ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ С ГИРОМАГНИТНОЙ СРЕДОЙ

В. В. Хорошун

1. В настоящей работе показано, что метод решения дифракционных задач, развитый в [1], позволяет исследовать дифракцию на решетках с гиротропными средами для поперечного распространения. Иллюстрацией применимости указанного метода является решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны, нормально падающей на плоскую металлическую решетку, образованную бесконечно тонкими и идеально проводящими лентами. Система координат выбрана так, что решетка лежит в плоскости xOy, ленты параллельны оси Ox, а начало координат выбрано в средине щели решетки. Период решетки — l, ширина щели — d.

Нижнее полупространство ($z > 0$) заполнено поликристаллическим ферритом, лишенным потерь, намагниченным до насыщения и имеющим параметры

$$\varepsilon = \varepsilon_0; \quad \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -i\mu_a \\ 0 & i\mu_a & \mu \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где μ_{11}, μ и μ_a определены в [2], [3]. (Постоянное магнитное поле направлено вдоль оси Ox).

Сверху ($z < 0$) на решетку с ферритом падает нормально к решетке плоская волна вида $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{ik_0 z}$, $k_0 = \frac{\omega}{c}$ (временной множитель $e^{-i\omega t}$ мы здесь и дальше опускаем).

Требуется определить поле, возникшее в результате дифракции этой волны на решетке.

При указанных ε_0 и $\hat{\mu}$ уравнения Максвелла распадаются на две независимые системы, из которых одна соответствует обыкновенной, а вторая — необыкновенной волнам. Поскольку решение задачи дифракции обыкновенной волны на решетке с ферритом тождественно решению задачи о дифракции плоской H-поляризованной волны на решетке с полубесконечным магнитодиэлектриком с параметрами $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu_0 = \mu_{11}$, мы на нем останавливаться не будем, а перейдем к рассмотрению системы уравнений, соответствующей необыкновенной волне:

$$E_x = \frac{1}{ik_0\varepsilon_0}\left(\frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{dy}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -ik_0 (i\mu_a H_y + \mu H_z), \tag{2a}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = ik_0 (\mu H_y - i\mu_a H_z). \tag{2б}$$

Введем аналогично [4] величины M и K следующим образом:

$$M = \frac{\mu}{\mu^2 - \mu_a^2}; \quad K = -\frac{\mu_a}{\mu^2 - \mu_a^2}, \tag{3}$$

тогда

$$H_y = \frac{1}{ik_0}\left(M \frac{\partial}{\partial z} + iK \frac{\partial}{\partial y}\right) E_x, \tag{4}$$

$$H_z = -\frac{1}{ik_0}\left(-iK \frac{\partial}{\partial z} + M \frac{\partial}{\partial y}\right) E_x. \tag{4a}$$

Подставляя значения H_y и H_z в (2), получим

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \frac{\varepsilon_0}{M}\right) E_x = 0, \quad (M \neq 0). \tag{5}$$

При $M = 0$ из (4), (4a) и (2) непосредственно следует $E_x = H_y = H_z = 0$ (случай поперечного ферромагнитного резонанса). В [2] этому соответствует случай, когда

$$\mu_\perp = \frac{1}{M} = \infty.$$

Ищем дифрагированное поле в виде

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n(z) e^{i\frac{2\pi n}{l} y}.$$

Тогда выражения для тангенциальных компонент электрического и магнитного полей в верхнем ($z < 0$) и нижнем ($z >$) 0 полупространствах примут вид

$$E_x = \begin{cases} e^{ik_0 z} + \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-i\gamma_{n1} z} e^{i\frac{2\pi n}{l} y}, & (z < 0) \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i\gamma_{n2} z} e^{i\frac{2\pi n}{l} y}, & (z > 0) \end{cases}$$

$$H_y = \begin{cases} \frac{1}{k_0}\left[k_0 e^{ik_0 z} - \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n \gamma_{n1} e^{-i\gamma_{n1} z} e^{i\frac{2\pi n}{l} y}\right], & (z < 0) \\ \frac{1}{k_0} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n \left(M\gamma_{n2} + iK \frac{2\pi n}{l}\right) e^{i\gamma_{n2} z} e^{i\frac{2\pi n}{l} y}, & (z > 0) \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\gamma_{n1} = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}, \quad \gamma_{n2} = \sqrt{k_0^2 \frac{\varepsilon_0}{M} - \left(\frac{2\pi n}{e}\right)^2}, \quad (M > 0).$$

Удовлетворив граничным условиям на металле (М) и щели (Щ) решетки, для искомых амплитуд поля $b_n = \frac{x_n}{n}$ получаем

$$1 + a_0 = b_0, \quad a_n = b_n, \quad (n \neq 0) \tag{7}$$

и следующую систему

$$(M)\ \sum_{n\neq 0} x_n e^{in\varphi} = 0 \tag{8}$$

$$(Щ)\ \sum_{n>0} x_n e^{in\varphi} + G \sum_{n<0} x_n e^{in\varphi} = -i\varkappa p + i\varkappa a b_0 + \frac{p}{2}(1+M) \sum_{n\neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \chi_n e^{in\varphi}, \tag{9}$$

где введены следующие обозначения:

$$p = \frac{2}{1+M+K};\ a = \frac{1+\sqrt{\varepsilon_0 M}}{1+M+K};\ G = -\frac{1+M-K}{1+M+K};\ \varphi = \frac{2\pi}{l} y;$$

$$\chi_n_{(n\neq 0)} = 1 + \frac{i}{1+M}\left[\sqrt{\frac{\varkappa^2}{n^2} - 1} + M\sqrt{\frac{\varkappa^2}{n^2}\frac{\varepsilon_0}{M} - 1}\right]. \tag{10}$$

Введем функции $X^+(z) = \sum_{n>0} x_n z^n$ и $X^-(z) = -\sum_{n<0} x_n z^n$, голоморфные соответственно внутри и вне окружности $|z| = 1$. Тогда

$$X^+(e^{i\varphi}) - X^-(e^{i\varphi}) = \sum_{n\neq 0} x_n e^{in\varphi},$$

откуда получаем

$$(M)\ X^+(e^{i\varphi}) - X^-(e^{i\varphi}) = 0$$

$$(Щ)\ X^+(e^{i\varphi}) - GX^-(e^{i\varphi}) = i\varkappa a b_0 - i\varkappa p + \frac{p}{2}(1+M) \sum_{n\neq 0} x_n \frac{|n|}{n} \chi_n e^{in\varphi},$$

т. е. мы пришли к неоднородной задаче сопряжения.

Каноническое решение класса h_0 однородной задачи сопряжения имеет вид [5]

$$\psi(z) = (z-\alpha)^{-\frac{1}{2}-i\rho}(z-\bar{\alpha})^{-\frac{1}{2}+i\rho} = e^{2\rho\theta}\varphi(z),$$

где

$$\rho = \frac{\ln|G|}{2\pi},\quad \alpha = e^{i\theta},\quad \theta = \frac{\pi d}{e},\quad u = \cos\theta,$$

а функция

$$\varphi(z) = (1 - z\alpha)^{-\frac{1}{2}+i\rho}(1 - z\bar{\alpha})^{-\frac{1}{2}-i\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u;\ \rho) z^n,\ |z| < 1$$

является производящей для полиномов Поллачека $P_n(u;\ \rho)$ [6].

Полиномы Поллачека $P_n(u;\ \rho)$ являются обобщением полиномов Лежандра $P_n(u)$ и переходят в них при $\rho = 0$. Введя далее,

$$R(\zeta) = \begin{cases} (\zeta-\alpha)^{-\frac{1}{2}-i\rho}(\zeta-\bar{\alpha})^{-\frac{1}{2}+i\rho} & \zeta \in L_1 \\ 0 & \zeta \in L_2 \end{cases} \tag{11}$$

а также коэффициенты

$$V_m^n(u;\ \rho),\ R_m(u;\ \rho) \text{ и т. д.}$$

аналогично [1], получим следующую систему уравнений для определения

$$b_0 \text{ и } b_n = \frac{x_n}{n}:$$

$$-b_0 = i\varkappa a b_0 V_{[\sigma]}^0(u;\ \rho) - i\varkappa p V_{[\sigma]}^0(u;\ \rho) + \frac{p}{2}(1+M) \sum_{n\neq 0} \chi_n \frac{|n|}{n} x_n V_{[\sigma]}^n(u;\ \rho) +$$
$$+ 2c R_{[\sigma]}(u;\ \rho)$$

$$0 = i\varkappa a b_0 V_0^0(u;\ \rho) - i\varkappa p V_0^0(u;\ \rho) + \frac{p}{2}(1+M)\sum_{n\neq 0} x_n \frac{|n|}{n}\chi_n V_0^n(u;\ \rho) + \\ + 2cR_0(u;\ \rho) \tag{12}$$

$$x_m = i\varkappa \alpha b_0 V_m^0(u;\ \rho) - i\varkappa p V_m^0(u;\ \rho) + \frac{p}{2}(1+M)\sum_{n\neq 0} x_n \frac{|n|}{n}\chi_n V_m^n(u;\ \rho) + \\ + 2cR_m(u;\ \rho)$$

2. Прежде чем приступить к вычислению коэффициентов, заметим следующее. Поскольку компоненты тензора (1) μ и μ_a являются соответственно четной и нечетной функциями от подмагничивающего поля H_0, то, как следует из (3) величины M и K тоже будут соответственно четной и нечетной функциями H_0. Это ведет к тому, что при изменении направления H_0 на противоположное коэффициент $G = -\frac{1+M-K}{1+M+K}$ переходит в $G_1 = \frac{1}{G}$, а, следовательно, параметр $\rho_1 = \frac{\ln|G_1|}{2\pi} = -\rho$. Поэтому введем наряду с полиномами $P_n(u;\ \rho)$ полиномы $P_n(u;\ -\rho)$ следующим образом:

$$(1-z\alpha)^{-\frac{1}{2}+i\rho}(1-z\bar{\alpha})^{-\frac{1}{2}-i\rho} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u;\ \rho) z^n, & |z|<1 \\ -e^{-2\rho\theta}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(u;\ -\rho) z^{-n-1}, & |z|>1 \end{cases}$$

$$(1-z\alpha)^{-\frac{1}{2}-i\rho}(1-z\bar{\alpha})^{-\frac{1}{2}+i\rho} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(u;\ -\rho) z^n, & |z|<1 \\ -e^{2\rho\theta}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(u;\ \rho) z^{-n-1}, & |z|>1 \end{cases} \tag{13}$$

а также полиномы $\eta_n(u;\ \rho)$ и $\eta_n(u;\ -\rho)$

$$(1-z\alpha)^{\frac{1}{2}-i\rho}(1-z\bar{\alpha})^{\frac{1}{2}+i\rho} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(u;\ \rho) z^n, & |z|<1 \\ -e^{2\rho\theta}\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(u;\ -\rho) z^{-n+1}, & |z|>1 \end{cases}$$

$$(1-z\alpha)^{\frac{1}{2}+i\rho}(1-z\bar{\alpha})^{\frac{1}{2}-i\rho} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(u;\ -\rho) z^n, & |z|<1 \\ -e^{-2\rho\theta}\sum_{n=0}^{\infty} \eta_n(u;\ \rho) z^{-n+1}, & |z|>1. \end{cases} \tag{14}$$

(Здесь взята та ветвь производящей функции, которая в точке $z=0$ имеет значение, равное $+1$).

Рекуррентные формулы для $P_n(u;\ \rho)$ и $\eta_n(u;\ \rho)$ имеют вид

$$nP_n(u;\ \rho) = [(2n-1)u + 2\rho\sin\theta]\,P_{n-1}(u;\ \rho) - (n-1)P_{n-2}(u;\ \rho);$$
$$n\eta_n(u;\ \rho) = [(2n-3)u - 2\rho\sin\theta]\,\eta_{n-1}(u;\ \rho) - (n-3)\eta_{n-2}(u;\ \rho) \tag{15}$$
$$P_0(u;\ \rho) = \eta_0(u;\ \rho) = 1,\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Кроме того,

$$\eta_n(u;\ \rho) = P_n(u;\ -\rho) - 2uP_{n-1}(u;\ -\rho) + P_{n-2}(u;\ -\rho), \quad (n > 2)$$
$$\eta_1(u;\ \rho) = -u - 2\rho\sin\theta, \quad (u = \cos\theta). \tag{16}$$

Наконец, нам необходимы интегральные представления для полиномов Поллачека $P_n(u;\ \rho)$

$$P_n(u;\ \rho) = e^{\pi\rho}e^{-\rho\theta}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\theta}^{\theta}\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}\left(\dfrac{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}\right)^{i\rho}}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}\,d\varphi$$

$$P_n(u;\ \rho) = e^{-\rho\theta}[\operatorname{ch}(\pi\rho)]^{-1}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\theta}^{\theta}\frac{\cos\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi+\rho\ln\dfrac{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}\right\}}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}}\,d\varphi. \tag{17}$$

Аналогичные представления для полиномов Поллачека имеются в [7]. Из полученного представления полиномов Поллачека в форме обобщенного интеграла Мелера-Дирихле следует важное соотношение

$$P_{-n}(u;\ \rho) = e^{-2\rho\theta}P_{n-1}(u;\ -\rho). \tag{18}$$

Вычисление коэффициентов проводится аналогично [1]. Рассмотрим лишь коэффициент $R_{[\sigma]}(u;\ \rho)$, определить который удобнее так, как это сделано в [8]. Ниже приведены выражения для коэффициентов

$$R_m(u;\ \rho) = \frac{e^{2\rho\theta}}{2}P_m(u;\ \rho) \tag{19}$$

$$V_n(\zeta_0;\ u;\ \rho) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n+1}\eta_{n+1-k}(u;\ -\rho)\zeta_0^k, & n > 0 \\ 1-\zeta_0^{-1}e^{-2\rho\theta}, & n=-1 \\ -e^{-2\rho\theta}\sum\limits_{k=0}^{-n-1}\eta_{-n-1-k}(u;\ \rho)\zeta_0^{-k-1}, & n<-1 \end{cases} \tag{20}$$

$$V_m^n(u;\ \rho) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n+1}\eta_{n+1-k}(u;\ -\rho)P_{k-m-1}(u;\ -\rho), & n>0 \\ \frac{e^{2\rho\theta}}{2}[P_m(u;\ \rho)-e^{-2\rho\theta}P_{m+1}(u;\ \rho)] & n=-1 \\ -\frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{1-n-1}\eta_{-n-1-k}(u;\ \rho)P_{m+k+1}(u;\ \rho), & n<-1 \end{cases} \tag{21}$$

$$V_m^n(u;\ \rho) = \begin{cases} \frac{e^{2\rho\theta}}{2}\frac{m+1}{m-n}[P_m(u;\ \rho)P_{n+1}(u;\ \rho) - \\ \quad -P_{m+1}(u;\ \rho)P_n(u;\ \rho)], & \begin{matrix} n\neq -1 \\ n\neq m \end{matrix} \\ \frac{e^{2\rho\theta}}{2}[P_m(u;\ \rho)-e^{-2\rho\theta}P_{m+1}(u;\ \rho)], & n=-1. \end{cases} \tag{22}$$

$$V^{n}_{[\sigma]}(u;\ \rho)=\begin{cases}\eta_{n+1}(u;-\rho)\,R_{[\sigma]}(u;\ \rho)+\frac{1}{2n}\,[P_n(u;\ \rho)-\\ \qquad -e^{2\rho\theta}P_{n-1}(u;\ \rho)], & n\geqslant 1\\ \eta_1(u;-\rho)\,R_{[\sigma]}(u;\rho)-e^{2\rho\theta}R_{[\sigma]}(u;-\rho), & n=0\\ [1-e^{-2\rho\theta}(u+2\rho\sin\theta)]\,R_{[\sigma]}(u;\ \rho)+\\ \qquad +\frac{u-2\rho\sin\theta-e^{-2\rho\theta}}{2}, & n=-1\\ e^{-2\rho\theta}\eta_{-n}(u;\ \rho)\,R_{[\sigma]}(u;\ \rho)-\frac{1}{2n}[P_{-n}(u;\ -\rho)-\\ \qquad -e^{-2\rho\theta}P_{-n-1}(u;-\rho)], & n<-1.\end{cases} \tag{23}$$

Вычисление $R_{[\sigma]}(u;\ \rho)$

$$R_{[\sigma]}(u;\ \rho)=\sum_{m\neq 0}\frac{(-1)^m}{m}R_m(u;\ \rho)=\frac{e^{2\rho\theta}}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}[P_m(u;\ \rho)-$$
$$-e^{-2\rho\theta}P_{m-1}(u;\ -\rho)].$$

Используя интегральные представления (17), а также учитывая, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\sin m\varphi=-\frac{\varphi}{2};\quad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m}\cos m\varphi=-\ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right), \tag{24}$$

получаем

$$R_{[\sigma]}(u;\ \rho)=e^{\rho\theta}\,[\mathrm{ch}\,(\pi\rho)]^{-1}\,\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\theta}\frac{\varphi\sin\left[\frac{\varphi}{2}+\rho\ln\frac{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}\right]}{\sqrt{2\,(\cos\varphi-\cos\theta)}}\,d\varphi. \tag{25}$$

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить профессора В. П. Шестопалова за руководство работой, а также канд. физ.-мат. наук Л. Н. Литвиненко за помощь в процессе выполнения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов. ЖТФ, 32, № 4, 1962.
2. А. Г. Гуревич, Ферриты на сверхвысоких частотах, Физматгиз, 1960.
3. А. Л. Микаэлян. Теория и применение ферритов на СВЧ.
4. P. S, Epstein, УФН, 65, № 2, 1958.
5. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, 1962.
6. F. Pollaczek, C. R. d'Ac. Sc., Paris, 228, стр. 1363, 1949.
7. A. B. J. Novikoff. Dissertation Stanford University. 1954.
8. Л. Н. Литвиненко. Автореф. канд. дисс. Харьков, 1965.