

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ИНДУКТИВНЫХ ДИАФРАГМАХ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ

А. А. Кириленко, С. А. Масалов, В. П. Шестопалов

В последнее время возрос интерес к строгой постановке задачи дифракции электромагнитных волн на различных неоднородностях в прямоугольных волноводах. Это связано с рядом причин, среди которых немаловажной является разработка многоволновых волноводов.

Для бесконечно тонких препятствий имеются строгие методы решения задач. В частности, подробно исследована дифракция на бесконечно тонких диафрагмах различных конфигураций в работах [1, 2]. Для толстых диафрагм и ступенек в волноводах наряду с квазистатическими методами [3], которые накладывают ограничения на длину волны по сравнению с поперечными размерами волновода, разработаны и более точные [4].

Важным вопросом в задачах дифракции является обоснование полученных решений и исследование поведения решения на ребрах неоднородностей. Настоящая работа наряду с численным решением задачи дифракции электромагнитных волн на толстых диафрагмах в прямоугольных волноводах содержит анализ аналитического решения полученных систем для бесконечно тонкой диафрагмы половинного заполнения, что позволяет судить о существовании и единственности решения, а также проследить поведение полученного решения вблизи ребра.

1. Постановка задачи и получение систем уравнений

Рассматривается следующая задача. В прямоугольном волноводе с стороны $z < 0$ распространяется H_{10} -волна единичной амплитуды, поляризованная вдоль оси Ox

$$E_x = \sin y e^{i z \sqrt{k^2 - 1}}, \quad E_y = E_z = 0.$$

Зависимость от времени взята в виде $\exp(-i\omega t)$.

Набегая на несимметричную индуктивную диафрагму (рис. 1, а), волна возбуждает систему дифракционных волн, амплитуды которых требуется определить. Характерные размеры волновода и диафрагмы выбраны соответственно π и $\pi\theta$ ($0 < \theta < 1$), что, очевидно, не уменьшает общности задачи. Как следует из симметрии поставленной задачи, в решении будут участвовать волны, имеющие только x — составляющую вектора \vec{E} , т. е. волны вида H_{p0} . Поэтому размер волновода по оси Ox на результат задачи не влияет.

Поле внутри волновода, следовательно, может быть представлено в виде

$$E_x^+ = \sin y \cdot e^{i2\Gamma_1 z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin ny \cdot e^{-i(z+h)\Gamma_n}, \quad z < -h, \quad (1)$$

$$E_x^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin ny \cdot e^{i(z-h)\Gamma_n}, \quad z > h, \quad (2)$$

$$E_x^0 = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \operatorname{ch} \omega_m z + \beta_m \operatorname{sh} \omega_m z) \sin \frac{m}{\theta} y, \quad |z| < h, \quad (3)$$

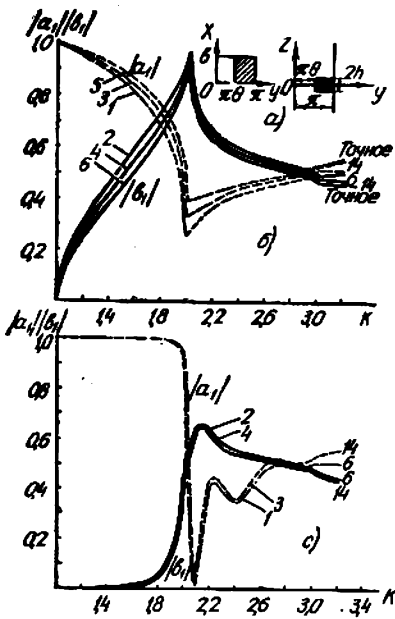


Рис. 1. Зависимость $|a_n|$ и $|b_n|$ от k при $\theta = \frac{1}{2}$ и $h = 0$ (б) и $h = \frac{\pi}{2}$ (с) 5–6 — точное решение; 3, 4 — решение системы 14-го порядка; 1, 2 — решение системы 6-го порядка.

где $\Gamma_n = \sqrt{k^2 - n^2}$ и $\omega_m = \sqrt{\left(\frac{m}{\theta}\right)^2 - k^2}$.

Здесь и далее \sqrt{A} берем с $\operatorname{Im} \sqrt{A} > 0$; если $\operatorname{Im} \sqrt{A} = 0$, то с $\operatorname{Re} \sqrt{A} > 0$. Поле, построенное по формулам (1) и (2) удовлетворяет уравнениям Максвелла, условиям излучения при $|z| \rightarrow \infty$ и граничным условиям на стенках волновода при любом выборе коэффициентов a_n и b_n . Формула (3) также дает поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла и граничным условиям внутри щели $|z| < h$, $0 < y < \pi\theta$ при любом выборе коэффициентов a_m и β_m .

Для получения искомого поля коэффициенты a_n, b_n, a_m и β_m необходимо подобрать так, чтобы были обеспечены выполнение граничных условий на поперечных оси z стенках диафрагмы и непрерывность тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей на щели. Решение получающейся при этом функциональной системы можно определить, используя переразложение системы функций, полной на одном интервале, по системе функций, полной на другом интервале [5].

В итоге получаем две бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, в которые в качестве неизвестных входят суммы и разности амплитуд волн дифракционного спектра.

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma_m^n (1 - i h \varphi_m \Gamma_n) = -\gamma_m^1 (1 + i h \varphi_m \Gamma_1) e^{-i h \Gamma_1}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \delta_m^n = -\delta_m^1 e^{-i h \Gamma_1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \gamma_m^n (h \varphi_m \omega_m^2 - i \Gamma_n) = -\gamma_m^1 (h \varphi_m \omega_m^2 + i \Gamma_1) e^{-i h \Gamma_1}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \delta_m^n = -\delta_m^1 e^{-i h \Gamma_1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5)$$

Здесь $A_n = a_n - b_n$, $L_n = a_n + b_n$, $\varphi_m = \frac{ih\omega_m h}{\omega_m h}$,

$$\gamma_m^n = \begin{cases} (-1)^m \frac{m \sin n\pi\theta}{n^2 - \left(\frac{m}{\theta}\right)^2} & \text{при } n \neq \frac{m}{\theta}, \\ \frac{\pi\theta^2}{2} & \text{при } n = \frac{m}{\theta}, \end{cases}$$

$$\delta_m^n = \begin{cases} \frac{m \sin n\pi\theta}{n^2 - \left(\frac{m}{1-\theta}\right)^2} & \text{при } n \neq \frac{m}{1-\theta}, \\ (-1)^{m+n+1} \frac{\pi(1-\theta)^2}{2} & \text{при } n = \frac{m}{1-\theta}. \end{cases}$$

Отметим, что каждая из бесконечных систем (4) и (5) сама состоит из двух подсистем, которые необходимо решать совместно.

Системы (4) и (5) позволяют получить некоторые предельные случаи. В случае бесконечно тонкой диафрагмы ($h = 0$) системы значительно упрощаются и из (4) тогда следует $a_1 = b_1 - 1$ и $a_n = b_n$. При $h = 0$ эти же соотношения можно получить сразу из равенства полей (1) и (2) в интервале $0 < y < \pi$.

Полагая $\theta \rightarrow 0$, что отвечает полному перекрытию волновода диафрагмой, из систем (4) и (5) находим

$$a_1 \rightarrow -e^{-ih\Gamma_1}, \quad |b_1| \rightarrow 0.$$

В этом случае наступает полное отражение, а набег фазы в коэффициенте отражения свидетельствует об отражении от границы $z = -h$.

Аналогично при рассмотрении задачи о ступеньке в прямоугольном волноводе поля в широком и узком волноводе представим соответственно в виде

$$E_x^+ = \sin y \cdot e^{iz\Gamma_1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin ny e^{-iz\Gamma_n}, \quad z < 0,$$

$$E_x^- = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m}{\theta} y e^{iz\Phi_m}, \quad z > 0,$$

$$\Phi_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m}{\theta}\right)^2}.$$

Здесь мы приходим к одной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных a_n

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \gamma_m^n (\Gamma_n + \Phi_m) = \gamma_m^1 (\Gamma_1 - \Phi_m), \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_m^n = -\delta_m^1, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (6)$$

Для нахождения b_m можно воспользоваться равенством

$$b_m \frac{\pi\theta^2}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \gamma_m^n + \gamma_m^1.$$

Если падающая H_{10} -волна распространяется со стороны узкого волновода, то получается система, отличающаяся от (6) только правой частью.

При падении на диафрагму или ступеньку волн типа H_{p0} ($p = 2, 3, \dots$) мы получаем новые системы линейных алгебраических уравнений, которые отличаются от выписанных выше только заменой γ_m^1 , δ_m^1 и Γ_1 на, соответственно, γ_m^p , δ_m^p и Γ_p везде в правых частях. Этот факт представляет известное удобство при решении задач на ЭВМ.

Следует указать, что задача дифракции H_{p0} -волн на индуктивной диафрагме или ступеньке в прямоугольном волноводе эквивалентна задаче дифракции наклонно падающих E — поляризованных плоских электромагнитных волн на соответствующих решетках.

2. Некоторые исследования полученных систем

Рассмотрим случай бесконечно тонкой диафрагмы. Тогда, как уже указывалось, системы значительно упрощаются и при $\theta = 0,5$ имеем

$$\begin{cases} \frac{\pi}{8} \Gamma_{2m} B_{2m} + (-1)^m m \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \frac{(-1)^n \Gamma_{2n+1}}{\Gamma_{2m}^2 - \Gamma_{2n+1}^2} = \frac{(-1)^m m \Gamma_1}{\Gamma_{2m}^2 - \Gamma_1^2}, & (7a) \\ -\frac{\pi}{8} B_{2m} + (-1)^m m \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+1} \frac{(-1)^n}{\Gamma_{2m}^2 - \Gamma_{2n+1}^2} = -\frac{(-1)^m m}{\Gamma_{2m}^2 - \Gamma_1^2}, & (7b) \end{cases}$$

$$m = 1, 2, 3, \dots,$$

где $B_1 = 2a_1 + 1 = 2b_1 - 1$ и $B_n = 2a_n = 2b_n$ ($n \neq 1$).

Обозначив $P_{2m} = (-1)^m B_{2m}$ и $P_{2n+1} = (-1)^n B_{2n+1}$, исключив затем неизвестные с четными индексами, получим следующую систему уравнений относительно неизвестных P_{2n+1}

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_{2n+1}}{\Gamma_{2n+1} - \Gamma_{2m}} = \frac{1}{\Gamma_{2m} + \Gamma_1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

Метод, аналогичный использованному в [6], позволяет получить аналитическое решение данной задачи и исследовать его поведение.

Рассмотрим однозначную аналитическую функцию $f(w)$ такую, что

а) $f(w)$ имеет простые полюса в точках Γ_{2n+1} и $-\Gamma_1$,

б) $f(w)$ имеет нули в точках Γ_{2m} ,

в) $f(w) \rightarrow 0$ везде на C_q при $q \rightarrow \infty$, где C_q есть окружности с центром в начале координат, проходящие между полюсами с индексом $n = q$ и $n = q + 1$.

Тогда, используя теорию вычетов, из (8) можно получить аналитическое выражение для P_{2n+1} , а затем (7б) может дать решение для P_{2m} . Рассмотрев для этого определенного вида интегралы по контурам C_q при $q \rightarrow \infty$, получаем

$$P_{2n+1} = \text{Res } f(w)_{w=\Gamma_{2n+1}}, \quad P_{2m} = \frac{4mf(-\Gamma_{2m})}{\pi\Gamma_{2m}}, \quad (9)$$

причем на $f(w)$ накладывается условие нормировки

$$\text{Res } f(w)_{w=-\Gamma_1} = 1.$$

Найдено, что

$$f(z) = e^{i(\Gamma_1 + \omega) \ln z} \cdot \frac{\prod_{m=1}^{\infty} (\Gamma_{2m} - \omega) \frac{1}{2m} \cdot e^{-\frac{i\omega}{2m}} \prod_{n=0}^{\infty} (\Gamma_{2n+1} \rightarrow \Gamma_1) \frac{1}{2n \rightarrow 1} e^{\frac{i\Gamma_1}{2n+1}}}{(\omega \rightarrow \Gamma_1) \prod_{n=0}^{\infty} (\Gamma_{2n+1} - \omega) \frac{1}{2n+1} e^{-\frac{i\omega}{2n+1}} \prod_{m=1}^{\infty} (\Gamma_{2m} \rightarrow \Gamma_1) \frac{1}{2m} e^{\frac{i\Gamma_1}{2m}}}. \quad (10)$$

Когда $|\omega| \rightarrow \infty$, функция $f(\omega)$ ведет себя следующим образом

$$f(\omega) \approx \frac{\sqrt{i\omega}}{\omega (\omega \rightarrow \Gamma_1)} \quad \text{при } 0 \leq \arg(-\omega) \leq \pi, \quad (11)$$

$$f(\omega) \approx \frac{\omega \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \sqrt{k^2 - \omega^2}}{16 (\omega \rightarrow \Gamma_1) \sqrt{i\omega (\omega^2 - k^2)}} \quad \text{при } 0 \leq \arg \omega \leq \pi.$$

Из (10) и (11) видим, что $f(\omega)$ удовлетворяет всем наложенным на нее условиям.

Из формул (9) и (10) можно получить, что при больших n , где n — номер соответствующей гармоники, амплитуды высших гармоник ведут себя как $\frac{1}{n \sqrt{n}}$ и, следовательно, данное решение дает поле, удовлетворяющее условию на ребре.

Ввиду того, что системы (4) и (5) решались на ЭВМ методом усеченной или редукции, представляет интерес рассмотреть усеченную систему уравнений (8). Взяв Q первых уравнений системы (8) приходим к следующей системе конечного порядка:

$$\sum_{n=0}^{Q-1} \frac{P_{2n+1}}{\Gamma_{2n+1} - \Gamma_{2m}} = \frac{1}{\Gamma_{2m} \rightarrow \Gamma_1}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Средитель системы (12) имеет специальный вид и поэтому может быть представлен как

$$\Delta = (-1)^{q \rightarrow p+1, p=0} \frac{\prod_{q=p+1, p=0}^{Q-1} (\Gamma_{2q+1} - \Gamma_{2p+1}) \prod_{q=p+1, p=1}^Q (\Gamma_{2q} - \Gamma_{2p})}{\prod_{q=0, p=1}^{Q-1} (\Gamma_{2q+1} - \Gamma_{2p})},$$

где q, p — некоторое целое положительное число.

Легко видеть, что решение системы (12) получается тогда в виде

$$P_{2n+1} = - \frac{\Delta (\Gamma_{2n+1} \rightarrow -\Gamma_1)}{\Delta} = - \prod_{p=0}^{Q-1} \frac{(\Gamma_{2p+1} \rightarrow \Gamma_1)}{(\Gamma_{2p+1} - \Gamma_{2n+1})} \prod_{l=1}^Q \frac{(\Gamma_{2l} - \Gamma_{2n+1})}{(\Gamma_{2l} \rightarrow \Gamma_1)}. \quad (13)$$

Здесь $\Delta (\Gamma_{2n+1} \rightarrow -\Gamma_1)$ есть определитель Δ с заменой Γ_{2n+1} на $-\Gamma_1$ и индекс (n) у знака произведения означает, что член с $p = n$ опущен.

В частности для $P_1 = B_1$ получаем

$$B_1 = 2a_1 + 1 = - \prod_{q=2}^{2Q} \frac{[\Gamma_q - (-1)^q \Gamma_1]^2}{1 - q^2} \quad (14)$$

Величина

Заметим, что в точке $k = 1$ выражение (14), как и аналитическое решение, дает $a_1 = -1$, что ясно физически, так как волновод становится предельным. Можно показать, что при $Q \rightarrow \infty$ получается решение, которое совпадает с аналитическими решениями, найденными в этой работе и в работе [1]. Этот факт говорит о сходимости решения усеченной системы к решению бесконечной системы и служит, таким образом, доказательством возможности применения метода редукции к подобному рода системам.

3. Анализ численных результатов

На ЭВМ были проведены вычисления для выяснения скорости сходимости решений усеченных систем к решению бесконечной системы и для исследования зависимости $|a_1|$ и $|b_1|$ от h , θ и k . Усеченные системы, полученные аналогичным методом, подробно исследовались в [7], где было показано, что при решении подобных двойных систем следует брать вполне определенное число уравнений из первой и второй подсистем. Если учесть, что первые подсистемы в (4) и (5) соответствуют щели, а вторые металлу, то следует выбирать отношение числа уравнений со щели к числу уравнений с металла равным отношению ширины щели к ширине металла. Данные замечания были проверены численно на ЭВМ и, действительно, лучшее совпадение с результатами, рассчитанными другими методами, получается при указанном соотношении числа уравнений с металла и со щели. Это учитывалось при дальнейших расчетах.

Оказалось, что скорость сходимости полученных систем значительно ниже, чем скорость сходимости систем, полученных путем применения метода задачи Римана—Гильберта к бесконечно тонким диафрагмам [2]. Например, для того, чтобы получить решение, совпадающее с точностью порядка 0,1% с точным решением в интервале $1 < k < 3,5$ надо решить систему 18-го порядка с комплексными коэффициентами. Из рис. 1, б видно, что с ростом k сходимость ухудшается и порядок систем надо повышать, хотя системы меньшего порядка (например, 6-го) все же дают правильное представление о качественной зависимости коэффициентов отражения и прохождения от толщины диафрагмы (рис. 1, с). Сходимость систем несколько хуже в точках $k = 2$ и $k = 3$, что связано с появлением в этих точках новых распространяющихся гармоник. Заметим также, что скорость сходимости мало зависит от толщины, как это видно из рис. 1, с.

При решении дифракционных задач на ЭВМ довольно удобным методом контроля получаемых результатов является проверка выполнения закона сохранения энергии. Для рассматриваемых здесь систем он удовлетворяется с точностью не хуже 2% для систем 6-го порядка и с точностью порядка 0,1% для систем 18-го порядка при $1 < k < 3,5$.

Поведение модулей коэффициентов отражения $|a_1|$ и прохождения $|b_1|$ первой гармоники как функций k , h и θ показано на рис. 2 и 3. Зависимость $|a_1|$ от толщины диафрагмы при половинном заполнении ($\theta = 0,5$) можно проследить на рис. 2, а. Здесь кривая 1 соответствует бесконечно тонкой диафрагме. В этом случае $|a_1|$ сначала плавно убывает до $k = 2$, затем поведение $|a_1|$ резко изменяется в связи с перераспределением энергии, обусловленным появлением в решениях (1) и (2) новых распространяющихся гармоник.

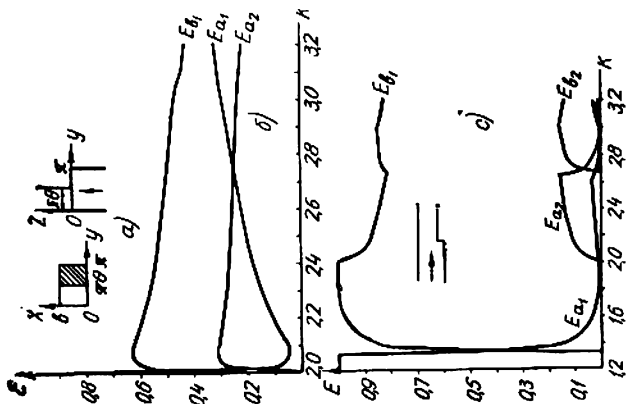


Рис. 4. Распределение энергии по гармоникам в зависимости от k при дифракции на стыке двух волноводов при $\theta = \frac{\pi}{2}$ (б) и $\theta = \frac{3}{4}\pi$ (с).

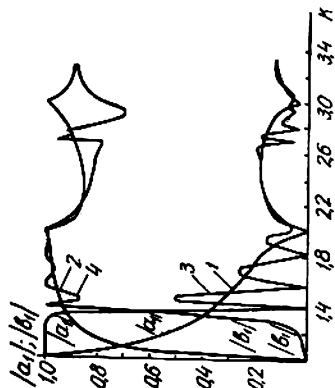


Рис. 3. Зависимость $|a_1|$ и $|b_1|$ от k при $\theta = \frac{3}{4}\pi$ и $h = 0$ (1, 2), $h = \pi$ (3, 4).

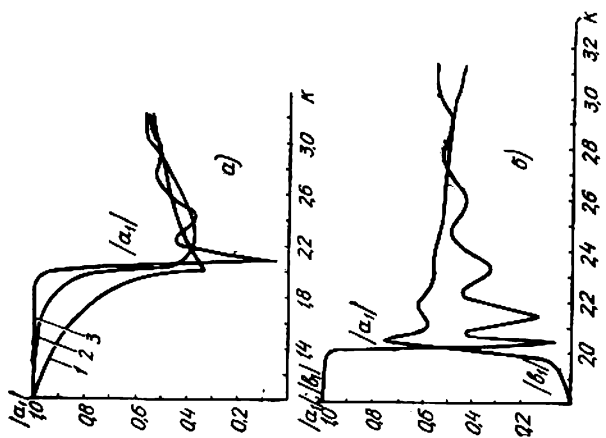


Рис. 2. Зависимость $|a_1|$ и $|b_1|$ от k при $\theta = \frac{\pi}{2}$ и а) $h = 0$ (1); $h = \frac{\pi}{10}$ (2); $h = \frac{\pi}{2}$ (3); б) $h = \pi$.

С ростом h щель между диафрагмой и стенкой волновода все более приобретает свойства последнего с критическим числом $k_{кр1} = \frac{1}{\theta}$. Для $\theta = 0,5$ имеем $k_{кр1} = 2$ и поэтому уже для $h = \frac{\pi}{2}$ модуль коэффициента отражения $|a_1|$ практически равен единице в области $k < 2$. При достаточно больших h и $k > k_{кр1}$ на графиках появляются осцилляции совершающиеся около некоторого положения равновесия, которым является кривая с $h = 0$. Отметим, что для $h > 2\pi$ максимумы коэффициента отражения появляются тогда, когда по толщине диафрагмы $2h$ укладывается четное число четвертей длины волны в узком волноводе, а минимумы — когда нечетное. Если $h < 2\pi$, минимумы и максимумы смещаются по отношению к расчетным точкам.

По мере увеличения k в решении (3) появляются новые распространяющиеся гармоники. Особенно ярко видны изломы графика в точках их появления $k_{кр1} = 1,33\dots$ и $k_{кр2} = 2,66\dots$ (рис. 3). Для значений $k > k_{кр2}$ поведение $|a_1|$ и $|b_1|$ значительно усложняется, так как при этом внутри щели происходит интерференция волн с индексами $m = 1$ и $m = 2$. Из сравнения рис. 2 и 3 видим, что с увеличением ширины щели волна проходит через диафрагму все менее возмущенной, а в точках максимумов $|b_1|$ наблюдается полное прохождение.

На рис. 4б,с представлено распределение энергии по гармоникам в зависимости от k при дифракции H_{10} — волны, падающей на ступеньку в волноводе со стороны более широкого. И в этом случае характерным является наличие изломов кривых при переходе критических значений k , соответствующих появлению новых распространяющихся волн в одном из волноводов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн. ЖТФ, XXV, вып. 5, стр. 841, 1955.
2. В. П. Шестопа л о в и В. В. Щербак. РнЭ, X, вып. 6, 7, 1965.
3. Справочник по волноводам. Изд-во «Сов. радио», М., 1952.
4. J. R. Pace and Raj Mittra. «Generalized scattering matrix analysis...» Presented at the Symposium on Quasi-Optics, Polytechnic Institute of Brooklyn, June, 8, 9, 10, 1964.
5. С. А. Масалов, И. Е. Тарапов. РнЭ, IX, вып. 1, стр. 53, 1964.
6. Whitehead, Proc. IEE, vol. 98, part III, p. p. 133—140, 1951.
7. R. Mittra, Journal of Research National Bureau of Standards, vol. 67D, 2, 1963.