НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ H-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПЕРИОДИЧЕСКУЮ РЕШЕТКУ, СОСТАВЛЕННУЮ ИЗ БРУСЬЕВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В. Г. Сологуб

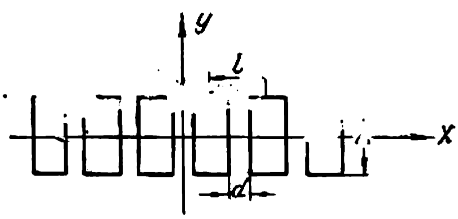
1. На решетку, состоящую из идеально проводящих брусьев (см. рис.), со стороны $y < 0$ под углом ψ падает плоская волна

$$H_z^0 = e^{ik(\alpha x + \beta y)}; \quad E_x^0 = -\beta e^{ik(\alpha x+\beta y)},$$

$$E_y^0 = \alpha e^{ik(\alpha x+\beta y)}; \quad H_x^0 = H_y^0 = E_z^0 = 0.$$

Здесь $\alpha = \cos\psi$, $\beta = \sin\psi$.

Дифрагированное поле в этом случае будет определяться единственной, отличной от нуля, z — составляющей магнитного поля H_z по формулам



$$E_x = -\frac{1}{ik}\frac{\partial H_z}{\partial y};$$

$$E_y = \frac{1}{ik}\frac{\partial H_z}{\partial y}; \quad E_z = H_x = H_y = 0.$$

При этом

$$H_z = H_z(x, y) = H_z^0(x, y) + u(x, y),$$

где $u(x, y)$ в области, дополнительной к брусьям, удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{1}$$

при $|y| \to \infty$ представляется в виде волн, расходящихся от решетки, и такова, что на брусьях выполняется условие

$$\frac{\partial H_z}{\partial \nu} = 0, \tag{1'}$$

где $\vec{\nu}$ — внешняя нормаль к поверхности отдельного бруска.

Последнее условие следует из обращения в нуль на брусьях тангенциальных к ним составляющих электрического поля.

Начало декартовой системы координат поместим в середину одной из щелей между брусьями так, что область

$$|x - nl| < \frac{d}{2} \quad |y| \leqslant \frac{\Delta}{2} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

займут щели.

Симметрия и периодичность области позволяют $H_z(x, y)$ представить в виде

$$H_z(x, y) = \begin{cases} e^{ik(\alpha x+\beta y)} + e^{ik\alpha x} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{p_n\left(y+\frac{\Delta}{2}\right)} e^{i\frac{2\pi}{l}nx}, \text{для } y \leqslant -\frac{\Delta}{2} \\ e^{ik\alpha nl} \sum\limits_{m=0}^{\infty} (b_m e^{-q_m y} + c_m e^{q_m y}) \cos\frac{\pi m}{d}\left(x + \frac{d}{2}\right), \text{для } |y| \leqslant \frac{\Delta}{2}. \\ |x - nl| < \frac{d}{2} \\ e^{ik\alpha x} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{-p_n\left(y-\frac{\Delta}{2}\right)} e^{i\frac{2\pi}{l}nx} \quad \text{для } y \geqslant \frac{\Delta}{2}, \end{cases} \tag{2}$$

где $p_n = -i\sqrt{k^2 - h_n^2}$, $h_n = k\alpha + \frac{2\pi}{l}n$

$$q_m = -i\sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2},$$

причем знак p_n и q_m выбран так, что $\mathrm{Re}\, ip_n \geqslant 0$ и $\mathrm{Re}\, iq_m \geqslant 0$, и когда $\mathrm{Re}\, ip_n = 0$ или $\mathrm{Re}\, iq_m = 0$, то $\mathrm{Im}\, ip_n \geqslant 0$ и $\mathrm{Im}\, iq_m \geqslant 0$.

Задача состоит в определении коэффициентов a_n, d_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ b_m, c_m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Для этого воспользуемся граничным условием (1′) и условиями, которые следуют из того, что всюду вне брусьев $H_z(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1) — непрерывность $H_z(x, y)$ и $\frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y}$ при $y = \pm\frac{\Delta}{2}$; $|x - nl| < \frac{d}{2}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Заметим прежде всего, что представление в виде (2) автоматически удовлетворяет условию (1′) при $x = \pm\frac{\partial}{2} + nl$ $|y| < \frac{\Delta}{2}$. Удовлетворяя остальным условиям, придем к следующим уравнениям, которым должны удовлетворять коэффициенты a_n, d_n, b_m и c_m:

$$e^{ik\alpha x}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} + ik\beta e^{-ik\beta\frac{\Delta}{2}}\right] = 0, \quad \frac{d}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{l}{2} \tag{3$_1$}$$

$$e^{ik\alpha x}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n p_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} + ik\beta e^{-ik\beta\frac{\Delta}{2}}\right] = -\sum_{m=0}^{\infty} q_m \left(b_m e^{q_m\frac{\Delta}{2}} - c_m e^{-q_m\frac{\Delta}{2}}\right) \times$$
$$|x| < \frac{d}{2}$$
$$\times \cos\frac{\pi m}{d}\left(x + \frac{d}{2}\right) \tag{3$_2$}$$

$$e^{ik\alpha x}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} + e^{-ik\beta\frac{\Delta}{2}}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \left(b_m e^{q_m\frac{\Delta}{2}} + c_m e^{-q_m\frac{\Delta}{2}}\right) \times$$
$$\times \cos\frac{\pi m}{d}\left(x + \frac{d}{2}\right), \ |x| < \frac{d}{2} \tag{3$_3$}$$

$$e^{ik\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n p_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = 0, \quad \frac{d}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{l}{2} \tag{3$_4$}$$

$$e^{ik\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n p_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = \sum_{m=0}^{\infty} q_m \left(b_m e^{-q_m\frac{\Delta}{2}} - c_m e^{q_m\frac{\Delta}{2}}\right) \cos\frac{\pi m}{d}\left(x + \frac{d}{2}\right) \tag{3$_5$}$$
$$|x| < \frac{d}{2}$$

$$e^{ik\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(b_m e^{-q_m\frac{\Delta}{2}} + c_m e^{q_m\frac{\Delta}{2}}\right) \cos\frac{\pi m}{d}\left(x - \frac{d}{2}\right) \tag{3$_6$}$$
$$|x| < \frac{d}{2}$$

Подобные уравнения были получены в работе [1]. Определенным образом они сводились к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений первого рода, для которой проводилось численное решение.

Ниже будет рассмотрен способ сведения уравнений (3) к двум бесконечным системам линейных алгебраических уравнений второго рода, которые используются в дальнейшем для выяснения асимптотического, при определенных условиях, поведения $H_z(x, y)$.

2. Введем новые неизвестные коэффициенты по таким формулам:

$$\begin{aligned} x_n &= a_n + d_n \quad & z_m &= -2(b_m + c_m) \\ y_n &= a_n - d_n \quad & \zeta_m &= -2(b_m - c_m). \end{aligned} \tag{4}$$

Складывая уравнения (3_1, 3_2) и (3_3) соответственно с уравнениями (3_4), (3_5) и (3_6), получим следующую систему для определения x_n и z_m ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $m = 0, 1, 2, \ldots$):

$$e^{ik\alpha x}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n p_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} + ik\beta e^{-ik\beta\frac{\Delta}{2}}\right] = 0 \quad \frac{d}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{l}{2} \tag{5_1}$$

$$e^{ik\alpha x}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n p_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} + ik\beta e^{-ik\beta\frac{\Delta}{2}}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} z_m q_m \operatorname{sh} q_m \frac{\Delta}{2} \cos\frac{\pi m}{d}\left(x + \frac{d}{2}\right) \quad |x| < \frac{d}{2} \tag{5_2}$$

$$e^{ik\alpha x}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} + e^{-ik\beta\frac{\Delta}{2}}\right] = -\sum_{m=0}^{\infty} z_m \operatorname{ch} q_m \frac{\Delta}{2} \cos\frac{\pi m}{d}\left(x + \frac{d}{2}\right) \quad |x| < \frac{d}{2}, \tag{5_3}$$

Точно также, вычитая из уравнений (3_1), (3_2), (3_3) соответственно уравнения (3_4), (3_5), (3_6), придем к системе, определяющей коэффициенты y_n и ζ_m ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $m = 0, 1, 2, \ldots$):

$$e^{ik\alpha x}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n p_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} + ik\beta e^{-ik\beta\frac{\Delta}{2}}\right] = 0 \quad \frac{d}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{l}{2} \tag{6_1}$$

$$e^{ik\alpha x}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n p_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} + ik\beta e^{-ik\beta\frac{\Delta}{2}}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \zeta_m q_m \operatorname{ch} q_m \frac{\Delta}{2} \cos\frac{\pi m}{d}\left(x + \frac{d}{2}\right) \quad |x| < \frac{d}{2} \tag{6_2}$$

$$e^{ik\alpha x}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{i\frac{2\pi}{l}nx} + e^{-ik\beta\frac{\Delta}{2}}\right] = -\sum_{m=0}^{\infty} \zeta_m \operatorname{sh} q_m \frac{\Delta}{2} \cos\frac{\pi m}{d}\left(x + \frac{d}{2}\right) \quad |x| < \frac{d}{2} \tag{6_3}$$

Рассмотрим сначала систему (5). Из уравнений (5_1) и (5_2) этой системы находим

$$x_n p_n = \frac{2}{l} h_n \sum_{m=0}^{\infty} e^{im\frac{\pi}{2}} z_m q_m \operatorname{sh} q_m \frac{\Delta}{2} \frac{\sin\left(h_n - \frac{\pi m}{d}\right)\frac{d}{2}}{h_n^2 - \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2} - ik\beta e^{-ik\beta\frac{\Delta}{2}} \delta_0^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{7}$$

Из уравнения (5_3) выразим z_m через x_s

$$z_m \operatorname{ch} q_m \frac{\Delta}{2} = -\frac{2}{d}(2-\delta_0^n)e^{im\frac{\pi}{2}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} x_s \frac{h_s \sin\left(h_s - \frac{\pi m}{d}\right)\frac{d}{2}}{h_s^2 \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2} - \frac{2}{d}(2-\delta_0^m) \times$$

$$\times e^{-im\frac{\pi}{2}} \frac{ka \sin\left(ka - \frac{\pi m}{d}\right)\frac{d}{2}}{(ka)^2 - \left(\frac{\pi m}{d}\right)^2}; \quad (m = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Подставляя эти выражения для z_m в уравнения (7), получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода относительно x_n:

$$x_n - \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_{ns} x_s = \gamma_n \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots), \tag{8}$$

где

$$P_{ns} = P_{ns}^{(0)} + P_{ns}^{(1)}, \quad \gamma_n = \gamma_n^{(0)} + \gamma_n^{(1)},$$

причем

$$P_{ns}^{(0)} = \frac{i}{\pi} \varkappa\theta \operatorname{tg} \varkappa\delta \frac{\sin(n+\alpha\varkappa)\theta \sin(s+\alpha\varkappa)\theta}{\sqrt{\varkappa^2 - (n+\alpha\varkappa)^2}\,(n+\alpha\varkappa)(s+\alpha\varkappa)\theta^2}$$

$$P_{ns}^{(1)} = -i\frac{16}{\pi^4}\theta^2 \frac{(n+\alpha\varkappa)(s+\alpha\varkappa)}{\sqrt{\varkappa^2-(n+\alpha\varkappa)^2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m^2 - \left(\frac{2}{\pi}\varkappa\theta\right)^2} \operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2}\frac{\delta}{\theta} \times\right.$$

$$\left.\times \sqrt{m^2 - \left(\frac{2}{\pi}\varkappa\theta\right)^2}\right) \frac{\sin\left[m - \frac{2}{\pi}(n+\alpha\varkappa)\theta\right]\frac{\pi}{2} \sin\left[m - \frac{2}{\pi}(s+\alpha\varkappa)\theta\right]\frac{\pi}{2}}{\left[m^2 - \frac{4}{\pi^2}\theta^2(n+\alpha\varkappa)^2\right]\left[m^2 - \frac{4}{\pi^2}\theta^2(s+\alpha\varkappa)^2\right]}$$

$$\gamma_n^{(0)} = e^{i\beta\varkappa\delta}\delta_0^n + \frac{i}{\pi}\varkappa\theta \operatorname{tg}\varkappa\delta e^{-i\beta\varkappa\delta} \frac{\sin\alpha\varkappa\theta \cdot \sin(n+\alpha\varkappa)\theta}{\sqrt{\varkappa^2-(n+\alpha\varkappa)^2}\,\alpha\varkappa(n+\alpha\varkappa)\theta^2}$$

$$\gamma_n^{(1)} = -i\frac{16}{\pi^4}\theta^2 e^{-i\beta\varkappa\delta} \frac{\alpha\varkappa(n+\alpha\varkappa)}{\sqrt{\varkappa^2-(n+\alpha\varkappa)^2}} \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{m^2 - \left(\frac{2}{\pi}k\theta\right)^2} \operatorname{th} \times$$

$$\times \left(\frac{\pi}{2}\frac{\delta}{\theta}\sqrt{m^2 - \left(\frac{2}{\pi}\varkappa\theta\right)^2}\right) \frac{\sin\left[m - \frac{2}{\pi}(n+\alpha\varkappa)\theta\right]\frac{\pi}{2}\sin\left[m - \frac{2}{\pi}\alpha\varkappa\theta\right]\frac{\pi}{2}}{\left[m^2 - \frac{4}{\pi^2}\theta^2(n+\alpha\varkappa)^2\right]\left(m^2 - \frac{4}{\pi^2}\theta^2\alpha^2\varkappa^2\right)}$$

$$\theta = \frac{\pi d}{l}; \quad \varkappa = \frac{kl}{2\pi}; \quad \delta = \frac{\pi\Delta}{l}; \quad \delta_0^n = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0 \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Тем же способом, из системы (6) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для y_n:

$$y_n - \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q_{ns} y_s = \varepsilon_n \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots), \tag{9}$$

где

$$Q_{ns} = Q_{ns}^{(0)} + Q_{ns}^{(1)}; \quad \varepsilon_n = \varepsilon_n^{(0)} + \varepsilon_n^{(1)}$$

и

$$Q_{ns}^{(0)} = -\frac{i}{\pi}\varkappa\theta \operatorname{ctg}\varkappa\delta \frac{\sin(n+\alpha\varkappa)\theta \sin(s+\alpha\varkappa)\theta}{\sqrt{\varkappa^2-(n+\alpha\varkappa)^2}(n+\alpha\varkappa)(s+\alpha\varkappa)\theta^2}$$

$$Q_{ns}^{(1)} = -i\frac{16}{\pi^4}\theta^2\frac{(n+\alpha\varkappa)(s+\alpha\varkappa)}{\sqrt{\varkappa^2-(n+\alpha\varkappa)^2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{m^2-\left(\frac{2}{\pi}\varkappa\theta\right)^2}\operatorname{cth}\left(\frac{\pi}{2}\frac{\delta}{\theta}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{m^2-\left(\frac{2}{\pi}\varkappa\theta\right)^2}\right)\frac{\sin\left[m-\frac{2}{\pi}(n+\alpha\varkappa)\theta\right]\frac{\pi}{2}\sin\left[m-\frac{2}{\pi}(s+\alpha\varkappa)\theta\right]\frac{\pi}{2}}{\left[m^2-\frac{4}{\pi^2}\theta^2(n+\alpha\varkappa)^2\right]\left[m^2-\frac{4}{\pi^2}\theta^2(s+\alpha\varkappa)^2\right]}$$

$$\varepsilon_n^{(0)} = e^{-i\beta\varkappa\delta}\delta_o^n - \frac{i}{\pi}\varkappa\theta\operatorname{ctg}\varkappa\delta e^{-i\beta\varkappa\delta}\frac{\sin\alpha\varkappa\theta\sin(n+\alpha\varkappa)\theta}{\sqrt{\varkappa^2-(n+\alpha\varkappa)^2}\,\alpha\varkappa(n+\alpha\varkappa)\theta^2}$$

$$\varepsilon_n^{(1)} = -i\frac{16}{\pi^4}\theta^2 e^{-i\beta\varkappa\delta}\frac{\alpha\varkappa(n+\alpha\varkappa)}{\sqrt{\varkappa^2-(n+\alpha\varkappa)^2}}\sum_{m=1}^{\infty}\sqrt{m^2-\left(\frac{2}{\pi}\varkappa\theta\right)^2}\operatorname{cth}\left(\frac{\pi}{2}\frac{\delta}{\theta}\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{m^2-\left(\frac{2}{\pi}\varkappa\theta\right)^2}\right)\frac{\sin\left[m-\frac{2}{\pi}(n+\alpha\varkappa)\theta\right]\frac{\pi}{2}\sin\left(m-\frac{2}{\pi}\alpha\varkappa\theta\right)\frac{\pi}{2}}{\left[m^2-\frac{4}{\pi^2}\theta^2(n+\alpha\varkappa)^2\right]\left(m^2-\frac{4}{\pi^2}\theta^2\alpha^2\varkappa^2\right)}.$$

3. Исследуем системы (8) и (9) для случая, когда $\theta=\frac{\pi d}{l}\to 0$, т. е. когда щель между брусьями мала по сравнению с периодом решетки. Кроме того, будем считать, что $l\to 0$, так что $\varkappa=\frac{kl}{2\pi}\to 0$.

Рассматривая систему (8), представим ее решение в виде

$$x_n = x_n^{(0)} + x_n^{(1)},$$

где $x_n^{(0)}$ — решение системы

$$x_n^{(0)} - \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_{ns}^{(0)}x_s^{(0)} = \gamma_n^{(0)} \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots), \tag{10}$$

а $x_n^{(1)}$ удовлетворяют уравнениям

$$x_n^{(1)} - \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_{ns}x_s^{(1)} = \gamma_n^{(1)} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_{ns}^{(1)}x_s^{(0)} \quad (n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots). \tag{11}$$

Решение системы (10) может быть получено в явном виде. Обозначим

$$\mu = \frac{i\varkappa\theta\operatorname{tg}\varkappa\delta}{\pi - i\varkappa\theta\operatorname{tg}\varkappa\delta\displaystyle\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(s+\alpha\varkappa)\theta}{\sqrt{\varkappa^2-(s+\alpha\varkappa)^2}(s+\alpha\varkappa)^2\theta^2}}.$$

Тогда, как легко проверить,

$$x_n^{(0)} = e^{-i\beta\varkappa\delta}\delta_0^n + 2\mu\frac{\sin\alpha\varkappa\theta}{\alpha\varkappa\theta}\frac{\sin(n+\alpha\varkappa)\theta}{\sqrt{\varkappa^2-(n+\alpha\varkappa)^2}(n+\alpha\varkappa)\theta}.$$

Подставляя эти значения для $x_n^{(0)}$ в выражения для правых частей в (11), можно получить следующее:

$$\left|\gamma_n^{(1)} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_{ns}^{(1)}x_s^{(0)}\right| < C\theta(|\mu|+\theta)\frac{\ln\left(\frac{1}{2}+|n|\theta\right)}{\left(\frac{1}{2}+|n|\theta\right)^2}, \tag{12}$$

где C — абсолютная константа.

Аналогично y_n могут быть представлены в виде $y_n = y_n^{(0)} + y_n^{(1)}$, где

$$y_n^{(0)} = e^{-i\beta\varkappa\delta}\delta_0^n + 2\tau e^{-i\beta\varkappa\delta}\frac{\sin\alpha\varkappa\theta}{\alpha\varkappa\theta}\frac{\sin(n+\alpha\varkappa)\theta}{\sqrt{\varkappa^2-(n+\alpha\varkappa)^2}\,(n+\alpha\varkappa)\theta}$$

$$\tau = -\frac{i\varkappa\theta\operatorname{ctg}\varkappa\delta}{\pi + i\varkappa\theta\operatorname{ctg}\varkappa\delta\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(s+\alpha\varkappa)\theta}{\sqrt{\varkappa^2-(s+\alpha\varkappa)^2}\,(s+\alpha\varkappa)^2\theta^2}},$$

а $y_n^{(1)}$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$y_n^{(1)} - \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q_{ns}y_s^{(1)} = \varepsilon_n^{(1)} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q_{ns}^{(1)}y_s^{(0)}\colon\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

для правых частей которых выполняются неравенства

$$\left|\varepsilon_n^{(1)} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} Q_{ns}^{(1)}y_s^{(0)}\right| < C\theta\,(|\tau| + \theta)\frac{\ln\left(\frac{1}{2}+|n|\theta\right)}{\left(\frac{1}{2}+|n|\theta\right)^2}.$$

Пусть $\theta \to 0$ и $\varkappa \to 0$, так что существуют такие пределы:

$$\lim_{\substack{\theta\to 0\\ \varkappa\to 0}}\frac{1}{\pi}\theta\operatorname{ctg}\varkappa\delta = p;\quad \lim_{\substack{\theta\to 0\\ \varkappa\to 0}}\frac{1}{\pi}\theta\operatorname{tg}\varkappa\delta = q;$$

при этом

$$\lim_{\substack{\theta\to 0\\ \varkappa\to 0}} - 2\varkappa\ln\sin\frac{\theta}{2} = kQ$$

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2(s+\alpha\varkappa)\theta}{\sqrt{\varkappa^2-(s+\alpha\varkappa)^2}\,(s+\alpha\varkappa)^2\theta^2} = \frac{1}{\varkappa\beta}\frac{\sin^2\alpha\varkappa\theta}{(\alpha\varkappa\theta)^2} -$$

$$-i\sum_{s\neq 0}\frac{\sin^2(s+\alpha\varkappa)\theta}{\sqrt{(s+\alpha\varkappa)^2-\varkappa^2}\,(s+\alpha\varkappa)^2\theta^2} = \frac{1}{\varkappa\beta} + 2i\ln\sin\frac{\theta}{2} + O(1)$$

и, следовательно,

$$\mu = \frac{iq\varkappa\beta}{\beta - iq - k\beta Qq} + O(\varkappa)^2$$

$$\tau = \frac{-ip\varkappa\beta}{\beta + ip + k\beta Qp} + O(\varkappa^2). \tag{14}$$

Возвращаясь к системе (13), замечаем, что она отличается от системы (8) только правой частью, которая в силу (12) и (14) стремится к нулю при $\theta \to 0$ и $\varkappa \to 0$. Поэтому, предполагая разрешимость системы (8), можно считать, что

$$x_n^{(1)} \underset{\substack{\theta\to 0\\ \varkappa\to 0}}{\to} 0.$$

Точно так же, предполагая разрешимость системы (10), получаем

$$y_n^{(1)} \underset{\substack{\theta\to 0\\ \varkappa\to 0}}{\to} 0.$$

Обращаясь теперь к представлению в виде (2) при $|y| > \frac{\Delta}{2}$, в котором

$$a_n = \frac{1}{2}(x_n + y_n); \quad d_n = \frac{1}{2}(x_n - y_n),$$

находим

$$V(x,y) = \lim_{\substack{\theta \to 0 \\ \varkappa \to 0}} H_z(x,y) =$$

$$= \begin{cases} e^{ik(\alpha x + \beta y)} + \left[1 + \dfrac{iq}{\beta - iq - k\beta Qq} - \dfrac{ip}{\beta + ip + k\beta Qp}\right] e^{ik[\alpha x - \beta(y+\Delta)]} & |y| < -\dfrac{\Delta}{2} \\ \left[\dfrac{iq}{\beta - iq - k\beta Qq} + \dfrac{ip}{\beta + ip + k\beta Qp}\right] e^{ik[\alpha x + \beta(y-\Delta)]}, & y > \dfrac{\Delta}{2} \end{cases} \tag{15}$$

4. Полученное выражение для $\lim\limits_{\substack{\theta \to 0 \\ \varkappa \to 0}} H_z(x,y)$ удобно для выяснения характера поля в некоторых предельных случаях. Так, в случае, когда щели между брусьями исчезают, выражение (15) переходит в решение задачи об отражении H-поляризованной плоской волны идеально проводящей плоскостью, расположенной при $y = -\frac{\Delta}{2}$. Тот же случай получаем, когда $\varkappa\delta$ равно фиксированному числу, отличному от $n\pi$ или $\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ ($n = 1, 2, 3,$), т. е. когда щель между брусьями мала по сравнению с «толщиной» решетки. Если же $\varkappa\delta = 0$ ($\Delta = 0$), $V(x, y)$ принимает вид, аналогичный полученному в [2] в подобном приближении для плоской решетки:

$$\lim_{\Delta \to 0} V(x,y) = \begin{cases} e^{ik(\alpha x + \beta y)} + \dfrac{k\beta Q}{i + k\beta Q} e^{ik(\alpha x - \beta y)}, & y < 0 \\ \dfrac{i}{i + k\beta Q} e^{ik(\alpha x + \beta y)}, & y > 0. \end{cases}$$

Выражение (15) позволяет также сделать выводы о характере поля в «резонансных» случаях, когда

$$\Delta = n\lambda \, (\varkappa\delta = n\pi; \; q = 0, \; |p| = \infty)$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots \tag{16}$$

или, когда

$$\Delta = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi, \left(\varkappa\delta = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi; \; |q| = \infty, \; p = 0\right)$$
$$n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{17}$$

где λ — длина волны. При этом отраженное и прошедшее поля, как это следует из (15), с точностью до фазового множителя совпадает с соответствующим полем для плоской решетки, расположенной при $y = \mp \frac{\Delta}{2}$. Иными словами, решетка из брусьев при достаточно малых θ и $\varkappa$ обладает избирательностью по отношению к длине волны: пропускает волны с длиной волны, близкой к определяемой соотношением (16) или (17) и почти не пропускает остальных. Такой характер поля подтверждается результатами численного счета, приведенными в [1].

Рассмотрим теперь случай, когда $\varkappa\delta \to 0$. Теперь $q \to 0$, а $p = \frac{\theta}{\pi\varkappa\delta} = \frac{2}{k}\frac{d}{l\Delta}$ и для $V_0(x, y) = \lim\limits_{\varkappa\delta \to 0} V(x, y)$ получаем

$$V_0(x, y) = \begin{cases} V_0^-(x, y) = e^{ik(\alpha x+\beta y)} + \left[1 - \frac{ip}{\beta + ip + k\beta Qp}\right] e^{ik(\alpha x - \beta y)}, & y < 0 \\ V_0^+(x, y) = \frac{ip}{\beta + ip + k\beta Qp} e^{ik(\alpha x+\beta y)}, & y > 0. \end{cases}$$

Предельное поле $V_0(x, y)$ при $y<0$ и $y>0$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1), а при $y=0$ — граничным условиям

$$\frac{\partial V_0^+(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial V_0^-(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial V_0(x, 0)}{\partial y}$$

$$V_0^+(x, 0) - V_0^-(x, 0) = f\,\frac{\partial V_0(x, 0)}{\partial y}, \tag{18}$$

где

$$f = Q + \frac{l\Delta}{d} = \frac{l}{\pi}\left(\frac{\pi\Delta}{d} - \ln\sin\frac{\pi d}{2l}\right).$$

Граничные условия (18) имеют тот же вид, что и условия, полученные в [3] при решении задачи Неймана для бесконечно тонкой поверхности с дырками, когда мера дырок определенным образом стремится к нулю. В рассмотренном выше частном случае «толстой» поверхности с каналами — периодической решетке из брусьев прямоугольного сечения удалось получить зависимость коэффициента f и от «толщины» поверхности.

Таким образом, задачу дифракции на периодической решетке из брусьев прямоугольного сечения с граничным условием (1′) в случае узких щелей можно приближенно решить, пользуясь эквивалентными граничными условиями (16). При этом приближение будет тем точнее, чем меньше $\theta = \frac{\pi d}{l}$ и $\varkappa = \frac{kl}{2\pi}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Масалов, Ю. Т. Репа, Э. Д. Ситников. Дифракция H-поляризованной плоской электромагнитной волны на плоской решетке с диэлектриком. «Радиотехника и электроника», 9, 12, 1964.

2. В. А. Марченко. Некоторые вопросы дифракции, Первая летняя математическая школа, ч. 1, К. Изд-во «Наукова думка», 1964.

3. В. А. Марченко, Г. В. Сузиков. Вторая краевая задача в областях со сложной границей. «Математ. сб.» т. 69 (111), (1966).