

НЕОДНОРОДНОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВОЛНОВОДАХ. МНОГОСЛОЙНЫЕ ЛЕНТОЧНЫЕ ПРЕПЯТСТВИЯ

В. В. Щербак

В работах [1—3] развита строгая теория дифракции электромагнитных волн на различных однослойных и двухслойных препятствиях в прямоугольных волноводах. Примененный в этих работах метод задачи Римана — Гильберта позволяет также исследовать многослойные препятствия, к которым относятся диафрагмированные волноводы или цепочка объемных резонаторов, связанных друг с другом через щели. Существующие методы анализа задач о связи резонансных и волноводных объемов через щели, как правило, (в отличие от применяемого здесь метода) накладывают ограничения на параметры системы (отношение размеров системы, ширины щели к длине волны и др). Если же эти ограничения сняты, то полученное решение задачи (в виде интегральных уравнений) может быть доведено до конца только при определенных ограничениях, которые накладываются на размеры системы и длину волны [5].

Задача дифракции на многослойном препятствии

Пусть в прямоугольном волноводе с поперечными размерами a и b находится M произвольных ленточных многощелевых диафрагм (рис. 1) щели всех диафрагм параллельны одной из стенок волновода). Если на неоднородность (рис. 1) со стороны $z = \infty$ по волноводу набегают $(EH)_{pl}$ -волна, то в результате дифракции в системе возникает одномерный (n, l) спектр волн обеих поляризаций. При этом в области $z > 0$ (перед диафрагмами), кроме падающей, возникнут отраженные волны; в области $z < -r_M$ (за диафрагмами) волны будут распространяться или затухать в направлении $-z$; во внутренних областях между диафрагмами будут существовать и прямые и обратные волны.

Обозначая $r_0 = r_1 = 0$, запишем выражения для y -составляющих полей в $(M+1)$ -области, на которые волновод делится диафрагмами ($M+1 \geq \eta \geq 1$).

$$E_y^\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \{ C_n^\eta e^{-i\gamma_n(z+r_{\eta-1})} + D_n^\eta e^{i\gamma_n(z+r_\eta)} \} \sin g_n x \cos h_l y$$

$$H_y^\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \{ c_n^\eta e^{-i\gamma_n(z+r_{\eta-1})} + d_n^\eta e^{i\gamma_n(z+r_\eta)} \} \cos g_n x \sin h_l y,$$
(1)

где

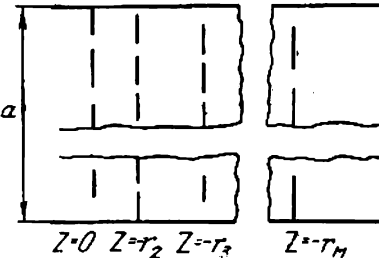
$$\gamma_n = \sqrt{k^2 - h_l^2 - g_n^2}, \quad g_n = \frac{\pi}{a} n; \quad h_l = \frac{\pi}{b} l, \quad (2)$$

а k — волновое число (индекс l при γ_{nl} в (1) опущен). Для дальнейшего также обозначим

$$e_{nl}^{\eta} = \exp \{i\gamma_{nl}(r_{\eta} - r_{\eta-1})\}$$

$$\xi_{nl} = n + i \frac{x}{k} \gamma_{nl}; \quad x = \frac{ka}{\pi}. \quad (3)$$

Амплитуды полей в областях $\eta = 1$ и $\eta = M + 1$ удовлетворяют соотношениям:



$$C_n^1 = A\delta_{n-p}; \quad c_n^1 = B\delta_{n-p}$$

$$D_n^{(M+1)} = d_n^{(M+1)} = 0; \quad \delta_n = \begin{cases} 1; & n = 0 \\ 0; & n \neq 0, \end{cases} \quad (4)$$

где A и B — заданные амплитуды первичной волны. Остальные компоненты поля выражаются через E_y и H_y из уравнений Максвелла.

Рис. 1. Многослойные препятствия в прямоугольном волноводе, состоящие из многоселевых диафрагм.

Воспользовавшись точными граничными условиями на щелях и лентах каждой из диафрагм ($M \geq \eta \geq 1$), получим соотношения

$$C_n^{\eta} e_{nl}^{\eta} + D_n^{\eta} = C_n^{\eta+1} + D_n^{\eta+1} e_{nl}^{\eta+1} \quad (5)$$

$$c_n^{\eta} e_{nl}^{\eta} - d_n^{\eta} = c_n^{\eta+1} e - d_n^{\eta+1} e_{nl}^{\eta+1} \quad (6)$$

и следующие пары уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^{\eta} + C_n^{\eta} e_{nl}^{\eta}) \sin g_n x = 0; & x \in l^{\eta} \\ \sum_{n=1}^{\infty} (D_n^{\eta} - D_n^{\eta+1} e_{nl}^{\eta+1}) \gamma_{nl} \sin g_n x = 0; & x \in \text{щ}^{\eta} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} (d_n^{\eta} - d_n^{\eta+1} e_{nl}^{\eta+1}) \cos g_n x = 0; & x \in \text{щ}^{\eta} \\ \sum_{n=0}^{\infty} (d_n^{\eta} - c_n^{\eta} e_{nl}^{\eta}) \gamma_{nl} \cos g_n x = 0; & x \in l^{\eta}, \end{cases} \quad (8)$$

где l^{η} — область изменения x , соответствующая лентам, а щ^{η} — щелям η -й диафрагмы. В частном случае, когда препятствие состоит из двух диафрагм, уравнения (7) и (8) совпадают соответственно с уравнениями (3) — (6) и (18) — (23) работы [2].

Из уравнений (7) и (8) можно выразить все неизвестные амплитуды через A и B . При этом оказывается, что амплитуды D_n^{η} и C_n^{η} зависят только от A , а d_n^{η} и c_n^{η} зависят только от B , т. е. как и следовало ожидать, многослойная диафрагма не меняет поляризацию поля.

Решение каждой из $2M$ пар уравнений (7), (8) как и в [1—3], производится методом задачи Римана — Гильберта. Опуская промежуточные вычисления, выпишем окончательные системы линейных алгебраических уравнений для амплитуд волн дифракционных спектров, которые сов-

ство с (5), (6) образуют две независимые системы, соответствующие различным поляризациям волн

$$\begin{aligned}
 & -\nu(D_n^\eta + e_{nl}^\eta C_n^\eta) + \sum_{n>1} (D_n^\eta + e_{nl}^\eta C_n^\eta) \xi_{nl} (V_{\nu}^{n,\eta} - V_{\nu}^{-n,\eta}) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\eta} \lambda_n^\eta R_{\nu-n+1}^\eta = \frac{x}{k} \sum_{n>1} (C_n^\eta e_{nl}^\eta + D_n^{\eta+1} e_{nl}^{\eta+1}) \gamma_{nl} (V_{\nu}^{n,\eta} - V_{\nu}^{-n,\eta}) \\
 & \nu > 1; M \geq \eta > 1
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n>1} (D_n^\eta + e_{nl}^\eta C_n^\eta) \sin n\varphi_\nu^\eta = 0; \nu = 1, 2, \dots, t_\eta; M > \eta > 1 \\
 & -\nu(d_n^\eta - e_{nl}^{\eta+1} d_n^{\eta+1}) + \sum_{n>0} (d_n^\eta - e_{nl}^{\eta+1} d_n^{\eta+1}) \xi_{nl} (\bar{V}_{\nu}^{n,\eta} + \bar{V}_{\nu}^{-n,\eta}) + \\
 & + \sum_{n=1}^{\eta} \bar{\lambda}_n^\eta \bar{R}_{\nu-n+1}^\eta = \frac{x}{k} \sum_{n>0} (d_n^{\eta+1} e_{nl}^{\eta+1} - c_n^\eta e_{nl}^\eta) \gamma_{nl} (\bar{V}_{\nu}^{n,\eta} + \bar{V}_{\nu}^{-n,\eta}); \\
 & \nu > 0; M \geq \eta > 1
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\sum_{n>0} (d_n^\eta - d_n^{\eta+1} e_{nl}^{\eta+1}) \cos n\bar{\varphi}_\nu^\eta = 0; \nu = 1, 2, \dots, t_\eta; M \geq \eta > 1.$$

Здесь величины $V_{\nu}^{n,\eta}$, R_{ν}^η , $\bar{V}_{\nu}^{n,\eta}$, \bar{R}_{ν}^η , зависящие от параметров распределения η -й диафрагмы, и параметры φ_ν^η , $\bar{\varphi}_\nu^\eta$ определяются также, как и аналогичные величины в [1], [2]; а λ_n^η — неизвестные промежуточные константы задачи.

Так как амплитуды C_n^1 , D_n^{M+1} , c_n^1 , d_n^{M+1} заданы, то (9) и (10) являются замкнутыми неоднородными системами уравнений. Легко доказать, что данные бесконечные системы квазирегулярны и могут решаться методом редукции.

Как и в случае двойных диафрагм [2], системы уравнений (9) и (10) после преобразования их при помощи формулы Крамера можно заметить на эквивалентные им вторичные системы уравнений, выражающие неизвестные амплитуды через элементы матрицы рассеяния каждой из диафрагм многослойного препятствия

$$D_n^\eta = \sum_{n>1} C_n^\eta e_{nl}^\eta R_{\nu-n}^{(nl)\eta} + D_n^{\eta+1} e_{nl}^{\eta+1} T_{\nu-n}^{(nl)\eta}, \tag{11}$$

$$d_n^\eta = \sum_{n>0} c_n^\eta e_{nl}^\eta K_{\nu-n}^{(nl)\eta} + d_n^{\eta+1} e_{nl}^{\eta+1} F_{\nu-n}^{(nl)\eta}, \tag{12}$$

где $R_{\nu-n}^{(nl)\eta}$, $T_{\nu-n}^{(nl)\eta}$, $K_{\nu-n}^{(nl)\eta}$, $F_{\nu-n}^{(nl)\eta}$ — определенные в [2] коэффициенты преобразования волноводных волн на одиночной (η -ой) диафрагме.

Уравнения (11) и (12) совместно с равенствами (5) и (6) будут распределять решение задачи дифракции для любого набора дифрагирующих волн, если вместо (4) подставить соответствующие выражения для амплитуд падающих волн. В частности, если единственная дифрагирующая волна набегают на неоднородность не слева, а справа, то равенства (4) следует заменить на

$$\begin{aligned}
 D_n^{M+1} &= A\delta_{n-p}; \quad d_n^{M+1} = B\delta_{n-p} \\
 C_n^{(1)} &= c_n^{(1)} = 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Вычисляя из (11), (12), при условиях (4) и (13) неизвестные $D_n^{(1)}$, $d_n^{(1)}$, C_n^{M+1} , c_n^{M+1} для разных значений p , мы тем самым определим матрицы

рассеяния для неоднородности (рис. 1) по заданным матрицам рассеяния диафрагм, из которых составлена эта неоднородность.

Если неоднородность (рис. 1) состоит из двух диафрагм ($M-2$) то уравнения (11) и (12) сравнительно просты и совпадают с соответствующими уравнениями работы [2]. При наличии большего количества диафрагм указанные системы значительно усложняются. Каждая новая диафрагма порождает новые уравнения и новые неизвестные. При этом однако, каждая η -я подсистема в (11) и (12) содержит не все неизвестные, а только $2/M$ части их общего количества. Воспользуемся этим для дальнейшего преобразования уравнений. Ограничимся рассмотрением случая E -поляризации. M -я подсистема в (11) при условии (4) перепишется в виде

$$D_v^M = \sum_{n>1} C_n^M e_{ni}^M R_{v-n}^{(ni)M}. \quad (11)$$

Из остальных подсистем уравнений (11), решая их совместно, можно выразить все входящие в них неизвестные через A и D_n^M . В частности для C_n^M и $D_n^{(1)}$ имеем

$$C_v^M = \sum_{n>1} D_n^M e_{ni}^M \bar{L}_{v-n}^{ni} + A G_{v-p}^{pi} \quad (12)$$

$$D_v^{(1)} = \sum_{n>1} D_n^M e_{ni}^M \bar{G}_{v-n}^{ni} + A L_{v-p}^{pi}. \quad (13)$$

Коэффициенты при A и D_n^M в (15) и (16) являются элементами матриц рассеяния для неоднородности, отличающейся от рассматриваемой отсутствием последней диафрагмы. Их вычисление возможно с помощью системы уравнений, отличающейся от (11) уменьшением индекса M на единицу. (Здесь L — матрица отражения для волн, набегающих слева; G — матрица передачи; \bar{L} и \bar{G} — матрицы рассеяния для волн, набегающих справа). Таким образом, с помощью (14—16) коэффициенты преобразования M -слойной системы выражаются через коэффициенты преобразования волн на более простых неоднородностях (одиночная диафрагма и система из $(M-1)$ -й диафрагмы). Коэффициенты преобразования M -слойной системы, в свою очередь, можно выразить через коэффициенты преобразования на $(M-2)$ -слойной неоднородности, и т. д. В итоге непосредственное решение уравнений (11) можно заменить последовательным решением $(M-1)$ раз систем уравнений типа (14), (15), имеющих в $M/2$ раз меньший порядок. Подобный прием значительно сокращает время вычислений при расчетах на ЭВМ (в M^2 раз, если все диафрагмы системы идентичны).

Собственные колебания и переходные процессы

Дифракция волноводных волн на многослойных препятствиях представляет собой задачу о вынужденных колебаниях. Рассмотрим случай собственных колебаний. В этом случае возбуждающая волна отсутствует так что вместо (4) имеем

$$C_n^{(1)} = c_n^{(1)} = D_n^{M+1} = d_n^{M+1} = 0 \quad (14)$$

и если ограничиться случаем единственного колебания, то поля в системе рис. 1 можно с точностью до временного множителя

$$\sim \exp \{ -ikct \}$$

представить в виде (1).

Применение метода задачи Римана — Гильберта приводит к получению однородных систем линейных алгебраических уравнений, отличающихся от (11), (12) лишь отсутствием свободных членов. Приравнявая нулю определители этих систем, получаем характеристические уравнения для определения действительной и мнимой частей $\kappa = \frac{ka}{\pi}$.

В простейшем случае $M=2$ для E_y -колебаний имеем

$$\det \{ (R_{v-n}^{(n)1} e_{nl}) (R_{v-n}^{(n)2} e_{nl}) - I \} = 0, \quad (18)$$

где в фигурных скобках заключена разность произведения двух матриц и единичной матрицы $I = (\delta_{v,-n})$.

Определив из характеристического уравнения волновые числа, можно затем для каждого из найденных собственных значений определить волновую функцию, выразив с помощью исходной однородной алгебраической системы все амплитуды спектра через одну из них.

Задачи о вынужденных и свободных колебаниях являются основными, так как любой переходный процесс в системе (рис. 1) можно рассматривать, как суперпозицию двух указанных типов колебаний. Рассмотрим, например, задачу о выключении генератора электромагнитных колебаний.

Пусть вначале в системе существуют стационарные колебания, возбужденные монохроматической волной, проходящей к диафрагмам со стороны $z > 0$. Из решения стационарной задачи можно найти для этого случая распределение поля в виде

$$\psi_{(x, y, z)}^b e^{-ikct}; \quad t \leq 0, \quad (19)$$

где kc — частота генератора. Если генератор выключить, то в некоторый момент времени $t = 0$ возбуждающая волна перестанет набегать на диафрагмы, и в системе возникнет суперпозиция свободных колебаний

$$\sum_n A_n \psi_{(x, y, z)}^{nc} e^{-ik_n ct}; \quad t \geq 0, \quad (20)$$

где $k_n c$ — комплексные частоты этих колебаний. При этом должно выполняться начальное условие

$$\psi_{(x, y, z)}^b = \sum_n A_n \psi_{(x, y, z)}^{nc}. \quad (21)$$

Аналогично, для случая задачи включения генератора имеем

$$\psi = \begin{cases} 0; & t \leq 0 \\ \psi_{(x, y, z)}^b e^{-ikct} - \sum_n A_n \psi_{(x, y, z)}^{nc} e^{-ik_n ct}; & t \geq 0. \end{cases} \quad (22)$$

Для прямоугольного импульса длительности τ имеем

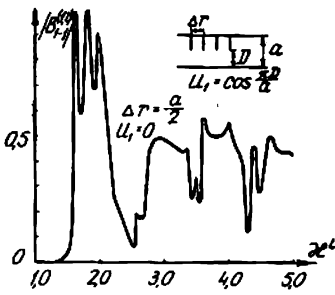
$$\psi = \begin{cases} 0; & t \leq 0 \\ \psi_{(x, y, z)}^b e^{-ikct} - \sum_n A_n \psi_{(x, y, z)}^{nc} e^{-ik_n ct}; & \tau \geq t \geq 0 \\ \sum_n B_n \psi_{(x, y, z)}^{nc} e^{-ik_n ct}; & t > \tau. \end{cases} \quad (23)$$

Численные результаты

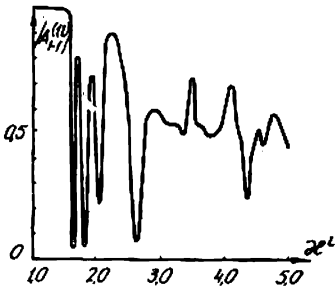
Расчеты были произведены для случая вынужденных колебаний в системе, состоящей из трех или четырех диафрагм (падение $E_{1,t}^y$, $E_{2,t}^y$ или $E_{3,t}^y$ -волны). Аналогичные результаты для двойных диафрагм полу-

чены в [2]. При этом в системах алгебраических уравнений учитывались параметры малости $\frac{\epsilon_n}{n}$ для $n = 1 \div 6$ и $e_n^{(q)}$ для $n = 2 \div 4$, что достаточно для диапазона $5 > x' > 1$ ($x' = x \frac{\gamma_{01}}{k}$).

Полученные кривые зависимости коэффициентов преобразования от x' очень изрезаны. Если система состоит из нескольких связанных резонаторов, то резонансные пики каждого из них суммируются на общей резонансной кривой. В результате взаимодействия в связанной системе



а



б

Рис. 2. Зависимость от x' модулей коэффициентов прохождения

$|B_{-1}^{(1)}|$ (рис. 2, а) и отражения $|A_{-1}^{(1)}|$ (рис. 2, б) волны E_{11}^y для четырехслойной равнощелевой асимметричной системы с одинаковыми расстояниями между диафрагмами.

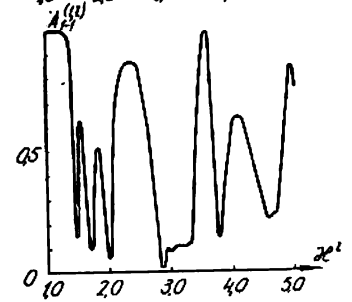
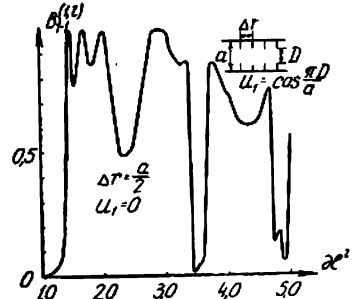


Рис. 3. То же, что и на рис. 2 для четырехслойной симметричной системы.

происходит сдвиг резонансных точек (по сравнению со случаем двойной диафрагмы). Этот сдвиг будет тем сильнее, чем шире щели диафрагм a и чем меньше отличаются парциальные частоты. Если длины $r_n - r_{n-1}$

всех резонаторов равны, а диафрагмы идентичны, то парциальные частоты, соответствующие разным резонаторам, совпадают. Изрезанность кривых при этом не уменьшается, так как взаимодействие в связанной системе (которое при этом наиболее сильно) сдвигает различные собственные частоты на разные расстояния по отношению к парциальным. На рис. 2—5 представлены графики для этого случая. На этих кривых в местах, где в случае двойной диафрагмы [2] имелись одиночные резонансные пики, наблюдаются мультиплеты (дуплет для трехслойной диафрагмы и триплет для четырехслойной). С увеличением связи (рис. 5, а, б) $x' = 1,8$ компоненты каждого мультиплета раздвигаются и сами расширяются, а провалы между ними становятся мельче. При уменьшении ширины

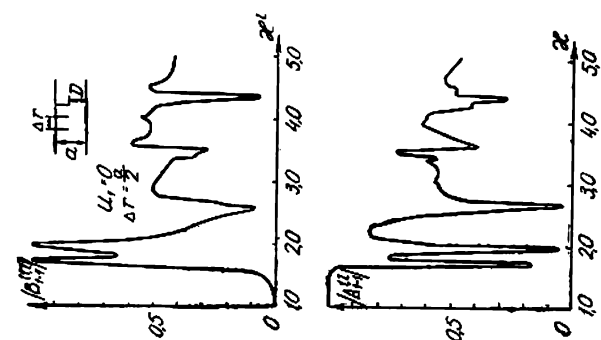


Рис. 4. Зависимость $|A_{-1}^{(1)}|$ и $|B_{-1}^{(1)}|$ от x' для трехслойного равноделеного асимметричного препятствия.

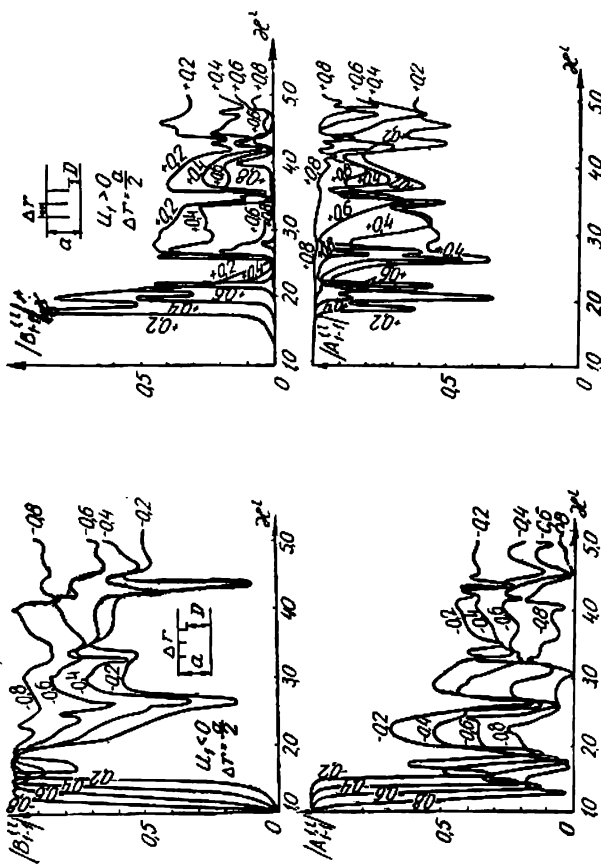


Рис. 5. Зависимость $|A_{-1}^{(1)}|$ и $|B_{-1}^{(1)}|$ от x' и коэффициента заполнения μ_1 для трехслойного асимметричного препятствия.

щелей высота резонансных пиков уменьшается, а компоненты мультиплетов сближаются до полного слияния (рис. 5, в, г).

По форме кривых для случая вынужденных колебаний можно качественно судить о частотах и добротности собственных колебаний системы. Следует отметить, что с ростом κ' все увеличивающееся количество накладывающихся друг на друга резонансов сильно усложняет картину. Поэтому в тех случаях, когда интересуются, в первую очередь, собственными колебаниями, а не коэффициентами передачи исследуемых систем более полную информацию можно получить, решая непосредственно характеристические уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Шестопапов, В. В. Щербак. Неоднородности в прямоугольных волноводах. Высшие типы волн. «Радиотехника и электроника», 1966, 11, 4.
 2. В. П. Шестопапов, В. В. Щербак. Неоднородности в прямоугольных волноводах. Двойные ленточные препятствия. «Радиотехника и электроника», 1966, 11, 6.
 3. В. П. Шестопапов, В. В. Щербак. Неоднородности в прямоугольных волноводах. Индуктивные препятствия. «Радиотехника и электроника», 1965, 10, 7.
 4. Н. Bethe, Phys. Rev, 1944, 66, 163.
 5. Л. Левин. Современная теория волноводов, перев. с англ. Э. Л. Бурштэйна. Изд-во ИЛ, 1954.
-