\end{gathered}\tag{26}$$

$$\begin{gathered}
\frac{1}{r}\left[nH_z^{(2)}+r(p_0+k)H_\theta^{(2)}\right]-\frac{\omega}{c}\varepsilon_1E_r^{(2)}=-iU_2(r),\\
(p_0+k)H_r^{(2)}-i\frac{dH_z^{(2)}}{dr}+\frac{\omega}{c}\varepsilon_1E_\theta^{(2)}=iV_2(r),\\
\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dr}\left(rH_\theta^{(2)}\right)-inH_r^{(2)}\right]-i\frac{\omega}{c}\varepsilon_1E_z^{(2)}=W_2(r).
\end{gathered}$$

Опуская громоздкие выкладки, напишем сразу выражения для $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$:

$$\begin{gathered}
E_z^{(1)}=C_1^1J_n(k_1r)+C_2^1Y_n(k_1r)+\varphi_1^1(r),\\
H_z^{(1)}=C_3^1J_n(k_1r)+C_4^1Y_n(k_1r)+\psi_1^1(r),\\
E_r^{(1)}=\frac{i(p_0-k)\dfrac{dE_z^{(1)}}{dr}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\omega}{c}nH_z^{(1)}-i\dfrac{\omega}{c}U_1(r)}{(p_0-k)^2-\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1},\\
E_\theta^{(1)}=\frac{i\dfrac{\omega}{c}\dfrac{dH_z^{(1)}}{dr}+\dfrac{1}{r}(p_0-k)nE_z^{(1)}+i\dfrac{\omega}{c}V_1(r)}{\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1-(p_0-k)^2},
\end{gathered}\tag{27}$$

$$\begin{gathered}
E_z^{(2)}=C_1^2J_n(k_2r)+C_2^2Y_n(k_2r)+\varphi_2^2(r),\\
H_z^{(2)}=C_3^2J_n(k_2r)+C_4^2Y_n(k_2r)+\psi_2^2(r),\\
E_r^{(2)}=\frac{i(p_0+k)\dfrac{dE_z^{(2)}}{dr}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\omega}{c}nH_z^{(2)}-i\dfrac{\omega}{c}U_2(r)}{(p_0+k)^2-\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1},\\
E_\theta^{(2)}=\frac{i\dfrac{\omega}{c}\dfrac{dH_z^{(2)}}{dr}+\dfrac{1}{r}(p_0+k)nE_z^{(2)}+i\dfrac{\omega}{c}V_2(r)}{(p_0+k)^2-\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1}.
\end{gathered}$$

где

$$\varphi_1^1(r) = -\frac{\pi}{2} J_n(k_1r)\int r\varphi_1(r) Y_n(k_1r)\,dr + \frac{\pi}{2} Y_n(k_1r)\int r\psi_1(r) J_n(k_1r)\,dr,$$

$$\psi_1^1(r) = -\frac{\pi}{2} J_n(k_1r)\int r\psi_1(r) Y_n(k_1r)\,dr + \frac{\pi}{2} Y_n(k_1r)\int r\psi_1(r) J_n(k_1r)\,dr,$$

$$\varphi_1(r) = -i\frac{c}{\omega\varepsilon_1}\frac{1}{r}\left\{\left[(p_0-k)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1\right] rW_1(r) + i(p_0-k)\frac{d}{dr}(rU_1(r)) - nr(p_0-k)V_1(r)\right\},$$

$$\psi_1(r) = \frac{d}{dr}(rV_1(r)) + nU_1(r),$$

$$C_1^1 = \frac{\varphi_1^1(r_2) Y_n(k_1r_1) - \varphi_1^1(r_1) Y_n(k_1r_2)}{J_n(k_1r_1) Y_n(k_1r_2) - J_n(k_1r_2) Y_n(k_1r_1)}; \tag{28}$$

$$C_2^{(1)} = \frac{\varphi_1^1(r_1) J_n(k_1r_2) - \varphi_1^1(r_2) J_n(k_1r_1)}{J_n(k_1r_1) Y_n(k_1r_2) - J_n(k_1r_2) Y_n(k_1r_1)},$$

$$C_3^1 = \frac{\left[\frac{d\psi_1^1(r_2)}{dr} + V_1(r_2)\right]\frac{dY_n(k_1r_1)}{dr} - \left[\frac{d\psi_1^1(r_1)}{dr} + V_1(r_1)\right]\frac{dY_n(k_1r_2)}{dr}}{\frac{dJ_n(k_1r_1)}{dr}\frac{dY_n(k_1r_2)}{dr} - \frac{dJ_n(k_1r_2)}{dr}\frac{dY_n(k_1r_1)}{dr}};$$

$$C_4^1 = \frac{\left[\frac{d\psi_1^1(r_1)}{dr} + V_1(r_1)\right]\frac{dJ_n(k_1r_2)}{dr} - \left[\frac{d\psi_1^1(r_2)}{dr} + V_1(r_2)\right]\frac{dJ_n(k_1r_1)}{dr}}{\frac{dJ_n(k_1r_1)}{dr}\frac{dY_n(k_1r_2)}{dr} - \frac{dJ_n(k_1r_2)}{dr}\frac{dY_n(k_1r_1)}{dr}},$$

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - (p_0-k)^2;\quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1 - (p_0+k)^2,$$

$k_1^2 \neq k_{j0}^2$, $k_2^2 \neq k_j^2$, где k_{j0} — корни уравнений

$$J_n(k_0r_1) Y_n(k_0r_2) - J_n(k_0r_2) Y_n(k_0r_1) = 0.$$

$$\frac{dJ_n(k_0r_1)}{dr}\frac{dY_n(k_0r_2)}{dr} - \frac{dJ_n(k_0r_2)}{dr}\frac{dY_n(k_0r_1)}{dr} = 0,$$

$\varphi_2^2(r)$, $\psi_2^2(r)$, $\varphi_2(r)$, $\psi_2(r)$, C_1^2, C_2^2, C_3^2, C_4^2 выражаются по формулам, аналогичным (28).

Следовательно, наличие гидродинамического возмущения влияет на поляризацию электромагнитной волны в потоке. Поэтому зависимость амплитуды и фазы электромагнитной волны от гидродинамических параметров и характер поляризации могут быть использованы при анализе устойчивости потоков вязкой несжимаемой жидкости при помощи оптического метода [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Wayland, J, Appl. Phys., v. 26, № 10, p. 1197, 1955.
2. S. Chandrasekhar. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford, 1961.
3. J. Adkins and R. Rivlin. Phil. Trans. Royal Society, v. 255 A, № 1059, 1963.