О ФЛУКТУАЦИОННОЙ ЭНЕРГИИ В РЕЗОНАТОРЕ С ПЛАЗМОЙ

С. В. Троицкий, И. П. Якименко

Измерение мощности теплового излучения плазмы, заключенной в металлическую оболочку, используется для определения температуры или средней энергии электронов плазмы [1]. При этом обычно требуется, чтобы размеры плазмы были, по крайней мере, на порядок больше длины волны. В этом случае можно не учитывать краевые эффекты и вполне достаточными оказываются результаты классической теории теплового излучения. Однако уже в сантиметровом диапазоне отмеченное требование не удовлетворяется и тогда эксперимент приобретает смысл, если только плотность флуктуационной энергии в резонаторе с плазмой определена на основании общей теории электромагнитных флуктуаций. В работе [2] учтено, что плазма, помещенная в металлическую оболочку, — это плазменный резонатор, и определение добротности ведет к установлению температуры, но при вычислении как излучения электронов, так и мощности потерь в плазме игнорируется ограниченность плазменного объема. Как правильно отмечают авторы [2], такой подход возможен, если $\omega^2 \gg \omega_0^2$, т. е. эффективная диэлектрическая проницаемость плазмы $\varepsilon \simeq 1$. Если такие ограничения нежелательны, то необходимо строгое решение краевой задачи с привлечением флуктуационно-диссипативной теоремы, попытка которого и предпринимается в настоящей работе.

Рассмотрим цилиндрический резонатор радиуса b и длиной l, частично заполненный плазмой ($0 \leqslant r \leqslant a$), помещенной в продольное постоянное магнитное поле H_0. Компоненты электромагнитного поля в объеме плазмы должны быть записаны с учетом «сторонних» электрических индукций **K** и граничных условий на торцах, которые приводят к установлению в резонаторе системы стоячих волн. Записывая суперпозицию волн [3], бегущих в направлениях $+z$ и $-z$, получим в области плазмы

$$E_z = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_z}}\left(\lambda_1\gamma_1^2\psi_1 + \lambda_2\gamma_2^2\psi_2\right)\cos\beta z,$$

$$E_\varphi = ik\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + \frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \frac{n\,(b_1\psi_1 + b_2\psi_2)}{r} + \frac{ik\,(k^2\varepsilon - \beta^2)}{\delta}K_\varphi - \frac{nk^3}{\delta}K_r\right)\sin\beta z,$$

$$E_r = k\left(b_1\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + b_2\frac{\partial\psi_2}{\partial r} + \frac{n\,(\psi_1 + \psi_2)}{r} - \frac{k\,(k^2\varepsilon - \beta^2)}{\delta}K_r + \frac{i\eta k^3}{\delta}K_\varphi\right)\sin\beta z, \qquad (1)$$

$$H_z = -\left(\gamma_1^2\psi_1 + \gamma_2^2\psi_2\right)\sin\beta z,$$

$$H_\varphi = i\left(k\lambda_1\sqrt{\varepsilon_z}\frac{\partial\psi_1}{\partial r} + k\lambda_2\sqrt{\varepsilon_z}\frac{\partial\psi_2}{\partial r} - \frac{n\beta}{r}(\psi_1+\psi_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta k(k^2\varepsilon-\beta^2)}{\delta}K_r - \frac{i\beta\eta k^3}{\delta}K_\varphi\right)\cos\beta z,$$

$$H_r = \left(-\beta\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial r}+\frac{\partial\psi_2}{\partial r}\right) + \frac{nk\sqrt{\varepsilon_z}}{r}(\lambda_1\psi_1+\lambda_2\psi_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{i\beta k(k^2\varepsilon-\beta^2)}{\delta}K_\varphi + \frac{\eta\beta k^3}{\delta}K_r\right)\cos\beta z.$$

Функции ψ_i являются решениями неоднородных волновых уравнений

$$\Delta_\perp\psi_i + \gamma_i^2\psi_i = F_i(\mathbf{K}), \tag{2}$$

где

$$F_{1,2}(\mathbf{K}) = \mp\frac{\lambda_{2,1}}{\gamma_{1,2}^2(\lambda_2-\lambda_1)}\left(\frac{\lambda_{1,2}\gamma_{1,2}^2}{\sqrt{\varepsilon_z}}K_z - \frac{kb_{1,2}}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rK_r) + \right.$$

$$\left. + \frac{ik}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rK_\varphi) + \frac{nk}{r}K_r - \frac{inkb_{1,2}}{r}K_\varphi\right). \tag{3}$$

В формулах (1—3) приняты следующие обозначения:

$$\gamma_{1,2}^2 = a_2 + a_0\lambda_{1,2} = a_1 - a_0\lambda_{2,1};\quad b_{1,2} = \frac{k^2\varepsilon-\beta^2-\gamma_{1,2}^2}{k^2\eta},$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_1-a_2}{a_0} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1-a_2}{a_0}\right)^2+1},\quad a_0 = \frac{k\beta\eta\sqrt{\varepsilon_z}}{\varepsilon},\quad a_1 = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}(k^2\varepsilon-\beta^2), \tag{4}$$

$$a_2 = k^2\frac{\varepsilon^2-\eta^2}{\varepsilon} - \beta^2,\quad \delta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_z}\gamma_1^2\gamma_2^2,\quad k = \frac{\omega}{c};$$

ε, η, ε_z — компоненты тензора диэлектрической проницаемости «холодной» плазмы.

Величина β устанавливается из граничного условия при $z = l$:

$$\beta = \frac{s\pi}{l},\quad s = 0,\ 1,\ 2\ldots \tag{5}$$

Таким образом, Фурье-компоненты поля определяются из (1), а полное поле представляется в виде

$$f(z,t,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{ns\omega}e^{-i(\omega t-n\varphi)}\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix}\left(\frac{s\pi}{l}z\right)d\omega. \tag{6}$$

Предполагая, что плазма занимает только малую часть полного объема резонатора, при вычислении запасенной энергии достаточно ограничиться только энергией в пространстве $a \leqslant r \leqslant b$. Записав обычные выражения для поля в пустом резонаторе и применив граничные условия при $r = a$ и $r = b$, можно представить амплитуды поля в пустоте в виде линейных функционалов от $\mathbf{K}$. Подставляя их в выражение для плотности флуктуационной энергии

$$U_\omega = \frac{1}{4\pi}\int_a^b r\,dr\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_0^l dz\,(\overline{\mathbf{E}_\omega\mathbf{E}_\omega^*} + \overline{\mathbf{H}_\omega\mathbf{H}_\omega^*}) \tag{7}$$

и производя усреднение с помощью флуктуационно-диссипативной теоремы, согласно которой

$$\langle K_{i\omega}^{(1)}K_{k\omega}^{(2)*}\rangle = \frac{i\hbar}{2\pi}(\overset{*}{\varepsilon}_{ki} - \varepsilon_{ik})\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\,\frac{\delta(r_1-r_2)}{r_1}, \tag{8}$$

получим следующий окончательный результат ($\hbar\omega \ll T$):

$$U_\omega = \frac{T}{2\pi a^2 \omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{i+k}}{|\Delta|^2} f_{ik}\delta_{ei}\Delta^*_{sk}, \tag{9}$$

где

$$f_{ik} = \frac{\varepsilon''_z}{|\varepsilon_z|^2}\gamma_i^2 \gamma_k^{*2}\lambda_i\lambda_k^* I_1^{ik} + k^2\left[\varepsilon''\left(1 + b_i b_k^*\right) - \eta''\left(b_i + b_k^*\right)\right] I_2^{ik} +$$

$$+ nk^2\left[\varepsilon''\left(b_i + b_k^*\right) - \eta''\left(1 + b_i b_k^*\right)\right] I_3^{ik}; \quad I_3^{ik} = J_{ni}J^*_{nk},$$

$$I_1^{ik} = \frac{J_{ni}J^{*\prime}_{nk} - J'_{ni}J^*_{nk}}{\gamma_i^2 - \gamma_k^{*2}} a, \quad I_2^{ik} = \frac{\gamma_i^2 J_{ni}J^{*\prime}_{nk} - \gamma_k^{*2} J^*_{nk}J'_{ni}}{\gamma_i^2 - \gamma_k^{*2}} a;$$

$$\delta_{1\ 1,2} = \frac{1}{J_{1,2}h_1(a)}\left[\frac{\gamma_{2,1}\sqrt{\varepsilon_z}}{\gamma_{1,2}}\frac{h_2(a)}{h_2(a)} - \frac{\gamma^2\sqrt{\varepsilon_z}}{\gamma_1\gamma_2}\frac{J_{2,1}}{J_{2,1}} - \frac{nk\lambda_{2,1}\left(\gamma_{2,1}^2 - \varepsilon_z\gamma^2\right)}{\beta a\gamma_1\gamma_2}\right],$$

$$\delta_{2\ 1,2} = \frac{1}{J_{1,2}h_2(a)}\left[\frac{\gamma_{2,1}\lambda_{2,1}}{\gamma_{1,2}}\frac{h'_1(a)}{h_1(a)} - \frac{\varepsilon_z\gamma^2\lambda_{2,1}}{\gamma_1\gamma_2}\frac{J'_{2,1}}{J_{2,1}} - \frac{n\beta\sqrt{\varepsilon_z}\left(\gamma_{2,1}^2 - \gamma^2\right)}{ka\gamma_1\gamma_2}\right],$$

$$\Delta = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma^2\sqrt{\varepsilon_z}}\left(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}\right)J_1 J_2 h_1(a)h_2(a), \quad \Delta_{1i} = \delta_{1i}L_1^* + \delta_{2i}L_{21},$$

$$\Delta_{2i} = \delta_{2i}L_2^* + \delta_{1i}L_{12}, \quad L_i = L_i(b) - L_i(a), \quad L_{12} = L_{12}(b) - L_{12}(a); \tag{10}$$

$$L_i(r) = \frac{(kr)^2}{\gamma^2}\left\{\left(1 - \frac{n^2}{(\gamma r)^2}\right)|h_i(r)|^2 + \frac{1}{\gamma^2}|h'_i(a)|^2 + \frac{k^2 + \beta^2}{k^2\gamma^2 r} h_i(r) h_i^{*\prime}(r)\right\},$$

$$L_{12}(r) = \frac{2nk\beta}{\gamma^4}h_1(r)h_2^*(r), \quad L_{21} = L_{12}^*, \quad h_{1,2}(r) = H_n^{(1)}(\gamma r) - p_{1,2}H_n^{(2)}(\gamma r),$$

$$p_1 = \frac{H_n^{(1)}(\gamma b)}{H_n^{(2)}(\gamma b)}, \quad p_2 = \frac{H_n^{(1)\prime}(\gamma b)}{H_n^{(2)\prime}(\gamma b)}, \quad J_i = J_n(\gamma_i a), \quad \gamma^2 = k^2 - \beta^2.$$

Штрих означает производную по соответствующему радиусу. Если $\beta > k$, то в коэффициентах нужно снять знак комплексного сопряжения, а все выражение, стоящее под знаком суммы в (9), умножить на $(-1)^{n+1}$.

Заметим, что равенство Δ нулю представляет дисперсионное уравнение для определения частот собственных колебаний цилиндрических резонаторов, частично заполненных магнитоактивной плазмой [5].

Формула (9) допускает предельный переход к случаю цилиндрического резонатора с изотропной плазмой, когда $H_0 \to 0$. При этом

$$\varepsilon_z = \varepsilon, \ \eta = 0, \ \lambda_{1,2} = \pm 1, \ b_{1,2} = \mp\frac{\beta}{k\sqrt{\varepsilon_z}}, \ \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = k^2\varepsilon - \beta^2 = \gamma_\varepsilon^2.$$

Тогда (9) сохраняет прежний вид, но коэффициенты (10) сильно упрощаются:

$$\delta_{11} = \frac{1}{J_n h_1(a)}\left[\frac{h'_2(a)}{h_2(a)} - \frac{\gamma^2}{\gamma_\varepsilon^2}\frac{J'_n}{J_n}\right], \quad \delta_{22} = -\frac{1}{J_n h_2(a)}\left[\frac{h'_1(a)}{h_1(a)} - \frac{\varepsilon\gamma^2}{\gamma_\varepsilon^2}\frac{J'_n}{J_n}\right],$$

$$\delta_{12} = \frac{nk\beta(\varepsilon - 1)}{a\gamma_\varepsilon^2 J_n h_1(a)}, \quad \delta_{21} = -\frac{nk\beta(\varepsilon - 1)}{a\gamma_\varepsilon^2 J_n h_2(a)},$$

$$\Delta = \frac{\gamma_\varepsilon^2 h_1(a)h_2(a)J_n^2}{\gamma^2}\left(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{21}\delta_{12}\right),$$

$$f_{11} = \varepsilon''\left(\beta^2 I_2 + |\gamma|^4 I_1\right), \quad f_{22} = \varepsilon'' k^2 I_2,$$

$$f_{12} = f_{21} = \varepsilon'' nk\beta I_3, \quad J_n = J_n(\gamma_\varepsilon a).$$

Хотя соотношение (9) сведено к достаточно простому и обозримому виду и позволяет произвести прямые расчеты, оно все же слишком сложно для качественного анализа. Имея это в виду, рассмотрим здесь важный для практики случай тонкого плазменного цилиндра, когда $\gamma_t a \ll 1$. Сохраняя в рядах для функций Бесселя только главные члены, получим после несложных, но громоздких преобразований

$$U_{\omega ns} = \frac{T(\varepsilon'' - \eta'')}{2\pi\omega\,|1+\varepsilon-\eta|^2} A_{\omega ns} \,(n > 1), \tag{12}$$

где

$$A_{\omega ns} = 1 + \frac{(ka)^2 (\gamma a/2)^{2(n-1)}}{n!\,(n-1)!} \left\{ \frac{\beta^2}{\gamma^2 \left[J_n(\gamma b) + \delta'\right]^2} + \frac{k^2\left[1 - \left(\frac{n}{\gamma b}\right)^2\right]}{\left[J_n'(\gamma b) + \delta''\right]^2} \right\}, \tag{13}$$

а малые величины δ' и δ'' равны

$$\delta' = \frac{\pi N_n(\gamma b)}{n!\,(n-1)!} \left(\frac{\gamma a}{2}\right)^{2n}, \quad \delta'' = \frac{\pi N_n'(\gamma b)}{n!\,(n-1)!} \left(\frac{\gamma a}{2}\right)^{2n}. \tag{14}$$

Легко заметить, что $A_{\omega ns}$ принимает резонансные значения на тех частотах, для которых

$$J_n(\gamma b) = 0 \tag{15}$$

или

$$J_n'(\gamma b) = 0. \tag{16}$$

Но соотношение (15) — известное уравнение для собственных колебаний E_{nms}-типа, а (16) — уравнение для колебаний H_{nms}-типа в пустом резонаторе. Таким образом, если плазменный цилиндр достаточно тонок, то прежде всего следует ожидать резонансов запасенной флуктуационной энергии на собственных частотах колебаний пустого резонатора. Малые величины δ' и δ'' сохранены в (13) для того, чтобы учесть конечную ширину резонансных кривых, которые при $\delta' = \delta'' = 0$ обращаются в разные линии бесконечной высоты. Очевидно, величины δ' и δ'' определяют полуширину истинных резонансных кривых, а следовательно, и добротности соответствующих резонансов. При резонансе E_{nms}-типа

$$A_{\omega ns} = \frac{\beta^2 k^2 n!\,(n-1)!}{\gamma^4 \pi^2 N_n^2(\gamma b) \left(\frac{\gamma a}{2}\right)^{2n}}. \tag{17}$$

При уменьшении a величина $A_{\omega ns}$ растет, что естественно, так как объем, в котором энергия поглощается (плазма), уменьшается, а стенки резонатора мы с самого начала предполагали идеально проводящими. Конечно, добротность такого пустого резонатора должна быть равна бесконечности (любое возникшее колебание должно продолжаться вечно), что и следует из (17), так как $\lim\limits_{a\to 0} A_{\omega ns} = \infty$.

Однако характерным следствием формулы (12) является наличие специфических резонансов, связанных с плазмой, и наблюдающихся на тех частотах, при которых

$$\mathrm{Re}\,(1 + \varepsilon - \eta) = 0. \tag{18}$$

Этот резонанс является дополнительным источником информации о состоянии плазмы.

Добротность всех резонансов зависит от диссипативных свойств плазмы ($U_{\omega ns} \sim (\varepsilon'' - \eta'')$) и может служить поэтому для определения этих свойств.

С точки зрения эксперимента особый интерес представляет случай совмещения специфических плазменных резонансов и обычных резонансов пустого эндовибратора.

Если плазма не находится во внешнем магнитном поле (изотропная плазма), то из (12) следует, что

$$U_{\omega ns} = \frac{T\varepsilon''}{2\pi\omega\,|\,1 + \varepsilon\,|^2}\,A_{\omega ns}\,. \tag{19}$$

В этом случае резонанс, связанный с плазмой, наблюдается на обычной граничной частоте плазменного цилиндра, определяемой из условия

$$\varepsilon = -1, \tag{20}$$

откуда

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}\,. \tag{21}$$

Следует помнить, что (12) и (19) справедливы только для тех s, при которых еще не нарушается условие малости радиуса плазмы ($\gamma_i a \ll 1$).

Добротность резонатора, как известно, не определяется полностью только запасенной энергией. Необходимо вычислить еще мощность потерь P_ω, а затем воспользоваться формулой

$$Q = \frac{\omega U_\omega}{P_\omega}\,. \tag{22}$$

Поскольку мы предположили, что стенки резонатора являются идеально проводящими, потери энергии происходят только в плазменном объеме. В соответствии с обычными правилами усредненный спектр мощности электрических потерь в изотропной плазме

$$P_\omega = l\omega\varepsilon'' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-0}^{\infty} \int\limits_0^a \overline{\mathbf{E}\,\mathbf{E}^*}\, r dr. \tag{23}$$

Электрическое поле в плазме имеет довольно сложную структуру. Как это видно из общих формул (1) и (2), оно включает «сторонние» электрические индукции, первичное излученное поле (частное решение неоднородного уравнения (2)) и, наконец, вторичное поле, которое образуется в результате многократных отражений от границ плазмы и является общим решением однородной части уравнения (2). При определении мощности потерь естественно учитывать только эту последнюю часть электрического поля в плазме (многократно отраженные волны). Выражая амплитуды этого поля в виде линейных функционалов от $\vec{K}$ (с помощью граничных условий) и производя усреднение, можно определить потери в случае произвольного радиуса a

$$P_\omega = \frac{T\varepsilon''}{2\pi a^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+k}}{|\gamma_\varepsilon^2 \Delta|^2} f_{lk}\, \Delta^*_{el} \tilde{\Delta}_{ek}\,, \tag{24}$$

где

$$\tilde{\Delta}_{1l} = \Delta_{1l} f_{11} + \Delta_{2l} f_{21},\quad \tilde{\Delta}_{2l} = \Delta_{2l} f_{22} + \Delta_{1l} f_{12},$$

$$\Delta_{11} = -\frac{\pi i}{2}\,\frac{\gamma^2\gamma_\varepsilon^2 a}{\varepsilon}\,\frac{H_n^{(1)}}{J_n}\left[\frac{n^2k^2\beta^2(\varepsilon-1)^2}{a^2\gamma^4\gamma_\varepsilon^4} - \left(\frac{h_2'(a)}{\gamma^2 h_2(a)} - \frac{J_n'}{\gamma_\varepsilon^2 J_n}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{h_1'(a)}{\gamma^2 h_1(a)} - \frac{\varepsilon H_n^{(1)\prime}}{\gamma^2 H_n^{(1)}}\right)\right], \tag{25}$$

$$\Delta_{22} = \frac{\pi l}{2} \, \frac{\gamma^2\gamma_\varepsilon^2 a H_n^{(1)}}{J_n} \left[\frac{n^2k^2\beta^2(\varepsilon-1)^2}{a^2\gamma^4\gamma_\varepsilon^4} - \left(\frac{h_1'(a)}{\gamma^2 h_1(a)} - \frac{\varepsilon J_n'}{\gamma_\varepsilon^2 J_n} \right) \left(\frac{h_2'(a)}{\gamma^2 h_2(a)} - \frac{H_n^{(1)'}}{\gamma^2 H_n^{(1)}} \right) \right].$$

$$\Delta_{12} = -\Delta_{21} = \frac{nk\beta(\varepsilon-1)}{a\gamma_\varepsilon^2 J_n^2}, \quad H_n^{(1)} = H_n^{(1)}(\gamma_\varepsilon a),$$

$$H_n^{(1)'} = \frac{dH_n^{(1)}(\gamma_\varepsilon a)}{\partial a}.$$

Остальные величины, входящие в (24), записаны в (11). В приближении тонкого цилиндра (24) приобретает простой вид

$$P_{\omega n s} = \frac{T\varepsilon''}{2\pi^1} \left| \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon(\varepsilon+1)} \right|^2. \tag{26}$$

Учитывая (19) и (22), для добротности в этом случае получим

$$Q_{\omega n s} = \frac{4}{\varepsilon''} \left| \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \right|^2 A_{\omega n s}. \tag{27}$$

Как и следовало ожидать, эта величина не принимает резонансного значения на частоте, даваемой (21), так как в этом случае одновременно с ростом запасенной энергии пропорционально возрастают и потери энергии в плазме.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Ларионов. Сб. «Диагностика плазмы». Под ред. акад. Б. П. Константинова. М., Госатомиздат, 1963, стр. 132.
2. А. Н. Кархов, В. Т. Карпухин. Сб. «Диагностика плазмы». Под ред. акад. Б. П. Константинова. М., Госатомиздат, 1963, стр. 145.
3. И. П. Якименко. «Изв. вузов. Радиофизика», 8, 476, 1965.
4. И. П. Якименко, С. В. Троицкий. Сб. «Радиотехника», № 3, 1966.
5. И. П. Якименко, Т. Р. Кельнер. «Изв. вузов. Радиофизика», 8, 1967.