# МНОГОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ ВОЛН НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА

*И. М. Фукс*

Решение задачи о рассеянии волны на произвольной криволинейной границе раздела сред даже в приближении лучевой оптики связано со значительными трудностями. Это решение можно рассматривать как первый шаг при построении асимптотического разложения поля, рассеянного на поверхности [1].

Общие результаты, полученные в этом направлении Фоком [2], а также последующие работы Конторовича и Муравьева [3], Гельчинского [4] и автора [5] относятся только к процессам однократного отражения и преломления волн. Полное поле на поверхности представляется в виде суммы поля источника, преломленной и отраженной волны в данной точке поверхности. Вместе с тем во многих случаях многократное отражение и преломление может играть существенную роль. В работе Повзнера и Сухаревского [6] было получено асимптотическое разложение поля точечного источника при дифракции на вогнутой поверхности с учетом многократных отражений первичной волны. Однако зависимость коэффициентов разложения (в том числе и члена, соответствующего лучевому приближению) от дифференциальных характеристик отражающей поверхности не исследовалась.

В настоящей работе в приближении лучевой оптики получены формулы для амплитуды и параметров кривизны фронтов волн (акустических и электромагнитных) после многократного отражения и преломления на криволинейных границах раздела сред. Поверхности раздела предполагаются достаточно гладкими, а в остальном могут быть произвольными — открытыми или замкнутыми, односвязными или многосвязными. Для определенности мы рассматриваем две среды, но полученные результаты легко обобщаются на случай произвольного числа различных сред. Полное поле представляется в виде суммы волн, пришедших в точку наблюдения по различным многозвенным экстремальным путям, что соответствует общей схеме, предложенной в работе Кинбера [7] об учете многократных дифракций на сложных телах.

## Учет затенений

Рассмотрим простейший случай отражения монохроматической скалярной волны $U_0(\mathbf{R}) = A_0(\mathbf{R}) \exp[ik\psi_0(\mathbf{R})]$ (зависимость поля от времени, как всегда, подразумевается в виде $e^{-i\omega t}$) от абсолютно жесткой

$\left(\frac{dU}{dn}\Big|_S^{\bullet}=0\right)$ поверхности $S$. Поле в точке $\mathbf{R}$ над поверхностью будем искать, исходя из формулы Грина

$$U(\mathbf{R})=U_0(\mathbf{R})+\frac{1}{4\pi}\int\limits_S U(\mathbf{r})\frac{\partial v(\mathbf{R}-\mathbf{r})}{\partial n}dS$$

$$v(\mathbf{R}-\mathbf{r})=\frac{e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|};\ \mathbf{r}\in S. \tag{1}$$

Дифференцирование здесь проводится по внешней нормали $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ к поверхности $S$ в точке $\mathbf{r}$. Из (1) следует, что поле на поверхности удовлетворяет интегральному уравнению

$$U(\mathbf{r})=2U_0(\mathbf{r})+\frac{1}{2\pi}\int\limits_S U(\mathbf{r}_1)\frac{\partial v(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)}{\partial n_1}dS_1,$$

формальное решение которого представим в виде [6]

$$U(\mathbf{r})=2\sum_{q=0}^{\infty}U'^{(q)}(\mathbf{r});\quad U'^{(0)}(\mathbf{r})=U_0(\mathbf{r}) \tag{2а}$$

$$U'^{(q)}(\mathbf{r})=\underbrace{\int\limits_S\ldots\int\limits_S}_{q}G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q)\,G_0(\mathbf{r}_q-\mathbf{r}_{q-1})\ldots G_0(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,U_0(\mathbf{r}_1)\times$$

$$\times\,dS_1dS_2\ldots dS_q;\quad G_0(\mathbf{r}_{i+1}-\mathbf{r}_i)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial v(\mathbf{r}_{i+1}-\mathbf{r}_i)}{\partial n(\mathbf{r}_i)}. \tag{2б}$$

Этот ряд при длинных волнах и пологих неровностях является рядом теории возмущений, суммирование которого для статистически неровных поверхностей приводит к нормальной функции ослабления Зоммерфельда [8].

Покажем, что при вычислении коротковолновой асимптотики ($k\to\to\infty$) в интеграл по $dS_{i-1}$ в формуле (2б) существенно входят только те точки поверхности $\mathbf{r}_{i-1}$, которые видны из точек $\mathbf{r}_i$; при вычислении интеграла по $dS_i$ существенна только та часть поверхности, которая видна из точек $\mathbf{r}_{i+1}$ и т. д. Действительно, пусть точка $\mathbf{r}_i$ находится в тени по отношению к точке $\mathbf{r}_{i+1}$. Перегруппируем члены ряда (2а) следующим образом:

$$U(\mathbf{r})=2\sum_{q=0}^{\infty}U_{(i)}^{(q)}(\mathbf{r})$$

$$U_{(i)}^{(q)}(\mathbf{r})=\overbrace{\int\limits_S\ldots\int\limits_S}^{q}G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q)\,G_0(\mathbf{r}_q-\mathbf{r}_{q-1})\ldots G_0(\mathbf{r}_{i+1}-\mathbf{r}_i)\ldots\times$$

$$\times\,G_0(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,U_0(\mathbf{r}_1)\,dS_1\ldots dS_q+\sum_{n=1}^{\infty}\overbrace{\int\limits_S\ldots\int\limits_S}^{q+n}G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q)\ldots G_0(\mathbf{r}_{i+1}-$$

$$-\mathbf{r}^{(n)})\,G_0(\mathbf{r}^{(n)}-\mathbf{r}^{(n-1)})\ldots G_0(\mathbf{r}^{(1)}-\mathbf{r}_i)\ldots G_0(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,U_0(\mathbf{r}_1)\,dS^{(1)}\ldots\times$$

$$\times\,dS^{(n)}dS_1\ldots dS_q=\overbrace{\int\limits_S\ldots\int\limits_S}^{q}G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_q)\ldots G_0(\mathbf{r}_{i+2}-\mathbf{r}_{i+1})\,G(\mathbf{r}_{i+1},\,\mathbf{r}_i)\times$$

$$\times\,G_0(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_{i-1})\ldots G_0(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\,U_0(\mathbf{r}_1)\,dS_1\ldots dS_q,$$

где через $G(\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_i)$ обозначена сумма

$$G(\mathbf{r}_{i+1}, \mathbf{r}_i) = G_0(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\int_S \ldots \int_S}^{n} G_0(\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}^{(n)}) G_0(\mathbf{r}^{(n)} - \mathbf{r}^{n-1}) \ldots G_0(\mathbf{r}^{(1)} - \mathbf{r}_i)\, dS^{(1)} \ldots dS^{(n)}.$$

Определенная таким образом функция $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ удовлетворяет уравнению

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \int_S G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')\, dS_1,$$

т. е. $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ — поле в точке $\mathbf{r}$, создаваемое единичным источником, расположенным в точке $\mathbf{r}'$ ($\mathbf{r}$, $\mathbf{r}' \in S$), и может быть представлено в виде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv w(\mathbf{r}, \mathbf{r}') G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{3}$$

Здесь введена функция ослабления $w(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, которая, как известно [9], при $k \to \infty$ экспоненциально убывает в области тени. Повторяя проведенное выше частичное суммирование ряда для всех пар затененных точек $\mathbf{r}_s$, $r_{s+1}$ в интеграле (2б), получим вместо (2*a*) следующую формулу для поля $U(\mathbf{r})$ в точке наблюдения $\mathbf{r}$, которая лежит вне поверхности:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{q=0}^{\infty} U^{(q)}(\mathbf{r}) \tag{4a}$$

$$U^{(q)}(\mathbf{r}) = \overbrace{\int_S \ldots \int_S}^{q} G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q) G_0(\mathbf{r}_q - \mathbf{r}_{q-1}) \ldots G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) U_0(\mathbf{r}_1) w(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q) \times \\ \times w(\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_{q-1}) \ldots w(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) w(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0)\, dS_1 \ldots dS_q, \tag{4б}$$

где $\mathbf{r}_0$ точка на достаточно удаленном от отражающей поверхности фронте падающей волны, из окрестности которой поле переносится в точку $\mathbf{r}_1 \in S$. Если источник точечный, то $\mathbf{r}_0$, например, его радиус-вектор. При этом мы доопределили $w$ так, что $w(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_{s+1}) = 1$, если точки $\mathbf{r}_s$ и $\mathbf{r}_{s+1}$ не затенены. При $q = 1$ приходим к формуле, учитывающей затенения при однократном отражении (приближение Кирхгофа), которая была использована в работе Басса и автора [10]. В дальнейшем нас будет интересовать значение интеграла (4б) при $k \to \infty$ — нулевой член асимптотического разложения по обратным степеням $k$, что соответствует приближению лучевой оптики. Каустические точки, где асимптотическое разложение [6] начинается с членов $k^{\alpha}$ ($\alpha > 0$), и точки в областях геометрической тени, где поле экспоненциально мало, при этом не рассматриваются. Используя определение $G_0$ и оставляя в (4б) члены, не исчезающие при $k \to \infty$, получим

$$U^{(q)}(\mathbf{r}) = \left(\frac{-ik}{2\pi}\right)^q \overbrace{\int_S \ldots \int_S}^{q} \prod_{p=1}^{q} \frac{\mathbf{n}_p \vec{\nu}_p}{\rho_p} e^{ik[\rho_p + \psi_0(\mathbf{r}_1)]} A_0(\mathbf{r}_1) w^{(q)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_q, \ldots, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \times \\ \times dS_1 \ldots dS_q;\quad \vec{\nu}_l = \frac{\vec{\rho}_l}{\rho_l}; \tag{5}$$

$$w^{(q)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q, \ldots, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) \equiv \prod_{p=0}^{q} w(\mathbf{r}_{p+1}, \mathbf{r}_p);\quad \vec{\rho}_l = \mathbf{r}_{l+1} - \mathbf{r}_l;\quad \mathbf{r}_{q+1} \equiv \mathbf{r}.$$

Ввиду того, что $w(\mathbf{r}_{p+1}, \mathbf{r}_p)$ при $k \to \infty$ ведет себя как ступенчатая функция, принимающая значения 1,0 в зависимости от того, видны точки $\mathbf{r}_{p+1}$ и $\mathbf{r}_p$ друг из друга или нет, интегрирование в (5) ведется только по той области $2q$-мерного пространства, где $w^{(q)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q, \ldots, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_0) = 1$. Точки стационарной фазы интеграла (5) определяются из условия экстремальности суммы $\rho_q + \rho_{q-1} + \ldots + \rho_1 + \psi_0(\mathbf{r}_1)$ как функции переменных $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_q \in S$, при условии, что все $\mathbf{r}_p\,(p = 1 \div q)$ лежат внутри указанной выше области ($w^{(q)} = 1$). Для определения экстремальных точек имеем $q$ векторных уравнений

$$\nabla_{\mathbf{r}_s}(\psi_0(\mathbf{r}_1) + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_q) = 0, \tag{6}$$

где $\nabla_{\mathbf{r}_s}$ — означает дифференцирование по направлениям, касательным к поверхности в точке $\mathbf{r}_s$. Предположим, что система (6) имеет конечное число $N^{(q)}$ решений, т. е. совокупности экстремальных точек $X^{(j)} = \{\mathbf{r}_q^{(j)}, \mathbf{r}_{q-1}^{(j)}, \ldots, \mathbf{r}_1^{(j)}\}$ $(j = 1 \div N)$ являются изолированными (в смысле [6]) стационарными точками в $2q$-мерном пространстве. Тогда (5) представляется в виде суммы $N^{(q)}$ интегралов того же вида, взятых по окрестности каждой точки $X^{(j)}$.

### Рекуррентные соотношения для отраженного поля

Непосредственное применение метода стационарной фазы к $2q$-мерному интегралу (5) приводит к очень громоздким выкладкам. Вычисление такого интеграла удобно провести сведением его к повторным интегралам по поверхности $S$ и последовательному применению метода стационарной фазы к внутренним интегралам, предполагая их зависящими от переменных последующих интегрирований как от параметров:*

$$U^{(q)}(\mathbf{r}) = \left(\frac{-ik}{2\pi}\right)^q \int\limits_S \frac{\mathbf{n}_q\vec{\mathbf{v}}_q}{\rho_q} e^{ik\rho_q} dS_q \int\limits_S \frac{\mathbf{n}_{q-1}\vec{\mathbf{v}}_{q-1}}{\rho_{q-1}} e^{ik\rho_{q-1}} dS_{q-1} \ldots \times$$
$$\times \int\limits_S \frac{\mathbf{n}_1\vec{\mathbf{v}}_1}{\rho_1} e^{ik[\rho_1 + \psi_0(\mathbf{r}_1)]} A_0(\mathbf{r}_1)\, dS_1. \tag{7}$$

Полученная таким путем последовательность стационарных точек** $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_q$ — есть одно из решений уравнения (6) и их положение полностью определяется внешним параметром $\mathbf{r}$ (точка наблюдения) и фазой падающей волны $\psi_0(\mathbf{r}_1)$ на поверхности.

Из (7) следует рекуррентное соотношение, которое связывает $p$-кратно отраженное поле с результатом $p$-1 кратного отражения:

$$U^{(p)}(\mathbf{r}_{p+1}) = \frac{-ik}{2\pi} \int\limits_S \frac{\mathbf{n}_p\vec{\mathbf{v}}_p}{\rho_p} e^{ik\rho_p} U^{(p-1)}(r_p)\, dS_p. \tag{8}$$

Если ввести интегральный оператор $\hat{P}$ следующим образом:

$$\hat{P}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)\, U(\mathbf{r}_1) = -\frac{ik}{2\pi} \int\limits_S \frac{\mathbf{n}_1\vec{\mathbf{v}}_1}{\rho_1} e^{ik\rho_1} U(\mathbf{r}_1)\, dS_1 \tag{9}$$

---

* Для плоской задачи, представляющей самостоятельный интерес, эквивалентность этих способов вычисления показана в следующем пункте.

** Чтобы не вводить дополнительные индексы, мы переменные интегрирования и соответствующие стационарные точки обозначаем одной и той же буквой.

(слева $\mathbf{r}_1$ — точка стационарной фазы интеграла), то формула (7) может быть записана компактно в виде

$$U^{(q)}(\mathbf{r}) = \hat{\bar{P}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q)\,\hat{\bar{P}}(\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_{q-1}) \ldots \hat{\bar{P}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)\,U_0(\mathbf{r}_1). \tag{10}$$

Интегралы типа (9) были вычислены в работе [5].

Введем предварительно следующие обозначения для инвариантных параметров кривизны отражающей поверхности $S$ и волновых поверхностей в точке $\mathbf{r}_j \in S$

$K_j$ — гауссова (полная) кривизна поверхности;

$H_j$ — средняя кривизна;

$\varkappa_j$ — кривизна нормального сечения поверхности $S$ плоскостью падения, в которой лежит нормаль $\mathbf{n}_j$ и векторы $\vec{\nu}_{j-1}$, $\vec{\nu}_j$;

$-\pi/2 \leqslant \varphi_j < \pi/2$ — угол между плоскостью падения и главным направлением на поверхности $S$ с наименьшей кривизной; знак угла $\varphi_j$ определяется по правилу винта относительно нормали $\mathbf{n}_j$.

$\bar{K}_j(\mathbf{r}_j)$, $\bar{H}_j(\mathbf{r}_j)$, $\bar{\varkappa}_j(\mathbf{r}_j)$, $\bar{\varphi}_j$ — то же для поверхности $\bar{S}_j$ фронта $j$-кратно отраженной волны в точке $\vec{r}_j$, причем $\operatorname{sign}\bar{\varphi}_j$, определяется относительно вектора $\vec{\nu}_j$ нормали к волновой поверхности.

Используя полученную в работе [5] формулу (1.4) (в дальнейшем при ссылках на эту работу мы к номерам формул будем приписывать 1), представим поле (10) после $q$-кратного отражения в виде

$$U^{(q)}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik\rho_q}U^{(q-1)}(\mathbf{r}_q)}{\sqrt{\bar{K}_q(\mathbf{r}_q)\rho_q^2 - 2\bar{H}_q(\mathbf{r}_q)\rho_q + 1}} =$$

$$= \prod_{p=1}^{q} \frac{e^{ik\rho_p}}{\sqrt{\bar{K}_p(\mathbf{r}_p)\rho_p^2 - 2\bar{H}_p(\mathbf{r}_p)\rho_p + 1}}\,U_0(\mathbf{r}_1). \tag{11}$$

Таким образом, в лучевом приближении оператор $\hat{\bar{P}}$ — есть оператор умножения на фактор, учитывающий расходимость пучка лучей после отражения, и на фазовый множитель, за счет которого изменяется геометрия волнового фронта. Из формул (1.5) (1.П 15) следуют рекуррентные соотношения в точке $\mathbf{r}_j$:

$$\bar{K}_j = 4K_j + \bar{K}_{j-1} + 2\cos\theta_j\bar{\varkappa}'_{j-1}(2H_j - \varkappa_j) + 2\cos^{-1}\theta_j\varkappa_j(2\bar{H}_{j-1} - \bar{\varkappa}'_{j-1}) +$$

$$+ 2\operatorname{sign}\varphi_j\operatorname{sign}\bar{\varphi}'_{j-1}\sqrt{(2\bar{H}_{j-1}\bar{\varkappa}'_{j-1} - \bar{\varkappa}'^2_{j-1} - \bar{K}_{j-1})(2H_j\varkappa_j - \varkappa_j^2 - K_j)}; \tag{12а}$$

$$\bar{H} = 2H_j\cos\theta_j + \bar{H}_{j-1} + \varkappa_j\sin\theta_j\operatorname{tg}\theta_j; \tag{12б}$$

$$\bar{\varkappa}_j = \bar{\varkappa}'_{j-1} + \frac{2\varkappa_j}{\cos\theta_j};\quad \cos\theta_j \equiv \vec{n}_j\vec{\nu}_j. \tag{12в}$$

Значение параметров $\bar{K}_j$, $\bar{H}_j$, $\bar{\varkappa}_j$ в точке $\mathbf{r}_{j+1}$ связано с их значениями в точке $\mathbf{r}_j$ соотношениями (1.П 19), причем $\varkappa_j\operatorname{sign}\varphi_j$, $\bar{\varkappa}_j(\mathbf{r}_j)$, $\operatorname{sign}\bar{\varphi}_j$ определяются относительно плоскости падения в точке $r_j$, в которой лежат векторы $\vec{\nu}_{j-1}$, $n_j$ и $\vec{\nu}_j$. Величины же $\bar{\varkappa}'_j(\mathbf{r}_{j+1})$ и $\operatorname{sign}\bar{\varphi}'_j$, относящиеся к поверхности $\bar{S}_j$, определяются относительно плоскости падения в точке $r_{j+1}$, где лежат векторы $\vec{\nu}_j$, $\mathbf{n}_{j+1}$ и $\vec{\nu}_{j+1}$.

Введем угол $-\pi/2 < \delta_j \leq \pi/2$ между плоскостями падения в соседних точках $\mathbf{r}_j$ и $\mathbf{r}_{j+1}$. Знак $\delta_j$ определяется по правилу винта относительно нормали $\nu_j$ к волновой поверхности $\bar{S}_j$. Тогда величины $\bar{\varkappa}'_j(\mathbf{r}_{j+1})$ и $\operatorname{sign} \bar{\varphi}'_j$ можно исключить из рекуррентных формул (12) (аргумент $\mathbf{r}_{j+1}$ опускаем):

$$\bar{\varkappa}'_j = \cos 2\delta_j \bar{\varkappa}_j + 2\bar{H}_j \sin^2 \delta_j + \sin 2\delta_j \operatorname{sign} \bar{\varphi}_j \times \\ \times \sqrt{2\bar{H}_j \bar{\varkappa}_j - \bar{\varkappa}_j^2 - \bar{K}_j}. \tag{13а}$$

$$\operatorname{sign} \bar{\varphi}'_j \sqrt{2\bar{H}_j \bar{\varkappa}'_j - \bar{\varkappa}'^2_j - \bar{K}_j} = \cos 2\delta_j \operatorname{sign} \bar{\varphi}_j \times \\ \times \sqrt{2\bar{H}_j \bar{\varkappa}_j - \bar{\varkappa}_j^2 - \bar{K}_j} + \sin 2\delta_j (\bar{H}_j - \bar{\varkappa}_j). \tag{13б}$$

### Двумерная задача

Результаты предыдущего параграфа существенно упрощаются в том случае, когда форма отражающей поверхности и волнового фронта падающей волны не зависит от одной координаты $x_3$. Интегральное уравнение при этом имеет вид

$$U(\mathbf{r}) = 2U_0(\mathbf{r}) + \frac{i}{2} \int_L U(\mathbf{r}_1) \frac{\partial}{\partial n_1} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}|) \, dl_1. \quad \mathbf{r},\ \mathbf{r}_1 \in L. \tag{14}$$

Здесь все векторы двумерные, интегрирование происходит по кривой $L$ — сечение отражающей поверхности плоскостью $x_1x_2$. Повторяя рассуждения предыдущего пункта, получаем вместо (5) следующее представление $q$-кратно отраженной волны:

$$U^{(q)}(\mathbf{r}) = \left(\frac{-ik}{2\pi}\right)^{q/2} \overbrace{\int_L \ldots \int_L}^{q} \prod_{p=1}^{q} \frac{\cos\theta_p}{\sqrt{\rho_p}} e^{ik\rho_p} U_0(\mathbf{r}_1) \, dl_1 \ldots dl_q. \tag{15}$$

При $k \to \infty$ этот интеграл легко вычисляется путем разложения показателя экспоненты в ряд вблизи точки стационарной фазы (в $q$-мерном пространстве переменных $l_1, l_2, \ldots, l_q$), которая определяется уравнением, аналогичным (6) в трехмерном случае.

Из (15), таким образом, получаем

$$U^{(q)}(\mathbf{r}) = \prod_{p=1}^{q} \frac{\cos\theta_p}{\sqrt{\rho_p}} e^{ik\rho_p} [B^{(q)}]^{-1/2} U_0(\mathbf{r}_1). \tag{16}$$

Здесь $B^{(q)}$ — определитель якобиевой матрицы $q$-го порядка, элементы которой равны

$$b_{ss} = \cos\theta_s \left[ -2\varkappa_s + \left(\frac{1}{\rho_s} + \frac{1}{\rho_{s-1}}\right) \cos\theta_s \right];$$
$$b_{s,\,s+1} = \frac{1}{\rho^s} \cos\theta_s \cos\theta_{s+1}; \tag{17}$$
$$b_{p,\,r} = b_{r,\,p};\quad b_{s,\,s+n} = 0 \text{ при } n > 1,$$

где $\varkappa_s$ — кривизна контура $L$ в $s$-ой точке зеркального отражения $r_s$, а $\bar{\varkappa}_0 = -\rho_0^{-1}$ — кривизна фронта падающей волны. Если воспользоваться очевидным рекуррентным соотношением

$$\det \| b_{sp} \|^{(q)} \equiv B^{(q)} = b_{qq} B^{(q-1)} - b^2_{q,\,q-1} B^{(q-2)}, \tag{18}$$

то из (16) и (18) получаем рекуррентную формулу для поля при последовательных отражениях:

$$U^{(q)}(\mathbf{r}_{q+1}) = \frac{e^{ik\rho_q}}{\sqrt{1-\bar{\varkappa}_q(\mathbf{r}_q)\rho_q}} U^{(q-1)}(\mathbf{r}_q) = \prod_{p=1}^{q} \frac{e^{ik\rho_p}}{\sqrt{1-\bar{\varkappa}_p(\mathbf{r}_p)\rho_p}} U_0(\mathbf{r}_1), \tag{19}$$

где введена $\bar{\varkappa}_p$ — кривизна фронта после $p$-кратного отражения, для которой выполняются те же соотношения (12в) (1.П 19), что и для кривизны нормального сечения в трехмерном случае:

$$\bar{\varkappa}_q(\mathbf{r}_q) = \bar{\varkappa}_{q-1}(\mathbf{r}_q) + \frac{2\varkappa_q}{\cos\theta_q}; \quad \bar{\varkappa}_q(\mathbf{r}_{q+1}) = \frac{\bar{\varkappa}_q(\mathbf{r}_q)}{1-\rho_q\bar{\varkappa}_q(\mathbf{r}_q)}. \tag{20}$$

Как и следовало ожидать, формула (19) получается из (11) при $K$, $\bar{K}_0 = 0$. Обращение в нуль в знаменателе любого сомножителя $1 - \rho_p\bar{\varkappa}_p(\mathbf{r}_p)$ $(p = 1 \div q - 1)$, что соответствует совпадению каустики с промежуточной точкой зеркального отражения, не приводит к расходимости. Действительно, используя (20), мы можем представить (19) в виде

$$U^{(q)}(\mathbf{r}_{q+1}) = \prod_{p=1}^{q} \left[\frac{\bar{\varkappa}_p(\mathbf{r}_{p+1})}{\bar{\varkappa}_p(\mathbf{r}_p)}\right]^{1/2} e^{ik\rho_p} U_0(\mathbf{r}_1),$$

а отношение $\bar{\varkappa}_{p-1}(\mathbf{r}_p)/\bar{\varkappa}_p(\mathbf{r}_p)$ всегда ограничено, как это следует из (20). То же относится и к формуле (11), если воспользоваться (1.П 19) и ограниченностью отношений $\bar{K}_{p-1}(\mathbf{r}_p)/\bar{K}_p(\mathbf{r}_p)$.

## Эквивалентная схема многократного рассеяния в общем случае

Легко распространить полученные результаты и на случай многократного отражения и преломления волны произвольной формы $U_0(\mathbf{r})$ на границе раздела двух сред с показателями преломления $n_1$ и $n_2$ соответственно.

Имея в виду получение формул, справедливых только в приближении лучевой оптики, мы можем исходить не из точной формулы Грина, и соответствующего ей при $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$ рекуррентного соотношения (8), а сразу пользоваться принципом Гюйгенса ([11], § 59). Для полей $U_1$ и $U_2$ — в первой и второй средах соответственно — получается при этом система двух рекуррентных соотношений:

$$U_1^{(q)}(\mathbf{r}_{q+1}) = -\frac{ikn_1}{2\pi}\int\limits_S \frac{\cos\theta_1^{(q)}}{\rho_q} e^{ikn_1\rho_q}\left[V_{11}(\mathbf{r}_q)U_1^{(q-1)}(\mathbf{r}_q) + W_{12}(\mathbf{r}_q)U_2^{(q-1)}(\mathbf{r}_q)\right] dS_q;$$

$$U_2^{(q)}(\mathbf{r}_{q+1}) = -\frac{ikn_2}{2\pi}\int\limits_S \frac{\cos\theta_2^{(q)}}{\rho_q} e^{ikn_2\rho_q}\left[V_{22}(\mathbf{r}_q)U_2^{(q-1)}(\mathbf{r}_q) + W_{21}(\mathbf{r}_q)U_1^{q-1}(\mathbf{r}_q)\right] dS_q;$$

с начальными условиями

$$U_1^{(0)}(\mathbf{r}_1) = U_0(\mathbf{r}_1); \quad U_2^{(0)}(\mathbf{r}_1) = 0.$$

Здесь $V_{11\,(22)}$ — коэффициент отражения в первой (второй) среде;

$W_{21\,(12)}$ — коэффициент прохождения из первой (второй) среды во вторую (первую);

$\theta_{1\,(2)}^{(q)}$ — определяется как угол между вектором $\vec{\rho}_q = \mathbf{r}_{q+1} - \mathbf{r}_q$ и нормалью к поверхности в точке $\mathbf{r}_q$, направленной в среду 1(2).

Чтобы вычислить интегралы типа (7), возникающие при последовательном применении рекуррентных соотношений, необходимо сначала найти совокупность $q$-звенных экстремальных путей, которые начинаются в произвольной точке поверхности $\mathbf{r}_1$ и заканчиваются в заданной точке наблюдения $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_{q+1}$. Точки излома $\mathbf{r}_j$ каждого экстремального пути — точки отражения и преломления—определяются совокупностью решений системы уравнений, аналогичных уравнениям (6)

$$\nabla_{r_j}[n_1 \psi_0(\mathbf{r}_1) + n_{1\,(2)}\rho_1 + n_{1\,(2)}\rho_2 + \ldots + n_{1\,(2)}\rho_{q-1} + n_1\rho_q] = 0 \qquad (21)$$

при условии, что каждое звено $\vec{\rho}_j = \mathbf{r}_{j+1} - \mathbf{r}_j$ экстремального пути находится полностью в одной из двух сред. Это условие является обобщением условия на отсутствие затенений двух соседних точек зеркального отражения, когда преломленные волны отсутствуют. Преобразование волны при каждом акте отражения от границы раздела теперь описывается операторами

$$\hat{\mathrm{P}}_{11\,(22)}(\mathbf{r}_{j+1}, \mathbf{r}_j) = V_{11\,(22)}(\mathbf{r}_j)\left[\frac{\overline{K}_j(\mathbf{r}_{j+1})}{\overline{K}_j(\mathbf{r}_j)}\right]^{1/2} e^{ikn_{1(2)}\rho_j}, \qquad (22а)$$

где $\hat{\mathrm{P}}_{11}$ — для волн, падающих из среды 1, $\hat{\mathrm{P}}_{22}$ — при отражении преломленных волн («внутренние» отражения в среде 2), а гауссовы кривизны $\overline{K}_j$ отраженной волны находятся из рекуррентных соотношений (12), (13). При этом нормаль к поверхности всегда направляется в ту среду, из которой приходит в данную точку волна.

Операторы преобразования при преломлении волны из среды 1(2) в среду 2(1) имеют вид

$$\hat{\tilde{\mathrm{P}}}_{21\,(12)}(\mathbf{r}_{j+1}, \mathbf{r}_j) = W_{21\,(12)}(\mathbf{r}_j)\left[\frac{\tilde{K}_j(\mathbf{r}_{j+1})}{\tilde{K}_j(\mathbf{r}_j)}\right]^{1/2} e^{ikn_{2(1)}\rho_j}. \qquad (22б)$$

При этом дифференциальные параметры кривизны фронта преломленной волны определяются формулами (I. 18), последовательное применение которых приводит к рекуррентным соотношениям типа (12), (13).

Преобразованию поля в результате любого числа отражений и преломлений соответствует произведение операторов $\hat{\mathrm{P}}$ и $\hat{\tilde{\mathrm{P}}}$ в той последовательности, в которой происходят соответствующие элементарные акты отражения и преломления.

Таким образом, для поля $U_1^{(q)}(\mathbf{r})$ $q$-го порядка получаем формулу

$$U_1^{(q)}(\mathbf{r}) = \underbrace{\hat{\mathrm{P}}_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_q)\hat{\mathrm{P}}_{11}\ldots\hat{\mathrm{P}}_{11}}_{s_j}\hat{\tilde{\mathrm{P}}}_{12}\underbrace{\hat{\mathrm{P}}_{22}\ldots\hat{\mathrm{P}}_{22}}_{t_j-1}\hat{\tilde{\mathrm{P}}}_{21}\ldots\hat{\tilde{\mathrm{P}}}_{12} \times$$

$$\times \underbrace{\hat{\bar{\mathrm{P}}}_{22}\ldots\hat{\bar{\mathrm{P}}}_{22}}_{t_1}\hat{\tilde{\mathrm{P}}}_{21}\underbrace{\hat{\bar{\mathrm{P}}}_{11}\ldots\hat{\bar{\mathrm{P}}}_{11}}_{s_1}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_1)\,U_0(\mathbf{r}_1);\quad 2j+\sum_{p=1}^{j}(s_p+t_p)=q+2, \tag{23}$$

которую можно рассматривать как окончательное решение поставленной задачи.

В случае рассеяния электромагнитных волн для напряженностей полей H и E имеет место та же формула (23) с матричными операторами $\hat{\bar{\mathrm{P}}}$ и $\hat{\tilde{\mathrm{P}}}$, которые определяются по формулам, аналогичным (22а, б) с заменой скалярных коэффициентов отражения $V$ и прохождения $W$ на тензорные $\bar{T}_{ik}$ и $\tilde{T}_{ik}$ (см. (1. 13) (1. 19). Например, оператор преобразования для E при отражении в среде 1 от границы раздела сред с проницаемости $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ имеет вид

$$E_l^{(q)}(\mathbf{r}_{q+1})=\left[\frac{\bar{K}_q(\mathbf{r}_{q+1})}{\bar{K}_q(\mathbf{r}_q)}\right]^{1/2} e^{ik\sqrt{\varepsilon_1}\rho_q}\left[\bar{T}_{11}^{(e)}(\mathbf{r}_q)\right]_{lk} E_k^{q-1}(\mathbf{r}_q); \tag{24}$$

$$\left[\bar{T}_{11}^{(e)}(\mathbf{r}_q)\right]_{lk}=M_{11}\delta_{lk}-\sin^{-2}\theta_q\left[(N_{11}\cos 2\theta_q+M_{11})\,n_l^{(q)}n_k^{(q)}+\right.$$
$$\left.+\cos\theta_q\,(N_{11}+M_{11})\,\nu_l^{q-1}n_k^{(q)}\right];$$

$$M_{11}=\frac{\cos\theta_q-\sqrt{n_{21}^2-\sin^2\theta_q}}{\cos\theta_q+\sqrt{n_{21}^2-\sin^2\theta_q}};\quad N_{11}=\frac{n_{21}^2\cos\theta_q-\sqrt{n_{21}^2-\sin^2\theta_q}}{n_{21}^2\cos\theta_q+\sqrt{n_{21}^2-\sin^2\theta_q}}\quad n_{21}=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$

Подобным образом видоизменяются и другие операторы $\hat{\bar{\mathrm{P}}}_{22}$ и $\hat{\tilde{\mathrm{P}}}_{21}$ (12).

## ВЫВОДЫ

Решение задачи о рассеянии волны произвольной формы на гладкой криволинейной (неплоской) границе раздела двух сред в приближении лучевой оптики сводится, таким образом, к следующему.

1. Отыскиваются экстремальные многозвенные пути, удовлетворяющие принципу Ферма, решением уравнения (21) для точек излома. Из всех решений отбираются только те, у которых каждое звено находится полностью в одной среде.

2. Вычисляются дифференциальные характеристики поверхности $K_j$, $H_j$, $\varkappa_j$, $\operatorname{sign}\varphi_j$ и углов падения $\theta_j$ в каждой точке излома $\mathbf{r}_j$, а также углов $\delta_j$ между плоскостями падения в соседних точках.

3. Полное поле представляется в виде суммы вкладов (23) от каждого экстремального пути. Формула (23), если пользоваться терминологией работы [7], выражает полную матрицу рассеяния на $q$-звенном пути через произведение матриц $\hat{\bar{\mathrm{P}}}$ и $\hat{\tilde{\mathrm{P}}}$ узлов — однократных отражений и преломлений.

4. Последовательно вычисляются матрицы рассеяния $\hat{\bar{\mathrm{P}}}$ и $\hat{\tilde{\mathrm{P}}}$ по формулам (22 а, б) (или в электромагнитном случае (24) при помощи рекуррентных соотношений типа (12) для гауссовых кривизн волновых фронтов.

Решения уравнений типа (1. 7), с заменой $\bar{H}_1$, $\bar{K}_1$ на $\bar{H}_q$, $\bar{K}_q$, определяют в параметрической форме каустические точки для $q$-кратно отраженной (и преломленной) волны.

Число слагаемых $U^{(q)}$ в построенной таким путем сумме может оказаться бесконечным по следующим причинам.

Существует бесконечное континуальное множество решений системы (21) при фиксированном числе звеньев $q$. Оказывается, что при этом точка наблюдения находится на каустической поверхности [6] и, как было оговорено выше, полученные результаты к этому случаю заведомо неприменимы.

Существуют решения системы уравнений (21) при сколь угодно большом числе звеньев $q$. Возможны следующие случаи:

а) углы $\pi/2-\Theta_j$ имеют точную нижнюю грань $\alpha>0$ равномерно по $q$. В силу предполагаемой гладкости поверхности ($\varkappa_{max}<\infty$), отсюда следует, что длина звеньев $\rho_j$ также имеет точную нижнюю грань — $\rho_j \geqslant \alpha\varkappa_{max}^{-1}$ равномерно по $q$. Совокупность точек стационарной фазы оказывается при этом не сближающейся и полученный ряд сходится для любых $V$, $W<1$ не хуже, чем геометрическая прогрессия;

б) нижняя грань углов $\pi/1-\Theta_j$ стремится к нулю при увеличении числа звеньев $q$. Это означает, что мы имеем дело при $q\to\infty$ с поверхностной волной (волна шепчущей галлереи), для которой невозможно представление в виде суммы падающего и отраженного поля.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ф. Г. Бассу за руководство работой.

## ЛИТЕРАТУРА


1. J. B. Keller, R. M. Lewis, B. D. Seckler. Comm. Pure Appl. Math., 9, 2, 207, 1956.
2. В. А. Фок. ЖЭТФ, 20, 11, 961, 1950.
3. В. М. Конторович, Ю. К. Муравьев. ЖТФ. 22, 394, 1952.
4. Б. Я. Гельчинский. ДАН СССР, 118, 3, 458, 1958.
5. И. М. Фукс. «Изв. вузов. Радиофизика» 8, 6, 1078, 1965.
6. А. Я. Повзнер, И. В. Сухаревский. Журн. вычислит. мат. и матем. физики 1, 2, 224, 1961.
7. Б. Е. Кинбер. «Радиотехника и электроника», 9, 9, 1594, 1964.
8. Е. Л. Фейнберг. Исследования по распространению радиоволн, Сб. II. Стр. 97, Изд-во АН СССР, М. — Л., 1948.
9. В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн. «Радиотехника и электроника», 8, 3, 363, 377, 1963.
10. Ф. Г. Басс, И. М. Фукс. «Изв. вузов. Радиофизика», 7, 1, 101, 1964.
11. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, Физматгиз. М., 1962.