РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГИБРИДНЫХ ВОЛН В КОЛЬЦЕВОМ ВОЛНОВОДЕ

В. А. Барегамян

Постановка задачи

Распространению электромагнитных волн в кольцевом волноводе посвящено ряд работ [1—4]. В работе [1] методом усредненных граничных условий рассмотрено распространение E и H-волн в кольцевом волноводе, находящемся в свободном пространстве. Работы [2—4] посвящены строгому решению задачи о распространении симметричных и несимметричных волн в такой системе, находящейся как в свободном пространстве, так и в диэлектрической среде. Дисперсионные уравнения исследуемых систем, полученные сведением краевой задачи электродинамики к задаче Римана — Гильберта теории функций комплексного переменного, представляют собой бесконечный определитель, равенство нулю которого дает зависимость искомой постоянной распространения от параметров волновода, среды и распространяющейся волны.

Рассмотрим кольцевой волновод, состоящий из системы металлических идеальнопроводящих колец, изолированных друг от друга. Радиус колец — a; длина их $l-d$; d — расстояние между кольцами; l — период системы.

Кольцевой волновод заполнен одноосным кристаллом, ось которого направлена вдоль оси волновода. Диэлектрическая проницаемость такого кристалла в цилиндрической системе координат, ось которой совпадает с осью z, имеет вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon' \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Радиус кристалла, заполняющего волновод, равен радиусу волновода. Волновод, в свою очередь, погружен во вторую изотропную среду с диэлектрической проницаемостью ε_2.

Для тензора диэлектрической проницаемости первой среды $\hat{\varepsilon}$, которая имеет вид

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}' + i\hat{\varepsilon}'' \tag{2}$$

полученные результаты будут правильными для случая, когда ε' и ε'' в данной цилиндрической системе координат являются диагональными, а также одновременно выполняются условия $\varepsilon'_{\varphi\varphi} = \varepsilon'_{rr}$ и $\varepsilon''_{\varphi\varphi} = \varepsilon''_{rr}$.

В работе [4] решена задача о распространении симметричных волн в такой системе при $\varepsilon_2 = 1$.

Здесь рассмотрим распространение несимметричных волн в кольцевом волноводе с анизотропной средой.

Поля и граничные условия задачи

Компоненты электромагнитного поля имеют следующий вид:

$$f(r, \varphi, z) = e^{i\xi\varphi} e^{i\beta_0 z} f_1(r, z) e^{-i\omega t}. \tag{3}$$

Как в [2], множитель $e^{i\beta_0 z}$ обеспечивает набег фаз при распространении волн вдоль $z > 0$; так что функции $f(r, \varphi, z)$ при замене z на $z + l$ должны удовлетворять соответствующим граничным условиям. При такой замене, как видно из (3), функция $f(r, \varphi, z)$ приобретает числовой множитель $e^{i\beta_0 l}$. Для определенности можно брать $R_e\beta_0$ в интервале $\left[0, \frac{2\pi}{l}\right]$. Функции f_1 разложить в ряд Фурье

$$f_1(r, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{i\frac{2\pi n}{l} z}. \tag{4}$$

Из уравнений Максвелла получим волновые уравнения в кристалле для магнитных ($E_z = 0$) и электрических ($H_z = 0$) волн соответственно

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k_0^2\varepsilon_0 H_z = 0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_0}\frac{d^2 E_z}{dz^2} + k_0^2\varepsilon_e E_z = 0. \tag{6}$$

Используя тот факт, что компоненты поля зависят от φ и z по функциям (3), (4) перепишем волновое уравнение (5) для магнитных волн относительно Фурье компонент поля в следующем виде:

$$\frac{d^2 H_{nz}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH_{nz}}{dr} + \left(\varepsilon_0 k_0^2 - \gamma_n^2 - \frac{\xi^2}{r^2}\right) H_{nz} = 0. \tag{7}$$

Аналогично запишем это уравнение для волн электрического типа

$$\frac{d^2 E_{nz}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE_{nz}}{dr} + \left(\varepsilon_e k_0^2 - \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_0}\gamma_n^2 - \frac{\xi^2}{r^2}\right) E_{nz} = 0, \tag{8}$$

где $\gamma_n = \beta_0 + \frac{2\pi}{l} n$, а азимутальное волновое число ξ принимает значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Уравнения (7) и (8) являются дифференциальными уравнениями Бесселя ξ-порядка.

Как известно, общие решения уравнений (7) и (8) можно записать в виде

$$H_{nz} = b_n \Gamma_{n0}^2 I_\xi(\Gamma_{n0} r) + b'_n N_\xi(\Gamma_{n0} r)$$

$$E_{nz} = a_n \Gamma_{n0}^2 I_\xi(\Gamma_{ne} r) + a'_n N_\xi(\Gamma_{ne} r),$$

где I_ξ — функция Бесселя ξ — ξ-го порядка первого рода, а N_ξ — функция Неймана ξ-порядка.

Для области внутри волновода эти формулы запишутся так:

$$H_{nz} = b_n \Gamma_{n0}^2 I_\xi (\Gamma_{n0} r), \tag{9}$$

$$E_{nz} = a_n \Gamma_{n0}^2 I_\xi (\Gamma_{ne} r). \tag{10}$$

Остальные компоненты E_r, E_φ, H_r, H_φ волн магнитного типа, как и компоненты H_r, H_φ, E_r, E_φ волн электрического типа определяются из уравнений Максвелла.

Как будет показано ниже, несимметричные волны в кольцевом волноводе не разделяются на волны двух типов. Они связаны друг с другом граничными условиями и имеют гибридный характер.

Эти компоненты для анизотропной среды, определяемой тензором (1), выражаются формулами

$$\begin{aligned}
E_{n\varphi} &= -\frac{\xi\gamma_n}{\Gamma_{n0}^2 r} E_{nz} - \frac{ik_0}{\Gamma_{n0}^2}\frac{\partial H_{nz}}{\partial r};\\
E_{nr} &= -\frac{\xi k_0}{\Gamma_{n0}^2 r} H_{nz} + \frac{i\gamma_n}{\Gamma_{n0}^2}\frac{\partial E_{nz}}{\partial z};\\
H_{n\varphi} &= -\frac{\xi\gamma_n}{\Gamma_{n0}^2 r} H_{nz} + \frac{i\varepsilon_0 k_0}{\Gamma_{n0}^2}\frac{\partial E_{nz}}{\partial r};\\
H_{nr} &= \frac{\xi\varepsilon_0 k_0}{\Gamma_{n0}^2 r} E_{nz} + \frac{i\gamma_n}{\Gamma_{n0}^2}\frac{\partial H_{nz}}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{11}$$

В формулах (9 — 11)

$$\Gamma_{n0} = \sqrt{\varepsilon_0 k_0^2 - \gamma_n^2}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c} \tag{12}$$

c — скорость света в вакууме, ω — циклическая частота колебаний.

Воспользовавшись соотношениями (9) и (10), и, подставив их в правую часть уравнения (11), получим для суммарного поля внутри волновода:

$$\begin{aligned}
E_{z1} &= e^{i\xi\varphi} e^{i\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{n0}^2 a_n I_\xi (\Gamma_{ne} r)\, e^{i\frac{2\pi n}{l} z};\\
E_{\varphi 1} &= e^{i\xi\varphi} e^{i\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\xi\gamma_n}{r} I_\xi (\Gamma_{ne} r) - i k_0 \Gamma_{n0} b_n I'_\xi (\Gamma_{n0} r)\right] e^{i\frac{2\pi n}{l} z};\\
E_{z1} &= e^{i\xi\varphi} e^{i\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\xi k_0}{r} b_n I_\xi (\Gamma_{n0} r) + i\gamma_n \Gamma_{ne} a_n I_\xi (\Gamma_{ne} r)\right] e^{i\frac{2\pi n}{l} z};\\
H_{z1} &= e^{i\xi\varphi} e^{i\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{n0}^2 b_n I_\xi (\Gamma_{n0} r)\, e^{i\frac{2\pi n}{l} z};\\
H_{\varphi 1} &= e^{i\xi\varphi} e^{i\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{\varepsilon\gamma_n}{r} b_n I_\xi (\Gamma_{n0} r) + i\varepsilon_0 k_0 \Gamma_{ne} a_n I'_\xi (\Gamma_{ne} r)\right] e^{i\frac{2\pi n}{l} z};\\
H_{r1} &= e^{i\xi\varphi} e^{i\beta_0 z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\xi\varepsilon_0 k_0}{r} a_n I_\xi (\Gamma_{ne} r) + i\gamma_n \Gamma_{n0} b_n I'_\xi (\Gamma_{n0} r)\right] e^{i\frac{2\pi n}{l} z}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Вне волновода имеем

$$\begin{aligned} H_{nz} &= d_n\Gamma_{n2}^2 H_\xi^{(1)}(\Gamma_{n2}r); \\ E_{nz} &= c_n\Gamma_{n2}^2 H_\xi^{(1)}(\Gamma_{n2}r). \end{aligned} \tag{14}$$

Суммарное поле в изотропной среде, окружающей волновод, запишем в виде

$$E_{z2} = e^{i\xi\varphi}e^{i\beta_0 z}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\Gamma_{n2}^2 H_\xi^{(1)}(\Gamma_{n2}r)\, e^{i\frac{2\pi n}{l}z}$$

$$E_{\varphi 2} = e^{i\xi\varphi}e^{i\beta_0 z}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-\frac{\xi\gamma_n}{r}c_n H_\xi^{(1)}(\Gamma_{n2}r) - ik_0\Gamma_{n2}d_n H_\xi^{(1)\prime}(\Gamma_{n2}r)\right]e^{i\frac{2\pi n}{l}z}$$

$$E_{r2} = e^{i\xi\varphi}e^{i\beta_0 z}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-\frac{\xi k_0}{r}d_n H_\xi^{(1)}(\Gamma_{n2}r) + i\gamma_n\Gamma_{n2}c_n H_\xi^{(1)\prime}(\Gamma_{n2}r)\right]e^{i\frac{2\pi n}{l}z}$$

$$H_{z2} = e^{i\xi\varphi}e^{i\beta_0 z}\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n\Gamma_{n2}^2 H_\xi^{(1)}(\Gamma_{n2}r)\, e^{i\frac{2\pi n}{l}z} \tag{15}$$

$$H_{\varphi 2} = e^{i\xi\varphi}e^{i\beta_0 z}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[-\frac{\xi\gamma_n}{r}d_n H_\xi^{(1)}(\Gamma_{n2}r) + i\varepsilon_2 k_0\Gamma_{n2}c_n H_\xi^{(1)\prime}(\Gamma_{n2}r)\right]e^{i\frac{2\pi n}{l}z}$$

$$H_{r2} = e^{i\xi\varphi}e^{i\beta_0 z}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{\xi\varepsilon_2 k_0}{r}c_n H_\xi^{(1)}(\Gamma_{n2}r) + i\gamma_n\Gamma_{n2}d_n H_\xi^{(1)\prime}(\Gamma_{n2}r)\right]e^{i\frac{2\pi n}{l}z}.$$

В формулах (9—15)

$$\Gamma_{n2} = \sqrt{\varepsilon_2 k_0^2 - \gamma_n^2}. \tag{15a}$$

Граничные условия на поверхности волновода, т. е. при

$$\begin{aligned} &E_{z1} = E_{z2} = 0 \text{ — на металле,} \\ &E_{z1} = E_{z2} \text{ — на щели,} \\ &H_{\varphi 1} = H_{\varphi 2} \text{ — на щели.} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &E_{\varphi 1} = E_{\varphi 2} = 0 \text{ — на металле,} \\ &E_{\varphi 1} = E_{\varphi 2} \text{ — на щели,} \\ &H_{z1} = H_{z2} \text{ — на щели.} \end{aligned} \tag{17}$$

Кроме того, требуем, чтобы удовлетворялись граничные условия для нормальных составляющих магнитной и электрической индукции.

$$H_{r1} = H_{r2},\ D_{r1} = D_{r2} \tag{18}$$

или из последнего

$$\varepsilon_0 E_{r1} = \varepsilon_2 E_{r2}. \tag{19}$$

Использование условий (16) приводит к тому, что

$$c_n = \frac{\Gamma_{n0}^2}{\Gamma_{n2}^2}\frac{I_\xi(\Gamma_{n0}a)}{H_\xi^{(1)}(\Gamma_{n2}a)}a_n \tag{20}$$

$$d_n = \frac{\Gamma_{n0}}{\Gamma_{n2}}\frac{I_\xi'(\Gamma_{n0}a)}{H_\xi^{(1)\prime}(\Gamma_{n2}a)}b_n + \xi\frac{i\gamma_n}{k_0 a}\frac{\Gamma_{n0}^2 - \Gamma_{n2}^2}{\Gamma_{n2}^3}\frac{I_\xi(\Gamma_{n0}a)}{H_\xi^{(1)\prime}(\Gamma_{n2}a)}. \tag{21}$$

Как видно из этих формул, коэффициенты a_n и c_n несимметричных электрических волн связаны с коэффициентами b_n и d_n несимметричных магнитных волн, т. е. волны в кольцевом волноводе в общем случае не разделяются. А при $\xi = 0$ (симметричные волны) они разделяются на волны двух типов.

Следует обратить внимание на то, что множитель, стоящий перед коэффициентом a_n в формуле (21), стремится к нулю как $\frac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$, потому что, как следует из выражений (12) и (15а), $\Gamma_{n0}^2 - \Gamma_{n2}^2 = (\varepsilon_0 - \varepsilon_2) k_0^2$ является постоянной величиной. Что же касается множителя перед b_n в формуле (21), он стремится к постоянной величине при $n \to \infty$.

Отношение множителя перед коэффициентом a к множителю перед b_n стремится к нулю как $\frac{1}{n^2}$ при $n \to \infty$ в формуле (21).

Для несимметричных волн связь между коэффициентами Фурье компонент пространственных гармоник различных типов волн уменьшается как $\frac{1}{n^2}$ при увеличении номера n — пространственных гармоник*.

Граничные условия (16), кроме выражений (20) и (21) дают также системы уравнений относительно коэффициентов a_n и b_n.

Условно систему уравнений, определяющую a_n, назовем системой уравнений для волн типа H, а систему, определяющуюся b_n, системой для волн типа E.

Для волн типа E эта система имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Gamma_{n0}^2 I_\xi (\Gamma_{ne} a) e^{i\gamma_n z} = 0 \text{ (на металле)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon_2 \Gamma_{n0}^2 I_\xi (\Gamma_{ne} a) H_\xi^{(1)'} (\Gamma_{n2} a) - \varepsilon_0 \Gamma_{ne} \Gamma_{n2} I'_\xi (\Gamma_{ne} a) H'_\xi (\Gamma_{n2} a)}{\Gamma_{n2} H_\xi^{(1)'} (\Gamma_{n2} a)} - \right.$$

$$\left. - \xi^2 \frac{\gamma_n^2}{a^2} \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_2}{\Gamma_{n2}^3} \frac{H_\xi^{(1)} (\Gamma_{n2} a)}{H_\xi^{(1)'} (\Gamma_{n2} a)} \right] I_\xi (\Gamma_{ne} a) e^{i\gamma_n z} =$$

$$= - i\xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{a k_0} \frac{\Gamma_{n0} I'_\xi (\Gamma_{n0} a) H_\xi^{(1)} (\Gamma_{n2} a) - \Gamma_{n2} I_\xi (\Gamma_{n0} a) H_\xi^{(1)'} (\Gamma_{n2} a)}{\Gamma_{n2} H_\xi^{(1)} (\Gamma_{n2} a)} \times$$

$$\times e^{i\gamma_n z} \cdot b_n \text{ (на щели)}. \tag{22}$$

Для волн типа

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{n0} b_n I'_\xi (\Gamma_{n0} a) e^{i\gamma_n z} = - \xi \frac{i}{k_0 a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n a_n I_\xi (\Gamma_{ne} a) \cdot e^{i\gamma_n z} \text{ (на металле)},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{n0} \frac{\Gamma_{n2} I'_\xi (\Gamma_{n0} a) H_\xi^{(1)} (\Gamma_{n2} a) - \Gamma_{n0} I_\xi (\Gamma_{n0} a) H_\xi^{(1)'} (\Gamma_{n2} a)}{H_\xi^{(1)'} (\Gamma_{n2} a)} b_n e^{i\gamma_n z} =$$

$$= - \xi i \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_2) k_0}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\Gamma_{n2}} \frac{H_\xi^{(1)} (\Gamma_{n2} a)}{H_\xi^{(1)'} (\Gamma_{n2} a)} I_\xi (\Gamma_{ne} a) e^{i\gamma_n z} a_n \text{ (на щелях)}. \tag{23}$$

---

* Если волновод погружен в однородную среду ($\varepsilon_0 = \varepsilon_0 = \varepsilon_2 = \varepsilon$), то коэффициенты c_n и a_n электрических несимметричных волн не будут зависеть от коэффициентов d_n и b_n магнитных волн.

Исследование систем (22), (23)

Для удобства записи и для получения уравнений относительно безразмерных величин введем следующие обозначения:

$$\nu = \frac{\beta_0 l}{2\pi}, \quad \varkappa = \frac{k_0 l}{2\pi} = \frac{l}{\lambda_0}, \quad \Theta_n = \frac{l}{2\pi}\Gamma_{n0} I_\xi(\Gamma_{ne} a)$$

$$T_n = \frac{l}{2\pi}\Gamma_{n0} I'_\xi(\Gamma_{n0} a)\, b_n, \quad F_\xi(z) = \frac{H_\xi^{(1)\prime}(z)}{H_\xi^{(1)}(z)}, \quad f_\xi(z) = \frac{I'_\xi(z)}{I_\xi(z)}. \tag{24}$$

Дифференцируя второе уравнение (22) и первое уравнение (23) по z, получим с учетом обозначений (24) для волн типа E

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_{n0}\Theta_n e^{i\gamma_n z} = 0 \text{ (на металле)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \left[\varepsilon_2 \frac{\Gamma_{n0}}{\Gamma_{n2}} F_\xi(\Gamma_{n2} a) - \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}\, f_\xi(\Gamma_{ne} a) - \xi^2 \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_2)\gamma_n^2}{a^2 \Gamma_{n2}^3 \Gamma_{n0}} \cdot \frac{1}{F_\xi(\Gamma_{n2} a)}\right] \Theta_n e^{i\gamma_n z} =$$

$$= -i \frac{\xi}{k_0 a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n^2 \left[\frac{1}{\Gamma_{n2} F_\xi(\Gamma_{n2} a)} - \frac{1}{\Gamma_{n0} f_\xi(\Gamma_{n0} a)}\right] T_n e^{i\gamma_n z} \text{ (на щелях)} \tag{25}$$

и для волн типа H

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n T_n e^{i\gamma_n z} = \xi \frac{l}{k_0 a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n^2}{\Gamma_{n0}} \Theta_n e^{i\gamma_n z} \text{ (на металле)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Gamma_{n2}}{F_\xi(\Gamma_{n2} a)} - \frac{\Gamma_{n0}}{f_\xi(\gamma_{n0} a)}\right] T_n e^{i\gamma_n z} =$$

$$= -\xi i \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_2) k_0}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\Gamma_{n0}\Gamma_{n2}} \cdot \frac{1}{F_\xi(\Gamma_{n2} a)} \Theta_n e^{i\gamma_n z} \text{ (на щелях).} \tag{26}$$

Обозначим

$$t_n = \varepsilon_2 \frac{\Gamma_{n0}}{\Gamma_{n2}} F_\xi(\Gamma_{n2} a) - \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}\, f_\xi(\Gamma_{ne} a) - \xi^2 \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_2)\gamma_n^2}{a^2 \Gamma_{n2}^3 \Gamma_{n0}} \frac{1}{F_\xi(\Gamma_{n2} a)}$$

$$Z_n = (\nu + n) t_n \Theta_n, \quad X_n = (\nu + n) T_n,$$

$$\xi_n^E = \frac{|\nu + n|}{\nu + n} \left(\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}\right) \frac{1}{t_n} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varkappa^2}{(\nu + n)^2} - 1}, \tag{27}$$

$$\xi_n^H = \frac{1}{2} \frac{|\nu + n|}{\nu + n} \left[\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varkappa^2}{(\nu + n)^2} - 1}}{F_\xi(\Gamma_{n2} a)} - \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varkappa^2}{(\nu + n)^2} - 1}}{f_\xi(\Gamma_{n0} a)}\right],$$

$$\chi_n^E = 1 - \frac{|n|}{n} \xi_n^E, \quad \chi_n^H = 1 - \frac{|n|}{n} \xi_n^H.$$

В этих формулах и в дальнейшем принята формула записи для выражений Γ следующего вида:

$$\Gamma_{n0} = \frac{2\pi}{l} |\nu + n| \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varkappa^2}{(\nu + n)^2} - 1}.$$

Теперь уравнения (25), (26) запишем таким образом:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} Z_n e^{i\gamma_n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^E Z_n e^{i\gamma_n z} \text{ на (металле).} \tag{28}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n e^{i\gamma_n z} = -\xi \frac{i}{k_0 a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \left[\frac{1}{\Gamma_{n2} F_\xi(\Gamma_{n2} a)} - \frac{1}{\Gamma_{n0} f_\xi(\Gamma_{n0} a)}\right] X_n e^{i\gamma_n z}$$

(на щеля:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i\gamma_n z} = \xi \frac{i}{k_0 a} \frac{1}{\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n^2}{\Gamma_{n0}^2} \xi_n^E Z_n e^{i\gamma_n z} \text{ (на металле)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} X_n e^{i\gamma_n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^H X_n e^{i\gamma_n z} - \xi \frac{i(\varepsilon_0 - \varepsilon_2) k_0}{2a} \frac{1}{\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\Gamma_{n0}^2 \Gamma_{n2}} \frac{1}{F_\xi(\Gamma_{n2} a)} \xi_n^E Z_n e^{i\gamma_n z} \text{ (на щелях).} \quad (2$$

Используя рекуррентные формулы

$$I_\xi'(z) = \frac{\xi}{z} I_\xi(z) - I_{\xi+1}(z),$$

$$H_\xi^{(1)\prime}(z) = \frac{\xi}{z} H_\xi^{(1)}(z) - H_{\xi+1}^{(1)}(z),$$

можно записать

$$F_\xi(z) = \frac{\xi}{z} - \frac{H_{\xi+1}^{(1)}(z)}{H_\xi^{(1)}(z)}, \quad f_\xi(z) = \frac{\xi}{z} - \frac{I_{\xi+1}(z)}{I_\xi(z)}. \quad (3$$

Имея ввиду, что

$$I_\xi(ix) = i^\xi I_\xi(x), \quad H_\xi^{(1)}(ix) = i^{-\xi-1} K_\xi(x),$$

где I_ξ модифицированные функции Бесселя, K_ξ —функции Макдональд: при больших n получим

$$F_\xi(z) = i + O\left(\frac{\xi}{z}\right), \quad f_\xi = -i + O\left(\frac{\xi}{z}\right) \text{ при } (z) \gg 1 \quad (3$$

$$\xi \neq 0.$$

При помощи этих оценок можно показать, что χ_n^E и χ_n^H стремятся нулю как $\frac{1}{n^2}$.

Системы уравнений (28) и (29) приводятся теперь к задаче Римана Гильберта [5].

Обозначим

$$N_n = \frac{1}{k_0 a} \gamma_n \left[\frac{1}{\Gamma_{n2} F_\xi(\Gamma_{n2} a)} - \frac{1}{\Gamma_{n0} f_\xi(\Gamma_{n0} a)}\right],$$

$$M_n = \frac{i}{k_0 a} \frac{1}{\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}} \frac{\gamma_n^2}{\Gamma_{n0}^2}$$

$$K_n = \frac{i(\varepsilon_0 - \varepsilon_2) k_0}{2a} \frac{1}{\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_e}} \frac{\gamma_n}{\Gamma_{n2} \Gamma_{n0}^2 F_\xi(\Gamma_{n2} a)}. \quad (3$$

Системы (28) и (29) перепишем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} Z_n e^{i\gamma_n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^E Z_n e^{i\gamma_n z} \text{ (на металле)} \quad (3$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n e^{i\gamma_n z} = -\xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_n X_n e^{i\gamma_n z} \text{ (на щелях)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{i\gamma_n z} = \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n \xi_n^E Z_n e^{i\gamma_n z} \text{ (на металле)} \tag{34}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} X_n e^{i\gamma_n z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^H X_n e^{i\gamma_n z} - \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n \xi_n^E Z_n e^{i\gamma_n z} \text{ (на щелях).}$$

Эти системы будут полными совместно с дополнительными условиями, которые получаются из второго уравнения (22) и первого уравнения (23) при $y = \frac{l}{2}$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{X_m}{\nu + m} = \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\nu + n} M_n \xi_n^E Z_n \tag{35}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{Z_m}{\nu + m} = -\xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\nu + n} N_n X_n. \tag{36}$$

Используя [5], решение системы (33) запишем в виде

$$Z_m R_\sigma(v) + \xi N_m X_m R_\sigma(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^E Z_n K_m^n(v) +$$

$$+ \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} N_n X_n K_m^n(v) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{37}$$

где

$$K_m^n = R_\sigma V_m^n - R_m V_\sigma^n. \tag{38}$$

Коэффициенты R_σ, V_m^n, $R_m V_\sigma^n$ зависят от аргумента $v = \cos\frac{\pi(l-d)}{l} = -u$ и определяются формулами, приведенными в [6].

Решение системы (34) запишем в виде

$$X_m R_\sigma(u) - \xi M_m \xi_m^E Z_m R_\sigma(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} \chi_n^H X_n K_m^n(u) -$$

$$- \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|n|}{n} M_n \xi_n^E Z_n K_m^n(u) - \xi \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n \xi_n^E Z_n K_m^n(u). \tag{39}$$

В отличие от системы (37) здесь коэффициенты R_m, V_m^n, R_σ, V_σ^n зависят от аргумента $u = \cos\frac{\pi d}{l}$. Как видно из однородных систем (37) и (39) волны не разделяются на магнитную и электрическую и имеют гибридный характер.

Дисперсионные уравнения

Дисперсионное уравнение волновода, заполненного кристаллом (плазмой), получим, приравнивая нулю определитель этих двух систем. Ввиду того, что системы бесконечные, определитель этих систем тоже будет бесконечным. Чтобы получить дисперсионное уравнение конечного вида полагаем, что при больших n $(-N \leqslant n \leqslant N)$ параметры $\chi_n^E = \chi_n^H = 0$.

Итак, мы считаем, что волны, имеющие большие номера, чем N, не распространяются или, если распространяются, амплитуды их ничтожно малы.

Определитель усеченных систем имеет $2N+1$ столбцов и столько же строк.

Равенство нулю такого усеченного определителя дает приближенное дисперсионное уравнение. Для основной волны ($n=0$) дисперсионное уравнение имеет вид

$$\{[R_a(u)-K_0^0(u)]+\xi_0^H K_0^0(u)\}\{[R_a(v)-K_0^0(v)]+\xi_0^E K_0^0(v)\}= \\ =\xi^2 N_0\xi_0^E[R_a(v)-K_0^0(v)]\{K_0K_0^0(u)-M_0[R_a(u)-K_0^0(u)]\}, \quad (40)$$

где

$$R_a=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^m\frac{R_m}{\nu+m}=\frac{R_0}{\nu}+\sum_{m\neq 0}(-1)^m\frac{R_m}{\nu+m}=\frac{R_0}{\nu}+\tilde{R}_b. \quad (41)$$

$$K_0^0(u)=R_aV_0^0-R_aV_a^0=\tilde{R}_aV_0^0-R_0\tilde{V}_a^0=-\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{2} \quad (42)$$

$$R_0(-u)=R_0(u)=\frac{1}{2},\quad \tilde{R}_a-\tilde{R}_aV_0^0+R_0\tilde{V}_a^0\approx 0 \text{ (при малых } \nu). \quad (43)$$

Уравнение (40) при малых ν для основной пространственной гармоники запишется следующим образом:

$$\left[1-\xi_0^H\nu\ln\frac{1+u}{2}\right]\left[1-\xi_0^E\nu\ln\frac{1-u}{2}\right]=-\xi^2N_0\xi_0^E\left[K_0\nu\ln\frac{1+u}{2}-M_0\right]. \quad (44)$$

Видно, что для симметричных волн дисперсионное уравнение (44) распадается на два уравнения:

для магнитных волн

$$\xi_0^H\nu\ln\frac{1+u}{2}=1, \quad (45)$$

для электрических волн

$$\xi_0^E\nu\ln\frac{1-u}{2}=1. \quad (46)$$

При отсутствии металлических колец, т. е. когда ширина щели равна периоду кольцевого волновода ($d=l$ или $u=\cos\pi=-1$) получим из уравнений (45) и (46) дисперсионные уравнения симметричных магнитных и электрических волн кристаллического стержня радиусом a, погруженного в изотропную среду с диэлектрической проницаемостью ε_2. Они имеют вид

$$\frac{F_0(\Gamma_{02}a)}{f_0(\Gamma_{00}a)}=\frac{\Gamma_{02}}{\Gamma_{00}}. \quad (47)$$

$$\frac{F_0(\Gamma_{02}a)}{f_0(\Gamma_{0e}a)}=\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_e}\frac{\Gamma_{0e}\Gamma_{02}}{\Gamma_{00}^2}. \quad (48)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (16) и (17), приведенными в [7] для поперечных магнитных и электрических волн, распространяющихся в изотропном диэлектрическом волноводе.

После несложных преобразований можем записать уравнения (45) для поперечных магнитных волн в длинноволновом приближении ($\nu\ll 1$) в виде

$$\frac{\Gamma_{02}}{F_0(\Gamma_{02}a)}-\frac{\Gamma_{00}}{f_0(\Gamma_{00}a)}=\frac{2\pi}{l}\frac{2}{\ln\frac{1+u}{2}}, \quad (49)$$

а для электрических симметричных волн

$$\varepsilon_2 \frac{1}{\Gamma_{02}} F_0 (\Gamma_{02} a) - \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_s}}{\Gamma_{00}} f_0 (\Gamma_{0s} a) = (\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_s}) \ln \frac{1-u}{2} . \tag{50}$$

Из этих уравнений получим для волновода, находящегося в свободном пространстве, известные формулы [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Смирнов. ЖТФ, XXVIII, 7. 1958.
2. З. С. Агранович и В. П. Шестопалов. ЖТФ, 34, 11, 1964.
3. С. С. Третьякова, Сб. «Радиотехника», вып. 1, Изд-во ХГУ, 1965.
4. В. А. Барегамян. Сб. «Радиотехника», вып. 2, Изд-во ХГУ, 1965.
5. З. С. Агранович, В. А. Марченко и В. П. Шестопалов. ЖТФ, 32, 4, 1962.
6. А. И. Адонина, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 33, 6, 1963.
7. Дж. А. Стрэттон. Теория электромагнетизма, ОГИЗ — Гостехиздат, 1948.