РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МАЛЫХ ТЕЛАХ В ВОЛНОВОДАХ

Н. А. Хижняк

Известно, что в электромагнитной теории при решении ряда дифракционных задач наряду с уравнениями поля в дифференциальной форме широко используются уравнения электромагнитных волн в интегральной форме [1, 2, 3]. Преимущество этих уравнений состоит в том, что их решения автоматически удовлетворяют требуемым граничным условиям на границе раздела двух сред. В частности, в [3, 4, 5] интегральные уравнения [3] используются для решения различных задач рассеяния электромагнитных волн на диэлектрических телах с произвольными тензорами диэлектрических и магнитных проницаемостей. Если в данной области пространства при отсутствии возмущающих тел существовало электромагнитное поле $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ и $\mathbf{H}_0(\mathbf{r})e^{i\omega t}$, то внесение тела с тензорами проницаемостей $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ изменяет это поле.

Для внутренних точек $r \in V$ компоненты поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ определяются следующими уравнениями:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2\varepsilon_1\mu_1)\int\limits_V \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1\right)\mathbf{E}(\mathbf{r}')f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,d\mathbf{r}' - \frac{ik\mu_1}{4\pi}\operatorname{rot}\int\limits_V \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1\right)\mathbf{H}(\mathbf{r})f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,d\mathbf{r}'. \quad (1)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2\varepsilon_1\mu_1)\int\limits_V \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1\right)\mathbf{H}(\mathbf{r}')f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,d\mathbf{r}' + \frac{ik\varepsilon_1}{4\pi}\operatorname{rot}\int\limits_V \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1\right)\mathbf{E}(\mathbf{r})f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,d\mathbf{r}', \quad (2)$$

где ε_1 и μ_1 — диэлектрическая и магнитная проницаемости окружающей среды,

V — объем рассеивающего тела.

Система интегродифференциальных уравнений линейная, поэтому ее решения имеют вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \hat{B}\mathbf{H}_0(\mathbf{r}),\quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \hat{A}\mathbf{E}_0(\mathbf{r}),$$

где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — матрицы рассеяния, при $(a/\lambda) \ll 1$ сводящиеся к числовым матрицам.

Интегральные уравнения, полученные в работах [2, 3], решают задачу о рассеянии электромагнитных волн на диэлектрических телах в неограниченном пространстве. В настоящей работе эти уравнения обобщаются на случаи, когда рассеивающее тело помещено внутри областей, ограниченных металлическими стенками (электромагнитные резонаторы и волноводы). Задачи подобного типа осложнены тем обстоятельством, что электромагнитные поля должны удовлетворять граничным условиям на поверхностях, имеющих разную геометрию, например, на поверхности волновода, с цилиндрической симметрией, и на поверхности рассеивающего тела, у которого совершенно другая симметрия. Оказывается, что наиболее целесообразно в таких случаях внешние поля разлагать по собственным функциям волновода, а саму дифракционную задачу решать на основе уравнений Максвелла в интегральной форме.

Обобщить интегральные уравнения на случай, когда рассеивающее тело помещено в электромагнитный волновод, легко, если заметить, что конкретный вид функции $f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ не является существенным. Действительно, уравнения (1) и (2) остаются эквивалентными уравнениям Максвелла и соответствующим граничным условиям на поверхности тела и в том случае, когда под $f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ будет пониматься любая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) + k^2\varepsilon_1\mu_1 f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = -4\pi\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|), \tag{3}$$

если только она удовлетворяет физическим условиям задачи. В неограниченном пространстве единственным таким условием было условие излучения на бесконечности, поэтому функция f выбиралась в виде

$$f(\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = \frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{4}$$

В случае задачи о рассеянии в волноводе под $f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ следует понимать такое решение уравнения (3), которое определяет поля, удовлетворяющие граничным условиям на поверхности волновода.

Заметим, что использовать интегральные уравнения (1) и (2) при решении задачи о рассеянии в волноводе целесообразно и потому, что само решение задачи разбивается на два независимые этапа. На первом этапе, решая интегральные уравнения, находятся внутренние поля в рассеивающем теле по полю падающей волны (которая имеет обычно простую структуру). На втором этапе по внутренним полям строятся выражения для рассеянной волны (которая имеет уже сложную структуру).

В общем случае, когда размеры рассеивающего тела сравнимы с длиной рассеиваемой волны, интегральные уравнения слишком сложны для непосредственного анализа, поэтому рассмотрим случай, когда длина волны велика по сравнению с размерами тела. Тогда в нулевом приближении внутреннее поле по-прежнему будет определяться электростатическими уравнениями ($k \to 0$), где под $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ следует понимать электрическое и магнитное поле падающей волны в центре рассеивающего тела. Поле рассеянного излучения на больших расстояниях от рассеивающего тела можно описать с помощью дипольных членов потенциалов Герца. Разлагая функцию $f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ в ряд по мультипольным моментам, для первого члена разложения, характеризующего дипольную часть поля рассеяния, будем иметь

$$\mathbf{\Pi}_d^{э} = \mathbf{d}_1 f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|),\ \mathbf{\Pi}_d^{м} = \mathbf{d}_2 f(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|), \tag{5}$$

где $\mathbf{r}_0$ — координаты центра рассеивающего тела, а функция f удовлетворяет уравнению (3).

Тогда

$$\mathbf{E}_{\text{расс}} = (\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2\varepsilon_1\mu_1)\,\mathbf{\Pi}_d^{э} - ik\mu_1 \operatorname{rot}\mathbf{\Pi}_d^{м}, \tag{6}$$

$$\mathbf{H}_{\text{расс}} = (\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2\varepsilon_1\mu_1)\,\mathbf{\Pi}_d^{м} + ik\varepsilon_1 \operatorname{rot}\mathbf{\Pi}_d^{э}.$$

Следовательно, сами потенциалы Герца $\mathbf{\Pi}_d^{э}$ и $\mathbf{\Pi}_d^{м}$, характеризующие дипольное поле рассеяния, определяются уравнениями

$$\Delta\mathbf{\Pi}_d^{э} + k^2\varepsilon_1\mu_1\mathbf{\Pi}_d^{э} = -4\pi\mathbf{d}_1\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0'|), \tag{7}$$

$$\Delta\mathbf{\Pi}_d^{м} + k^2\varepsilon_1\mu_1\mathbf{\Pi}_d^{м} = -4\pi\mathbf{d}_2\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|),$$

где $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$ — дипольные моменты, индуцированные в теле падающей волной

$$\mathbf{d}_1 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1\right)\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'. \tag{8}$$

$$\mathbf{d}_2 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1\right)\mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'.$$

Рассеянное поле определяется теперь через потенциалы Герца соотношениями (6).

Применим теперь полученные уравнения к решению конкретных задач. Для этого вычислим коэффициент отражения основной TE-волны от анизотропного диэлектрического и металлического эллипсоидов в прямоугольном волноводе и коэффициент отражения основной TH-волны от таких же тел в цилиндрическом волноводе.

Выражения для внутреннего поля через поле падающей волны в случаях, когда рассеивающим телом является анизотропный диэлектрический эллипсоид, получены в [3]. Поэтому задача сводится к построению решений уравнений (7) в зависимости от геометрии волновода.

Рассмотрим прежде всего прямоугольный волновод (стенки волновода определяются плоскостями $x = 0$, $x = d$ и $y = 0$, $y = h$; ось z направлена по оси волновода) и предположим, что координаты центра эллипсоида есть $x = x_0$, $y = y_0$ и $z = 0$. Каждая из компонент электрического вектора Герца $\mathbf{\Pi}_d^{э}$ удовлетворяет волновому уравнению с δ-образной правой частью

$$\Delta\Pi_\alpha^{э} + k^2\varepsilon_1\mu_1\Pi_\alpha^{э} = -4\pi d_{1,\alpha}\delta(|r - r_0|). \tag{9}$$

Ищем компоненты вектора $\mathbf{\Pi}_d^{э}$ в виде

$$\Pi_{d,x}^{э} = d_{1,x}\cdot f_{1,x};\quad \Pi_{d,y}^{э} = d_{1,y}\cdot f_{1,y};\quad \Pi_{d,z}^{э} = d_{1,z}\cdot f_{1,z}, \tag{10}$$

где функции $f_{1,x}$, $f_{1,y}$ и $f_{1,z}$ удовлетворяют волновому уравнению (3), однако для построения этих функций следует брать разные системы ортонормированных в интервалах $0 \leqslant x \leqslant d$ и $0 \leqslant y \leqslant h$ собственных функций прямоугольного волновода. Выбор этих функций производится таким образом, чтобы поля, определяемые через потенциалы Герца с помощью соотношений (6) удовлетворяли требуемым граничным условиям на поверхности волновода.

Построим, например, функцию $f_{1,x}$. В качестве собственных функций волновода выбираем $\cos\frac{m\pi}{d}x$ и $\sin\frac{n\pi}{h}y$.

Замечая, что

$$\delta(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ik_3z}dk_3, \tag{11}$$

ищем $f_{1,x}$ в виде

$$f_{1,x}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{k_3}e^{-ik_3z}dk_3.$$

Тогда из уравнений (3) находим, что

$$f_{1,x}=\frac{16\pi}{dh}\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\cos\frac{m\pi}{d}x_0\cos\frac{m\pi}{d}x\sin\frac{n\pi}{h}y_0\times$$

$$\times\sin\frac{n\pi}{h}y\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik_3z}dk_3}{k_3^2-\left[k^2\varepsilon_1\mu_1-\left(\frac{m\pi}{d}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2\right]}.$$

При вычислении интегралов под знаком суммы предположим, что среда, заполняющая волновод, обладает потерями. Это значит, что величина ε_1 комплексна и полюсы подынтегрального выражения не лежат на оси интегрирования. Применяя теорему о вычетах, находим, что

$$f_{1,x}=-\frac{8\pi i}{dh}\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_{m,n}}\left[\cos\frac{\pi m}{d}x_0\sin\frac{\pi n}{h}y_0\cos\frac{\pi m}{d}x\sin\frac{\pi n}{h}y\right]e^{i\beta_{mn}z} \tag{12}$$

при $z<0$ (отраженная волна) и

$$f_{1,x}=\frac{8\pi i}{dh}\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_{mn}}\left[\cos\frac{\pi m}{d}x_0\sin\frac{\pi n}{h}y_0\cos\frac{\pi m}{d}x\sin\frac{\pi n}{h}y\right]e^{-i\beta_{mn}z} \tag{13}$$

при $z>0$ (прошедшая волна). Остальные функции строятся аналогично, так что при $z<0$ имеем

$$f_{1,y}=-\frac{8\pi i}{dh}\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_{mn}}\left[\sin\frac{\pi m}{d}x_0\cos\frac{\pi n}{h}y_0\sin\frac{\pi m}{d}x\cos\frac{\pi n}{h}y\right]e^{i\beta_{mn}z}, \tag{14}$$

$$f_{1,z}=-\frac{8\pi i}{dh}\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_{mn}}\left[\sin\frac{\pi m}{d}x_0\sin\frac{\pi n}{h}y_0\sin\frac{\pi m}{d}x\sin\frac{\pi n}{h}y\right]e^{i\beta_{mn}z}. \tag{15}$$

Компоненты магнитного потенциала Герца $\Pi_d^м$ находятся подобно компонентам $\Pi_d^э$. Полагая

$$\Pi^м_{d,x}=d_{2,x}f_{2,x};\ \Pi^м_{d,y}=d_{2,y}f_{2,y};\ \Pi^м_{d,z}=d_{2,z}f_{2,z} \tag{16}$$

из уравнения (6), находим следующие выражения для функций $f_{2,x}$, $f_{2,y}$ и $f_{2,z}$:

$$f_{2,x}=f_{1,y};\ f_{2,y}=f_{1,x}; \tag{17}$$

$$f_{2,z}=-\frac{8\pi i}{dh}\sum_{m,\,n=0}^{\infty}\frac{1}{\beta_{mn}}\left[\cos\frac{\pi m}{d}x_0\cos\frac{\pi n}{h}y_0\cos\frac{\pi m}{d}x\cos\frac{\pi n}{h}y\right]e^{i\beta_{mn}z}. \tag{18}$$

С помощью уравнений (6) можно теперь построить выражение для отраженной волны. Для y-й компоненты отраженной волны будем иметь следующее выражение

$$E_y(x, y, z) = \sum_{m, n=0}^{\infty} E_{y, mn} \sin\frac{\pi m}{d} x \cos\frac{\pi n}{h} y e^{i\beta_{mn} z}, \tag{19}$$

где

$$E_{y, mn} = -\frac{8\pi i}{\beta_m dh}\Big[d_{1, y} \sin\frac{\pi m}{d} x_0 \cos\frac{\pi n}{h} y_0 \left(k^2\varepsilon_1\mu_1 - \frac{\pi^2 n^2}{h^2}\right) -$$
$$- \frac{\pi^2 mn}{dh} d_{1, x} \cos\frac{\pi m}{d} x_0 \sin\frac{\pi n}{h} y_0 + \frac{\pi m i}{d} \beta_{mn} d_{1, z} \sin\frac{\pi m}{d} x_0 \sin\frac{\pi n}{h} y_0 +$$
$$+ k\mu_1\beta_{mn} d_{2, x} \sin\frac{\pi m}{d} x_0 \cos\frac{\pi n}{h} y_0 - ik\mu_1 d_{2z} \frac{\pi m}{d} \cos\frac{\pi m}{d} x_0 \cos\frac{\pi n}{h} y_0\Big]. \tag{20}$$

Следует отметить, что отраженная волна имеет вид суперпозиции бесконечного числа волн лишь формально. В действительности поле в волновой зоне, т. е. на больших расстояниях от рассеивающего тела (порядка нескольких длин волн) будет иметь вид конечной суммы, так как в виду дисперсионного уравнения не затухнут лишь такие волны, для которых

$$\left(\frac{\pi m}{d}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 < k^2\varepsilon_1\mu_1. \tag{21}$$

В частности, если частота падающей волны такова, что в волноводе может распространяться лишь основная TE-волна, то и отраженная (прошедшая) волна на больших расстояниях будет состоять из одной основной TE-волны.

Предположим теперь, что рассеивающим телом является эллипсоид, главные направления которого OX, OY и OZ составляют некоторые углы с осями координат x, y и z, связанными с волноводом. Пусть координаты центра эллипсоида есть x_0, y_0 и 0. Тогда компоненты падающей волны в точке $x = x_0$, $y = y_0$ и $z = 0$ равны

$$\mathrm{H}_z = \mathrm{H}_0 \cos\frac{\pi x_0}{d}, \quad \mathrm{H}_x = \frac{i\beta_{10}}{k_1} \mathrm{H}_0 \sin\frac{\pi x_0}{d},$$
$$\mathrm{E}_y = -\frac{ik}{k_1} \mathrm{H}_0 \sin\frac{\pi x_0}{d}, \quad k_1 = \frac{\pi}{d}. \tag{22}$$

Соответствующие компоненты полей в системе координат, связанной с эллипсоидом, имеют вид

$$\begin{aligned} \mathrm{E}'_x &= \alpha_{12}\mathrm{E}_y, & \mathrm{H}'_x &= \alpha_{11}\mathrm{H}_x + \alpha_{13}\mathrm{H}_z, \\ \mathrm{E}'_y &= \alpha_{22}\mathrm{E}_y, & \mathrm{H}'_y &= \alpha_{21}\mathrm{H}_x + \alpha_{23}\mathrm{H}_z, \\ \mathrm{E}'_z &= \alpha_{32}\mathrm{E}_y, & \mathrm{H}'_z &= \alpha_{31}\mathrm{H}_x + \alpha_{33}\mathrm{H}_z, \end{aligned} \tag{23}$$

где α_{ik} — косинус угла между осями i и k системы координат, связанной с эллипсоидом и системой координат, связанной с волноводом. Следовательно, внутреннее поле будет теперь определяться соотношениями (1) — (2), где свободные члены заданы формулами (23).

Возвращаясь к системе координат, связанной с волноводом, находим следующие выражения для внутреннего поля эллипсоида:

$$\mathrm{E}_i^{(0)} = \sum_{k, l} A_{kl}\alpha_{kl}\alpha_{l2}\mathrm{E}_y,$$

$$H_l^{(0)} = \sum_{k,l} B_{kl}\alpha_{kl}(\alpha_{l1}H_x + \alpha_{l3}H_z). \tag{24}$$

Следовательно, дипольные моменты, индуцированные в эллипсоиде падающей волной, равны (m, n, r равны попеременно x, y и z)

$$d_{1,l} = \frac{V}{4\pi}\sum_{m,n,r=1}^{3}\left(\frac{\varepsilon_{lm}}{\varepsilon_1} - \delta_{lm}\right)A_{nr}\alpha_{nm}\alpha_{r2}E_y \tag{25}$$

$$d_{2,l} = \frac{V}{4\pi}\sum_{m,n,r=1}^{3}\left(\frac{\mu_{lm}}{\mu_1} - \delta_{lm}\right)B_{nr}\alpha_{nm}(\alpha_{r1}H_x + \alpha_{r3}H_z), \tag{26}$$

где $V = \frac{4\pi}{3}abc$ — объем эллипсоида, $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — матрицы рассеяния [3].

Эти соотношения позволяют теперь построить выражение для отраженной волны. Отраженная волна на частотах, когда может распространяться лишь основная TE-волна (H_{10}; $m = 1$, $n = 0$) согласно (20) определяется лишь тремя компонентами дипольных моментов d_{1y}, d_{2x}, и d_{2z}. Коэффициент отражения η определим как отношение амплитуды отраженной волны к амплитуде падающей волны. В рассматриваемом случае он равен

$$\eta = \frac{E_{y\,\text{отр}}}{E_{y\,\text{пад}}} = \frac{8\pi}{\beta_{10}dhE_{y,\,\text{пад}}}\left\{d_{1,y}k^2\varepsilon_1\mu_1\sin\frac{\pi x_0}{d} + \right.$$
$$\left. + k\mu_1\beta_{10}d_{2,x}\sin\frac{\pi x_0}{d} - ik\mu_1\frac{\pi}{d}d_{2,z}\cos\frac{\pi x_0}{d}\right\}. \tag{27}$$

Полученные формулы решают поставленную задачу в весьма общем виде. Поэтому рассмотрим ряд частных случаев, представляющих наибольший практический интерес. Если рассеивающий эллипсоид изготовлен из изотропного диэлектрика и его магнитная проницаемость равна единице, то вектор d_1 направлен по внутреннему полю, а вектор d_2 равен нулю. В этом случае формула (25) значительно упрощается, так как пропадает два суммирования, и выражение для вектора $\vec{d}_1$ принимает вид:

$$d_{1,l} = \frac{V}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right)\left\{\frac{\alpha_{1l}\alpha_{12}}{1 + \frac{I_1'}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right)} + \frac{\alpha_{2l}\alpha_{22}}{1 + \frac{I_2'}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\alpha_{3l}\alpha_{32}}{1 + \frac{I_3'}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right)}\right\}E_{y\,\text{пад}}. \tag{28}$$

Наконец, если предположить, что эллипсоид не произвольно ориентирован относительно осей волновода, а, например, главное направление OX совпадает с координатной осью x, а направления OY и OZ образуют угол ϑ с осями координат y и z, то величина $d_{1,y}$ окажется равной:

$$d_{1,y} = \frac{V}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right)\left\{\frac{\cos^2\vartheta}{1 + \frac{I_2'}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right)} + \frac{\sin^2\vartheta}{1 + \frac{I_3'}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right)}\right\}E_{y\,\text{пад}}.$$

Коэффициент отражения в первом случае равен

$$\eta=\frac{2Vk^2\varepsilon_1\mu_1}{\beta_{10}dh}\sin\frac{\pi x_0}{d}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-1\right)\left\{\frac{\alpha_{12}^2}{1+\frac{l_1'}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-1\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_{22}^2}{1+\frac{l_2'}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-1\right)}+\frac{\alpha_{32}^2}{1+\frac{l_3'}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-1\right)}\right\} \tag{29}$$

и принимает особенно простой вид во втором случае

$$\eta=\frac{2Vk^2\varepsilon_1\mu_1}{\beta_{10}dh}\sin\frac{\pi x_0}{d}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-1\right)\left\{\frac{\cos^2\vartheta}{1+\frac{l_2'}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-1\right)}+\frac{\sin^2\vartheta}{1+\frac{l_3'}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-1\right)}\right\}. \tag{30}$$

Следовательно, коэффициент отражения прямо пропорционален частоте поля, объему эллипсоида и фазовой скорости волны в волноводе $v_\phi=\frac{\omega}{\beta_0}$. Он максимален, если центр эллипсоида расположен на оси волновода и убывает по синусоидальному закону при смещении с оси.

Воспользовавшись формулами для l', запишем выражения для коэффициента отражения в случаях, когда рассеивающим телом является эллипсоид вращения. В случае вытянутого эллипсоида вращения ($a>b=c$) η имеет вид

$$\eta=\frac{2Vk^2\varepsilon_1\mu_1}{\beta_{10}dh}\sin\frac{\pi x_0}{d}\left\{\frac{\alpha_{12}^2}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon-\varepsilon_1}+\frac{ab^2}{(a^2-b^2)^{3/2}}\left[\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right]}+\right.$$
$$\left.+\frac{1-\alpha_{12}^2}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon-\varepsilon_1}+\frac{ab^2}{2(a^2-b^2)^{3/2}}\left[\frac{a}{b^2}\sqrt{a^2-b^2}-\ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]}\right\}, \tag{31}$$

тогда как в случае сплющенного эллипсоида вращения ($a=c>b$) коэффициент отражения η равен

$$\eta=\frac{2Vk^2\varepsilon_1\mu_1}{\beta_{10}dh}\sin\frac{\pi x_0}{d}\times$$
$$\times\left\{\frac{1-\alpha_{22}^2}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1-\varepsilon}+\frac{a^2b}{2(a^2-b^2)^{3/2}}\left(\arccos\frac{b}{a}-\frac{b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha_{22}^2}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1-\varepsilon}+\frac{a^2b}{(a^2-b^2)^{3/2}}\left(\frac{1}{b}\sqrt{a^2-b^2}-\arccos\frac{b}{a}\right)}\right\}. \tag{32}$$

Если же рассеивающим телом является шар радиуса a, то η равно

$$\eta=\frac{6Vk^2\varepsilon_1\mu_1}{\beta_{10}dh}\frac{\varepsilon-\varepsilon_1}{\varepsilon+2\varepsilon_1}\sin\frac{\pi x_0}{d}. \tag{33}$$

Относительно соотношения (33) можно сделать следующее замечание. Ранее было показано [4], что когда шар изготовлен из диэлектрика с высокой диэлектрической проницаемостью, в формуле (33) вместо ε следует писать $\varepsilon_p=\varepsilon F$, где $F(ka\sqrt{\varepsilon})$ некоторая функция, существенно зависящая от частоты и радиуса шара. Эта функция может изменяться в широких пределах, принимая положительные и отрицательные значения и коэффициент отражения может быть большим, даже если диаметр шара достаточно мал. На резонансных частотах формула (33) вообще оказывается неприменимой, так как поле внутри шара принимает большие значения и задача становится существенно нестационарной. Кроме того, в этом случае необходимо учитывать и вектор $\mathbf{d}_2$, который будет неравен нулю, так как эффективная проницаемость $\mu_p = \mu_1 F$ будет отлична от единицы.

Полагая в формуле (28) $\varepsilon \to \infty$, получим i-ю составляющую дипольного момента, индуцированного в металлическом эллипсоиде падающей волной. Поэтому в общем случае трехосного эллипсоида коэффициент отражения равен

$$\eta = \frac{16\pi k^2 \varepsilon_1 \mu_1}{3dh\beta_{10}} \sin\frac{\pi x_0}{d}\left(\frac{\alpha_{12}^2}{I_1} + \frac{\alpha_{22}^2}{I_2} + \frac{\alpha_{32}^2}{I_3}\right), \tag{34}$$

где

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)R(s)}, \quad I_2 = \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)R(s)}, \quad I_3 = \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)R(s)},$$

$$R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}.$$

В случае вытянутого эллипсоида вращения соотношение (34) принимает вид

$$\eta = \frac{8\pi k^2 \varepsilon_1 \mu_1}{3dh\beta_{10}} \sin\frac{\pi x_0}{d} \times \left\{ \frac{\alpha_{12}^2 a (a^2-b^2)^{3/2}}{a \ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} - \sqrt{a^2-b^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\left(1-\alpha_{12}^2\right) b^2 (a^2-b^2)^{3/2}}{a\sqrt{a^2-b^2} - b^2 \ln\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}} \right\}, \tag{35}$$

а в случае сплющенного эллипсоида вращения

$$\eta = \frac{8\pi k^2 \varepsilon_1 \mu_1}{3dh\beta_{10}} \sin\frac{\pi x_0}{d} \times \left\{ \frac{2\left(1-\alpha_{22}^2\right)(a^2-b^2)^{3/2}}{\arccos\frac{b}{a} - \frac{b}{a^2}\sqrt{a^2-b^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_{22}^2 (a^2-b^2)^{3/2} b}{\sqrt{a^2-b^2} - b \arccos\frac{b}{a}} \right\} \tag{36}$$

и, наконец, в случае шара

$$\eta = \frac{8\pi k^2 \varepsilon_1 \mu_1}{dh\beta_{10}} a^3 \sin\frac{\pi x_0}{d}. \tag{37}$$

Полагая в формуле (34) одну из полуосей эллипсоида равной нулю, получим выражение для коэффициента отражения от эллиптического диска. Например, при $a = 0$ будем иметь

$$\eta = \frac{16\pi k^2 \varepsilon_1 \mu_1}{3dh\beta_{10}} \sin\frac{\pi x_0}{d}\left(\frac{\alpha_{22}^2}{J_2} + \frac{\alpha_{32}^2}{J_3}\right), \tag{38}$$

где

$$J_2 = \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)\sqrt{s(b^2+s)(c^2+s)}},$$

$$J_3 = \int_0^{\infty} \frac{ds}{(c^2+s)\sqrt{s(b^2+s)(c^2+s)}}.$$

Если в формуле (35) положить $b \ll a$, то получим выражение для коэффициента отражения от тонкого металлического стержня длины $l = 2a$ (металлический диполь)

$$\eta = \frac{8\pi k^2 \varepsilon_1 \mu_1}{3dh\beta_{10}} \sin\frac{\pi x_0}{d} \frac{\alpha_{12}^2 a^3}{\ln\frac{2a}{b}}. \tag{39}$$

Наконец, если принять в формуле (36) $b = 0$, то получим выражение для коэффициента отражения от бесконечно тонкого металлического кругового диска радиуса a

$$\eta = \frac{32\,k^2 \varepsilon_1 \mu_1}{3dh\mu_2} \sin\frac{\pi x_0}{d} a^3 \,(1 - \alpha_{22}^2). \tag{40}$$

Рассмотрим теперь отражение электромагнитных волн от полого диэлектрического шара.

Предположим, что рассеивающим телом является диэлектрический шар радиуса a, характеризуемый проницаемостью ε_3, и покрытый сверху диэлектрическим слоем толщины $b - a$ с диэлектрической проницаемостью ε_2. Внутреннее поле в таком шаре, помещенном во внешнее однородное поле, легко определить, пользуясь обычными приемами электростатики [6]. После несложных вычислений для поля во внутренней полости находим следующее выражение:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{9\varepsilon_1\varepsilon_2}{(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)(2\varepsilon_2+\varepsilon_3) - 2\frac{a^3}{b^3}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)} \mathbf{E}_{\text{вн}},$$

$$(0 \leqslant r \leqslant a)$$

где ε_1 — проницаемость окружающего пространства, b — радиус наружного слоя. Поле в диэлектрическом слое определяется соотношением

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{A}\mathbf{E}_{\text{вн}} + \mathbf{B}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{E}_{\text{вн}}}{r},$$

$$(a \leqslant r \leqslant b)$$

где

$$A = \frac{3\varepsilon_1}{(2\varepsilon_1+\varepsilon_2) + 2\frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{\varepsilon_3-\varepsilon_2}{2\varepsilon_2+\varepsilon_3}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}; \qquad B = a^3\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{2\varepsilon_2+\varepsilon_3}A.$$

Следовательно,

$$\mathbf{d}_1 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1\right)\left(A\mathbf{E}_{\text{вн}} + B\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{E}_{\text{вн}}}{r}\right)dV + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{V_1}\left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} - 1\right)\mathbf{E}_1\,dV,$$

где интегрирование в первом интеграле распространяется на шаровой слой с внутренним и внешним радиусами a и b, а второй интеграл вычисляется по объему шара радиуса a. Легко видеть, что в силу сферической симметрии шара интеграл от $\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{E}}{r}$ равен нулю, так что окончательное выражение для дипольного момента рассматриваемого тела имеет вид

$$d_{1y} = \frac{(2\varepsilon_2+\varepsilon_3)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(b^3-a^3) + 3\varepsilon_2(\varepsilon_3-\varepsilon_1)a^3}{(2\varepsilon_1+\varepsilon_2)(2\varepsilon_2+\varepsilon_3) - 2\frac{a^3}{b^3}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)} \mathbf{E}_{\text{вн}}. \tag{41}$$

Теперь легко построить уравнение для коэффициента отражения от рассматриваемого тела при различных его положениях в волноводе.

Рассмотрим отражение электромагнитных волн от малых тел внутри цилиндрического волновода радиуса R. Заметим, прежде всего, что эта задача является более сложной, чем соответствующая задача для прямоугольного волновода. Действительно, в случае прямоугольного волновода дисперсионное уравнение для волн электрического и магнитного типа имеет один и тот же вид. В цилиндрическом волноводе дисперсионные свойства волн электрического типа определяются корнями функции Бесселя, тогда как дисперсионные свойства волн магнитного типа определяются корнями производной от функции Бесселя. В результате построение выражений для потенциалов Герца оказывается очень усложненным, поэтому рассмотрим наиболее простой случай, когда рассеивающее тело находится на оси волновода и оно изотропно. Тогда единственной отличной от нуля компонентой поля падающей волны будет E_z компонента. Следовательно, и дипольный момент, индуцированный в рассеивающем теле, будет направлен по оси волновода. Рассеянное поле будет выражаться лишь продольной компонентой электрического потенциала Герца, которая определяется уравнением

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial \Pi_z^э}{\partial r}+\frac{\partial^2 \Pi_z^э}{\partial z^2}+k^2\varepsilon_1\mu_1\Pi_z^э=-4\pi d_{1,z}\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0'|).$$

Ищем $\Pi_z^э$ в виде

$$\Pi_z^э=d_{1,z}f_{1,z}.$$

Тогда для функции $f_{1,z}$ будем иметь следующее выражение:

$$f_{1,z}=\frac{2i}{R^2}\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\alpha_\tau^0\frac{r}{R}\right)}{\beta_{\tau 0}J_1^2(\alpha_\tau^0)}e^{-i\beta_{\tau 0}z}$$

при $z>0$ и

$$f_{1,z}=-\frac{2i}{R^2}\cdot\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\alpha_\tau^0\frac{r}{R}\right)}{\beta_{\tau 0}J_1^2(\alpha_\tau^0)}e^{i\beta_{\tau 0}z}$$

$$J_0(\alpha_\tau^0)=0,$$

при $z<0$.

Воспользовавшись полученными ранее выражениями для дипольных моментов различных тел эллипсоидальной формы, легко теперь построить выражение для коэффициента отражения. В общем случае он имеет вид

$$\eta=\frac{E_{z\,отр}}{E_{z\,пад}}=\frac{2d_{1,z}}{R^2E_{z\,пад}}\cdot\sum_{\tau=1}^{\infty}\frac{(\alpha_\tau^0)^2}{\beta_{\tau 0}J_1^2(\alpha_\tau^0)}|e^{i\beta_{\tau 0}z}|, \tag{42}$$

где α_τ^0—τ-й корень функции Бесселя нулевого порядка. Остальные вычисления аналогичны тем, которые приведены выше для прямоугольных волноводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Купрадзе. Граничные задачи теории колебаний. Гостехиздат, М., 1950.
2. К. С. Шифрин. Рассеяние света в мутной среде. Гостехтеориздат, М. — Л., 1951.
3. Н. А. Хижняк. ЖТФ, 28, 7, 1958.
4. Н. А. Хижняк. ЖТФ. 27, 2014, 1957.
5. Н. А. Хижняк. Сб. «Радиотехника», вып. I, Изд-во ХГУ, 127, 1965.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1960.