

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ E-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ НА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТКАХ

В. Е. Буданов, С. А. Масалов, В. П. Шестопалов

Дифракция плоской E-поляризованной волны на различных типах металлических решеток рассматривалась неоднократно [1]—[4]. Дифрагированные поля вокруг решетки представлялись в виде суперпозиции плоских волн (пространственных гармоник), одни из которых в зависимости от соотношения между длиной волны падающего поля и периодом решетки, затухали при удалении от решетки, а другие распространялись под определенными углами к плоскости решетки. В процессе решения задачи находились амплитуды и фазы пространственных гармоник и на этом решение задачи обычно заканчивалось. Однако при таком способе представления результатов трудно было судить о характере поля вокруг решетки и особенно вблизи нее даже в тех случаях, когда $x = \frac{l}{\lambda} < 1$ (l — период решетки, λ — длина волны падающего поля).

В значительной степени дело осложняется при $x \geq 1$. В этом случае распределение амплитуды, фазы и линий потока энергии в зависимости от геометрии решетки должны обладать специфическими свойствами, поскольку наряду с распространением основной волны начинают распространяться высшие типы волн.

В настоящей работе результат дифракции нормально падающей E-поляризованной волны на периодической металлической решетке представляется в виде амплитудного и фазового распределения поля в пространстве, окружающем решетку; приводятся линии среднего по времени потока энергии. Такой способ представления, пожалуй, является единственным при решении задач дифракции на решетках при наличии источников поля, находящихся на конечном расстоянии от решетки. Зная распределение полей в простейших случаях, можно качественно предугадать характер поля в случае более сложных видов дифракции (например, при дифракции на решетке электромагнитных волн, образованных движущимся электронным потоком).

Постановка задачи и ее решение.

1. На рисунках изображена периодическая решетка, образованная идеально проводящими брусками прямоугольного поперечного сечения. Со стороны $z > 0$ на решетку нормально падает плоская E-поляризованная электромагнитная волна единичной амплитуды, у которой $E_x^{\text{пад}} = \exp(-ikz)$, $E_y = E_z = 0$ (множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опу-

скается). Требуется найти поле, возникшее при дифракции этой волны на решетке. Решение над и под решеткой определяется в виде

$$E_x^+ = e^{-ikz} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(z-h)\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}} e^{i\frac{2\pi n}{l}y}; \quad z > h \quad (1)$$

$$E_x^- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{-i(z+h)\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2}} e^{i\frac{2\pi n}{l}y}; \quad z < -h. \quad (2)$$

Коэффициенты Фурье поля a_n и b_n отыскиваются с помощью методов, развитых в работах [2], [4] при $h = 0$ и [4] при $h \neq 0$. Как известно, в [2] нахождение a_n и b_n сведено к решению задачи Римана—Гильберта для некоторой аналитической функции; в итоге для a_n , b_n получена бесконечная система линейных неоднородных алгебраических уравнений, коэффициенты которой известным образом выражаются через геометрические параметры решетки и длину волны падающего поля. В работе [4] другим методом для нахождения a_n , b_n получена также бесконечная система уравнений. Для этих систем применим метод редукции. На ЭВМ произведены приближенные решения систем с точностью, позволяющей учесть влияние нераспространяющихся гармоник вблизи решетки. Для этого необходимо рассматривать системы достаточно высокого порядка (в наших расчетах выбирались системы 16-го порядка с комплексными коэффициентами).

2. Дальнейшие вычисления связаны с формулами (1), (2).

Так как волна падает на решетку нормально, то $a_n = a_{-n}$, $b_n = b_{-n}$. Это позволяет суммирование от $-\infty$ до $+\infty$ в (1) и (2) заменить суммированием от 0 до ∞ .

Полученные путем решения соответствующих систем уравнений комплексные коэффициенты a_n и b_n теперь подставляются в (1) и (2). Для различных z и y находятся значения амплитуды и фазы электрического поля над и под решеткой. Заметим, что построение произведено только для электрической компоненты поля, которая ведет себя вблизи ребер обычным образом, чего нельзя сказать о магнитном поле, которое имеет степенную особенность вблизи ребра.

Линии среднего по времени потока энергии (в дальнейшем будем говорить просто линии потока энергии) строятся следующим образом.

Для компонент усредненного по времени вектора потока энергии (эффективного потока энергии) имеем

$$S_y = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(E_x H_z^*),$$

$$S_z = -\frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}(E_x H_y^*).$$

Отсюда получается дифференциальное уравнение линий потока энергии

$$\frac{dz}{dy} = \frac{S_z}{S_y},$$

которое можно проинтегрировать, подставив значения S_z и S_y (H_z и H_y выражаются через E_x с помощью уравнений Максвелла).

Известно, что линии потока энергии для любой плоской задачи ортогональны к линиям равной фазы электрического поля. Воспользовавшись этим, приближенное распределение линий потока энергии можно получить графически. Для этого на большом расстоянии под решеткой, где существуют только распространяющиеся волны, одна из линий

равной фазы разбивается на несколько частей так, чтобы густота точек разбиения соответствовала плотности потока энергии в данном месте периода. Затем через точки разбиения проводятся линии, ортогональные к линиям равной фазы, и полученные линии являются линиями потока энергии.

Как показал опыт построения полей, таким приближенным методом построения линий потока энергии с успехом можно пользоваться для случаев $\kappa < 1$, когда картина поля довольно проста.

Тот факт, что множители при a_n и b_n в (1) и (2) симметричны по z , позволяет при численном расчете на ЭВМ значительно сократить время счета полей над и под решеткой.

В данной работе построены поля для ряда значений κ . С ростом κ построение полей становится все более затруднительным, так как, во-первых, надо решать соответствующие системы все более высокого порядка и, во-вторых, с укорочением длины волны структура поля становится все более мелкозернистой, в результате чего приходится перерабатывать довольно большой объем информации.

Анализ полей вблизи решетки

1. На рис. 1 $a, б, в$ изображено распределение на одном периоде решетки соответственно линий постоянной амплитуды электрического поля, фазы и потока энергии для $\kappa = \frac{l}{\lambda} = 0,5$, $\frac{d}{l} = 0,5$ и $h = 0$. Этот случай можно считать длинноволновым, так как длина волны падающего поля в два раза превышает период решетки и в спектре дифрагированных гармоник лишь одна, нулевая, является незатухающей. Модуль коэффициента отражения нулевой гармоники довольно велик ($|a_0| = 0,92$), поэтому, как и следовало ожидать, над решеткой при больших значениях z существует почти «чистая» стоячая волна с четко выраженными узлами и пучностями амплитуды. Фаза поля на промежутке между двумя соседними узлами меняется крайне медленно, а затем на малом интервале в районе узла быстро меняется почти на 180° (у стоячей волны происходит «прокидывание» фазы на 180°). Если у стоячей волны узлы E -поля находятся на расстоянии $p \frac{\lambda}{2}$ ($p = 0, 1, 2, \dots$) от отражающей плоскости, то в нашем случае они смещены ближе к решетке на величину, которую обозначим Δz . Найдем Δz .

Так как падающая волна отражается от решетки с комплексным коэффициентом отражения $a_0 = -|a_0|e^{i\varphi}$, то на достаточно больших расстояниях от решетки, где затухающими гармониками можно пренебречь, электрическое поле имеет вид

$$E_x^+ = e^{-ikz} + a_0 e^{ikz} = e^{-ikz} - |a_0| e^{ikz + i\varphi}, \quad z > \lambda. \quad (3)$$

Средний по времени квадрат амплитуды поля

$$|E_x^+|^2 = 1 + |a_0|^2 - 2|a_0| \cos(2kz + \varphi)$$

показывает, что распределение узлов над решеткой таково, как если бы первый узел находился при $z = -\frac{\varphi}{2k}$, т. е. $\Delta z = \frac{\varphi}{2k}$. Пучности поля расположены на расстоянии $\frac{\lambda}{4}$ от узлов.

Над и под решеткой при больших $|z|$ линии равной фазы и амплитуды параллельны оси Oy , линии потока энергии параллельны оси Oz

и равномерно распределены по периоду. Значит, для наблюдателя, находящегося далеко от решетки, в случае, когда длина волны нормально падающего поля больше периода решетки, последняя представляется однородным полупрозрачным зеркалом.

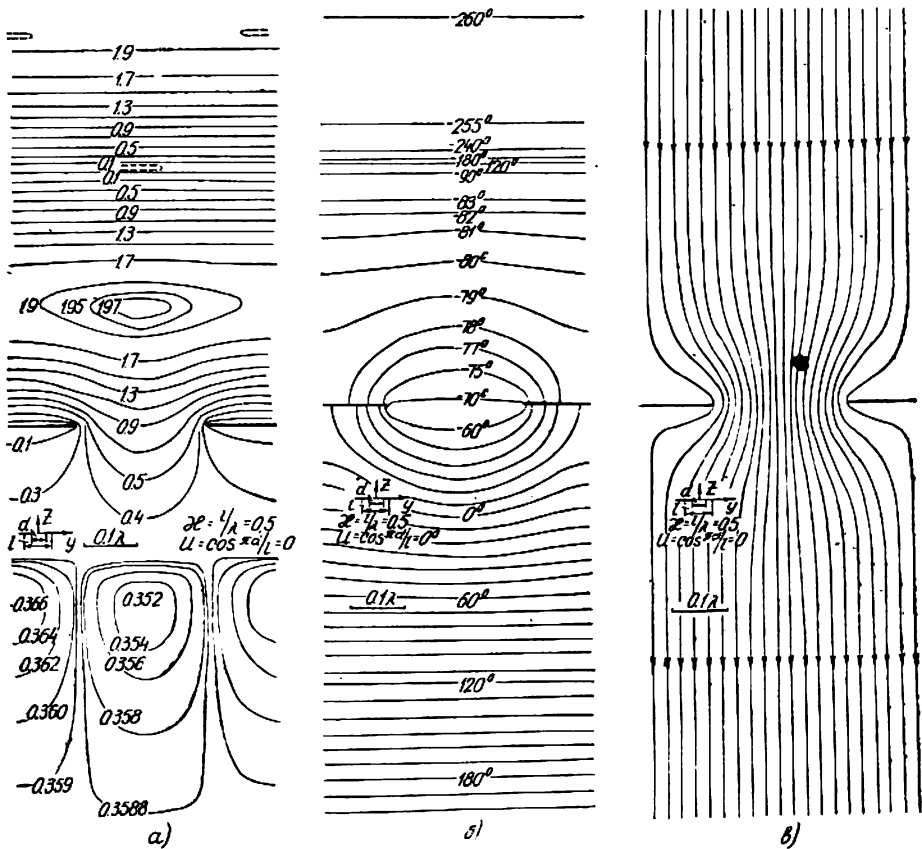


Рис. 1.

Нужно заметить, что решетка меняет фазу прошедшей волны — она как бы «ускоряет» ее. Если бы решетка отсутствовала, то на линии $z = 0$ была бы линия нулевой фазы; в нашем же случае она сместилась вниз под решетку на довольно значительное расстояние. Поле прошедшей волны при больших $|z|$ запишется

$$E_x^- = b_0 e^{-ikz} = |b_0| e^{-ikz + i\psi},$$

где ψ и есть разность фаз между падающей и прошедшей волной, которую вносит наличие решетки.

При малых $|z|$ картина поля заметно отличается от картины поля при больших $|z|$. Линии постоянной амплитуды перестают быть параллельными оси Oy и часть из них как бы продавливается в щель под решетку. Другая часть замкнута вокруг лент решетки. Область тени под лентами выражена нечетко, что является характерным для длинноволновой области. Над щелью образовался обособленный участок с замк-

нутыми линиями равной амплитуды — своеобразный «амплитудный холм», в центре которого при $z = \frac{\lambda}{4} - \Delta z$ интенсивность поля достигает максимума. Аналогичный участок, но уже «амплитудная впадина», существует над щелью при $z = \frac{\lambda}{2} - \Delta z$ (из-за малости «впадина» схематично изображена пунктирной линией). Подобные «холмы» и «впадины» появляются также и над лентами, но с ростом z размеры их очень быстро уменьшаются и при $z > 2\lambda$ поле подчиняется формуле (3).

Прошедшая волна становится практически плоской при $z < -\frac{\lambda}{2}$. Этот вывод можно сделать из того, что линии постоянной фазы параллельны оси Oy , линии потока энергии параллельны оси Oz и равномерно распределены по периоду, и амплитуда с точностью до 3-го знака постоянна во всем полупространстве $z < -\frac{\lambda}{2}$.

Однако линии постоянной амплитуды вблизи решетки оказываются замкнутыми, т. е. образуются амплитудные «холмы» и «впадины». Разность же между максимумом и минимумом амплитуды у них мала, а с ростом она быстро стремится к нулю, т. е. волна становится чисто плоской.

При $\kappa < 2$ основной вклад в поле под решеткой вносят нулевая и ± 1 -ые гармоники, т. е. приближенно поле можно записать

$$E_x^- = b_0 e^{-ikz} + 2b_1 e^{-i\sqrt{k^2 - \left(\frac{2\pi}{l}\right)^2} z} \cos y \frac{2\pi}{l}.$$

На прямых $y = \frac{l}{4} + \frac{n l}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) второй член обращается в нуль, следовательно на этих линиях амплитуда равняется $|b_0|$. Эти прямые являются своеобразными границами между «холмами» и «впадинами» при $\kappa < 2$, причем эти границы не зависят от параметров решетки.

Для $\kappa = 0,5$ были построены поля при следующих значениях параметров: 1) $\frac{d}{l} = 0,75$, $h = 0$; 2) $\frac{d}{l} = 0,75$, $h = \frac{l}{20}$; 3) $\frac{d}{l} = 0,5$, $h = \frac{l}{4}$. Оказалось, что с увеличением h поля мало отличаются от рассмотренного выше случая, когда $h = 0$. В тех же местах над и под решеткой образуются «холмы» и «впадины» и при $h \neq 0$ картины поля как бы «раздвигаются» вверх и вниз на величину h . Тот же характер имеют линии потока энергии. Только размеры «холмов» и «впадин» и величина амплитуды в максимальных и минимальных точках над и под решеткой несколько изменяются. Это отличие вытекает за счет того, что a_n и b_n для каждого из указанных вариантов имеют разные значения. Так, с ростом h или уменьшением $\frac{d}{l} |a_0|$ растет, поэтому растет максимум поля над щелью (1,9 при $h = 0$, $\frac{d}{l} = 0,5$ и 2,3 при $h = \frac{l}{4}$, $\frac{d}{l} = 0,5$). С ростом $\frac{d}{l} |a_0|$ уменьшается, и максимум поля над щелью также уменьшается (1,78 при $h = 0$ и $\frac{d}{l} = 0,75$).

2. С ростом κ постоянные затухания нераспространяющихся гармоник будут уменьшаться, размеры «холмов» и «впадин» будут расти, экстремумы поля будут все более отчетливыми и при $\kappa = 1$ мы получим картину, изображенную на рис. 2 а, б, в ($\frac{d}{l} = 0,5$, $h = 0$).

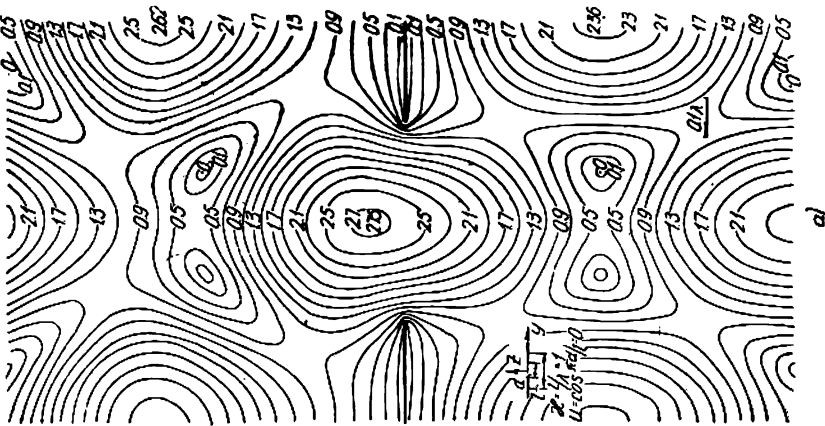
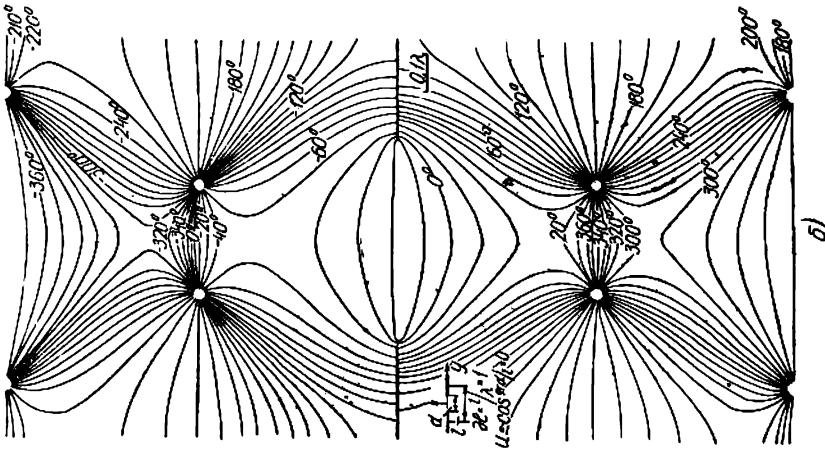
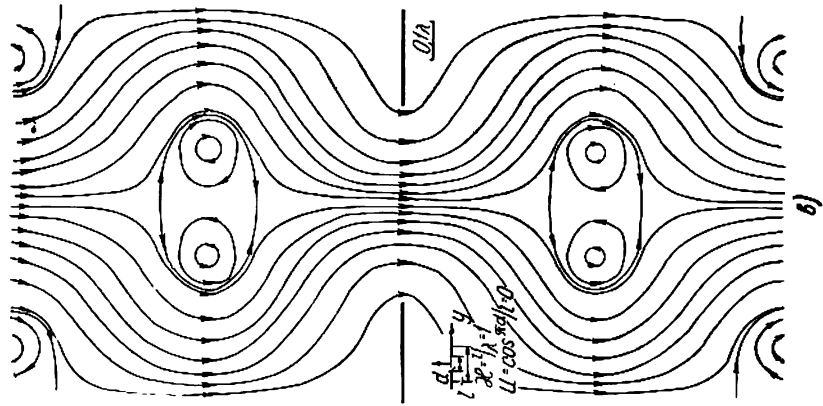


Рис. 2.

При $\kappa = 1$, кроме нулевой распространяющейся гармоники и быстро затухающих ± 2 -й, ± 3 -й и т. д. гармоник, существуют незатухающие -1 -я и $+1$ -я гармоники, распространяющиеся вдоль оси Oy навстречу друг другу. Интерферируя, они образуют стоячие волны. Именно эти волны накладывают такой оригинальный характер на картину поля. Как видно из рис. 2, в, над и под решеткой, при $z = \pm \frac{n\lambda}{2}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) образовались двойные вихри потока энергии, причем они появляются то над и под щелями, то над и под лентами. Вихри всегда двойные, и это ни в коей мере не противоречит тому физическому факту, что не должно быть ни одной трубки тока на периоде, которая уносила бы энергию вверх на бесконечность.

Центрами вихрей являются точки неопределенностей фазы, т. е. точки, в которой сходятся линии постоянной фазы, и амплитуда поля в этих точках равна нулю. Существуя попарно, вихри занимают вполне определенную площадь (на рис. 2, в это площадь, ограниченная эллипсами) и энергетически не связаны с окружающим пространством. Мы рассматриваем установившийся процесс, и можно сказать, что вихри, зародившись в момент времени $t = -\infty$, запасли определенное количество энергии и существуют обособленно. Поток энергии, падающей со стороны $z > 0$, плавно «обтекает» двойные вихри так же, как он «обтекает» ленты решетки.

Под решеткой точки с максимальной и нулевой амплитудой лежат на прямых $z = -n \frac{\lambda}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Над решеткой точки нулевой амплитуды лежат при $z = n \frac{\lambda}{2}$, а точки с максимальной амплитудой несколько смещены вверх. При $\kappa = 1$ коэффициент прохождения довольно высок $-|b_0| = 0,947$. Именно этим можно объяснить некоторое различие картины поля над и под решеткой. Были построены поля для $\kappa = 1$, $\frac{a}{T} = 0,75$ и $h = 0$. При этом $|a_0|$ ничтожно мал, и картины поля над и под решеткой симметричны относительно решетки; характер же их в общем не отличается от картины поля для рассматриваемого случая.

Отметим, что амплитуда поля над и под лентами при малых $|z|$ незначительно отличаются друг от друга, т. е. область тени под лентами отсутствует.

За счет влияния затухающих гармоник поля вблизи решетки несколько отличаются от полей на больших расстояниях от нее.

Наличие толщины у брусьев решетки (рис. 3) также существенно не меняет общего распределения полей. При $z > h$ амплитудное распределение имеет периодическую структуру с почти квадратными ячейками; на границах ячеек амплитуда очень мала, а в центрах их она почти достигает значения (4). Такой характер структуры связан с тем, что происходит сложение двух попарно перпендикулярных волн практически

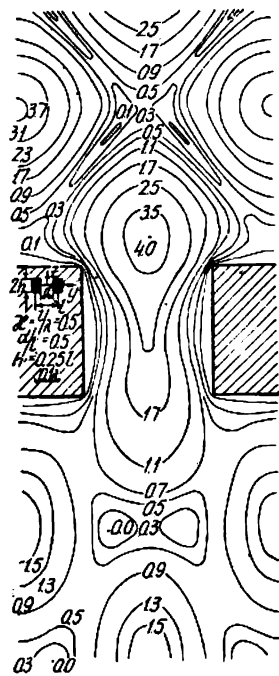
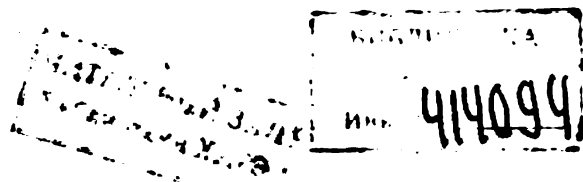


Рис. 3



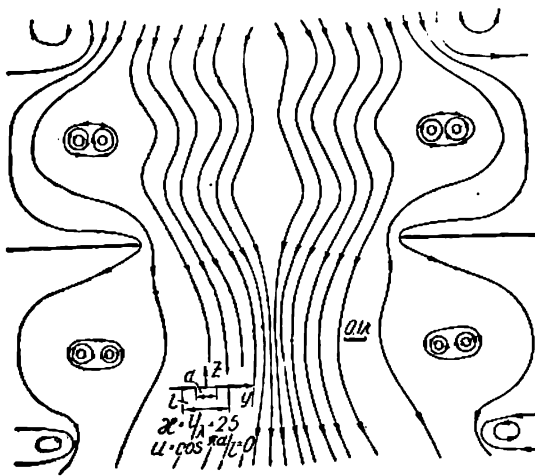
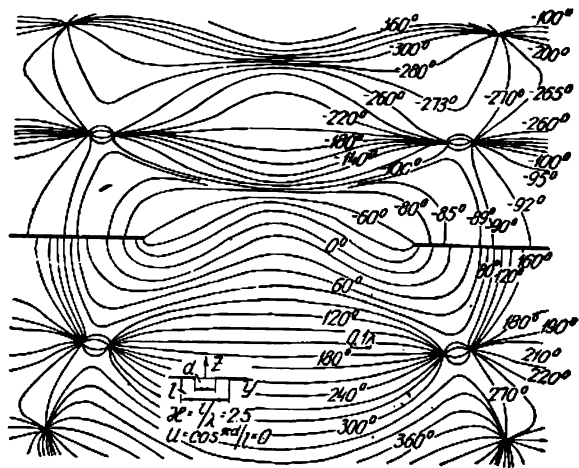
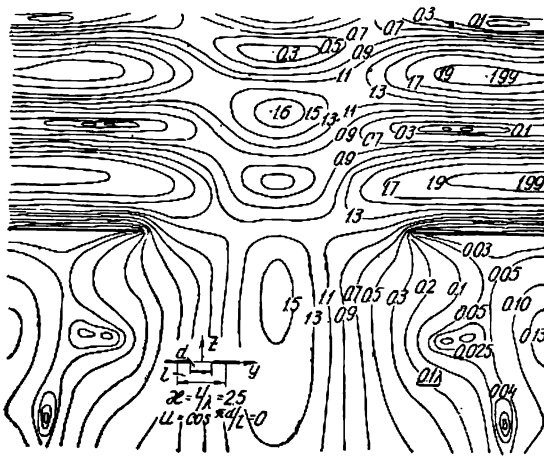


Рис. 4.

с единичной амплитудой каждая: падающей, отраженной и двух встречных скользких ($|a_0| = 0,75$, $|a_1| = 1$).

3. Распределение амплитуд, фаз и потока энергии для $\kappa = 2,5$, $\frac{d}{T} = 0,5$ и $h = 0$ представлены на рис. 4 а, б, в. Длина волны уже в 2,5 раза меньше периода решетки, поэтому этот случай можно считать переходным к коротковолновой области.

В спектре дифрагированных гармоник уже пять являются незатухающими. Вблизи над лентами существует явно выраженная стоячая волна. Это хорошо видно из амплитудно-фазового распределения. Максимумы и минимумы амплитуды поля расположены практически на одинаковом расстоянии от металла, как если бы вместо решетки была идеально отражающая плоскость. Изменения фазы также схожи по своему характеру со скачкообразным изменением фазы при отражении от плоскости. Такое практическое совпадение в обоих случаях амплитуд и фаз имеет место только вблизи лент, по мере же увеличения расстояния от поверхности различие становится все более заметным. Различие прежде всего сказывается на месторасположении максимумов и минимумов амплитуды. С удалением от решетки область с четко выраженной стоячей волной быстро уменьшается. При $z > \lambda$ над щелью вдоль оси Oz амплитуда и фаза также меняются по законам стоячих волн.

В общем же, при $\kappa > 1$ амплитудное и фазовое распределение в любом сечении, параллельном оси Oz, имеет вид стоячей волны, которая над щелью сдвинута несколько вниз.

Под лентами явно заметна почти прямоугольная область тени, где интенсивность поля на порядок меньше интенсивности под щелью.

Под центром щели при $z = -0,3\lambda$ расположен максимум поля, что хорошо согласуется с картиной поля, построенной по методу Френеля [5], так как при $z = -0,3\lambda$ первая зона Френеля полностью укладывается в раскрыве щели (при $\kappa < 2$ первая зона Френеля при любых $|z|$ не помещается на ширине щели). В этой же точке наблюдается и максимальная плотность потока энергии. Ниже этой точки амплитуда поля и поток энергии начинают относительно быстро рассредоточиваться по всему периоду. Максимум интенсивности под лентами при $z = -\frac{\lambda}{2}$ также хорошо согласуется с теорией Френеля.

С ростом $|z|$ область тени под лентами теряет свою прямоугольную форму, сужается и при некотором $|z|$ исчезает. Однако равномерной «освещенности» при любом $|z|$ на всем периоде не наступит. Области с максимальной и минимальной амплитудой будут с ростом $|z|$ как-то квазипериодически повторяться. Это следует из записи поля при больших $|z|$.

Заметим еще, что если при $\kappa = 0,5$ решетка довольно сильно «ускоряет» E-поляризованную волну, то при $\kappa > 1$ нуль фазы дифрагированного поля практически находится в плоскости решетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн. ЖТФ, 1955, 25, 5, 128.
2. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопапов. ЖТФ, 1962, 32, 4, 382.
3. В. В. Малин. «Радиотехника и электроника», 1963, 8, 4, 564.
4. С. А. Масалов, И. Е. Тарапов. «Радиотехника и электроника», 1964, 9, 1, 53.
5. Г. Д. Малюжинец. УФН, 1959, 59, 2.