

ТЕОРИЯ ГИРОТВИСТРОНА

В. А. Жураховский

Киев

Термин «гиротвистрон» впервые использован в работе [1] для обозначения секционированного прибора с поливинтовым магнитонаправляемым электронным потоком, имеющего одно- или многорезонаторный группирователь и волноводный отбиратель мощности. Возможность использования резонаторно-волноводных комбинаций в многокаскадных гиро-приборах отмечена также в работе [2].

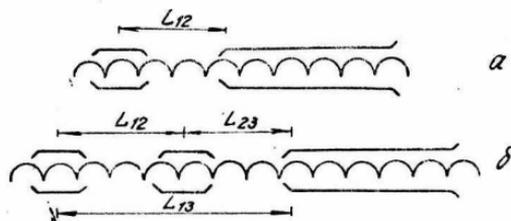


Рис. 1.

На рис. 1 схематически изображена компоновка гиротвистрона с однорезонаторным (случай а) и двухрезонаторным группирователем (случай б). Эти схемы и предельная модель с идеальной группировкой являются предметом следующего теоретического исследования.

Исходные уравнения и обоснования

Математическое описание электронно-волнового взаимодействия поливинтового потока с бегущим попутным полем секции отбора мощности в гиротвистроне дается замкнутой системой дифференциальных уравнений движения и возбуждения [3]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dT} &= -\rho^{n-1} (A \sin \theta + B \cos \theta); \\ \frac{d\theta}{dT} &= \varphi - \mu (1 - \rho^2) - n\rho^{n-2} (A \cos \theta - B \sin \theta); \\ \frac{dA}{dT} &= \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho^n \sin \theta d\theta_i; \\ \frac{dB}{dT} &= \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho^n \cos \theta d\theta_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где сохранены и далее используются основные обозначения из работы [3].

Дифференциальная система (1) дополняется начальными условиями

$$\begin{aligned} \rho_i &= 1; \quad \theta_i = \theta_i(\theta_1); \quad \theta_1 \in [-\pi; +\pi]; \\ A_i &= B_i = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

которые означают, что в рассматриваемую волноведущую систему электромагнитная энергия *извне не вводится*, а порождается *внутри* исключительно вследствие предварительной фазовой сгруппированности потока электронных ротаторов.

Поскольку режим гирорезонанса при взаимодействии вращающихся электронов с *бегущими* волнами осуществляется при условии приближенного равенства гирочастоты Ω и *доплеровской* частоты поля $\omega \left(\frac{1 - \beta_{zi}}{\beta_{\Phi}} \right)$, оказывается, что при данной гирочастоте Ω частоты эффективного взаимодействия для попутной и встречной волны существенно различны. Вследствие этого при поступлении в отбиратель *сформированных* группирователем фазовых сгустков электронов происходят биения частоты поступления сгустков и частоты волны *нежелательного* направления. Частота биений $\Delta\omega \approx \frac{2\omega\beta_{zi}}{|\beta_{\Phi}|}$, а период биений $\frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{\pi|\beta_{\Phi}|}{\omega\beta_{zi}}$. Эти биения можно считать не связанными с кумулятивными эффектами, если время пребывания электронов в отбирателе $\frac{l}{v_{zi}}$ порядка или больше двух или нескольких периодов биений, т. е. если выполнено неравенство $\frac{l}{v_{zi}} > \frac{2\pi|\beta_{\Phi}|}{\omega\beta_{zi}}$ или, что то же, $l > \Lambda$, где $\Lambda = \lambda|\beta_{\Phi}|$ — длина волны в волноводе. Таким образом, в случае $l > \Lambda$ взаимодействием плотных сгустков электронов с волной *нежелательного* направления можно пренебречь.

Гиротвистрон с идеальной группировкой и магнитной компенсацией релятивистской фазовой неустойчивости

Предположим, что в секцию отбора мощности периодически поступают идеально сгруппированные фазовые пакеты вращающихся электронов. Здесь важно отметить, что δ -образное группирование электронов винтового потока вовсе не предполагает обязательной точечную пространственную концентрацию заряженных частиц, поскольку эффективная фаза θ вращающегося электрона формируется за счет двух равноправных факторов — текущего момента времени и текущей азимутальной координаты.

При δ -образной группировке можно **идентифицировать** поведение всех электронов потока и тем самым избавиться от проблемы континуальных начальных условий. Тогда задача (1) упрощается:

$$\frac{d\rho}{dT} = -\rho^{n-1} (A \sin \theta + B \cos \theta);$$

$$\frac{d\theta}{dT} = \varphi - \mu(1 - \rho^2) - n\rho^{n-2}(A \cos \theta - B \sin \theta);$$

$$\frac{dA}{dT} = \varepsilon\rho^n \sin \theta;$$

$$\frac{dB}{dT} = \varepsilon\rho^n \cos \theta,$$

а начальные условия (2) заменяются на

$$\rho_t = 1; \quad A_t = B_t = 0, \quad (4)$$

причем фаза θ_t вследствие нулевой начальной амплитуды поля оказывается неопределенной и может быть выбрана произвольно.

Располагая δ -сгруппированным потоком, целесообразно стремиться к отбору энергии на коротких длинах, что возможно в режиме с «выключенным» релятивистским механизмом фазовой неустойчивости. Имеется в виду описанная в работе [4] компенсация релятивистского изменения массы за счет должным образом подобранной малой неоднородности индукции B направляющего магнитного поля, подчиненной закону

$$\varphi - \mu(1 - \rho^2) \equiv 0 \quad (5)$$

или в явном виде

$$\frac{B}{B_t} - 1 = -\frac{1 - \rho^2}{2} \beta_{ti}^2 \frac{\beta_{\Phi}^2 - 1}{\beta_{\Phi}^2 - \beta_{\Phi} \beta_{zi}}. \quad (6)$$

Рабочая система (3) при условии (5) еще далее упрощается рациональным выбором начального условия

$$\theta_t = \frac{\pi}{2}, \quad (7)$$

при котором дифференциальные соотношения удовлетворяются тождественно-постоянными решениями

$$\theta = \text{const}; \quad B = \text{const}, \quad (8)$$

и тогда вместо четырех уравнений остаются два:

$$\frac{d\rho}{dT} = -A\rho^{n-1}; \quad \frac{dA}{dT} = \varepsilon\rho^n. \quad (9)$$

Задача (4), (9) имеет 1-й интеграл

$$x_{\perp} \equiv I - \rho^2 = \frac{A^2}{\varepsilon}, \quad (10)$$

где x_{\perp} — поперечный электронный к. п. д. потока. Понижая с помощью (10) порядок дифференциальной системы (9), приходим к решению в квадратурах

$$TV_{\varepsilon}^{-} = \int_0^{V_{x_{\perp}}^{-}} \frac{dV_{x_{\perp}}^{-}}{(1 - x_{\perp})^{\frac{n}{2}}}. \quad (11)$$

Выпишем результаты интегрирования для наиболее интересных режимов — основного гирорезонанса ($n = 1$) и гирорезонансов второго ($n = 2$) и третьего ($n = 3$) порядков:

$$T \sqrt{\varepsilon} = \begin{cases} \arcsin \sqrt{x_{\perp}}, & n = 1; \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{x_{\perp}}}{1 - \sqrt{x_{\perp}}}, & n = 2; \\ \sqrt{\frac{x_{\perp}}{(1 - x_{\perp})}}, & n = 3. \end{cases} \quad (12)$$

Решая эти соотношения относительно к. п. д. x_{\perp} , получаем

$$x_{\perp} = \begin{cases} \sin^2 T \sqrt{\varepsilon}, & n = 1; \\ \operatorname{th}^2 T \sqrt{\varepsilon}, & n = 2; \\ \frac{T^2 \varepsilon}{(1 + T^2 \varepsilon)}, & n = 3. \end{cases} \quad (13)$$

На основной гирогармонике можно получить теоретический поперечный к. п. д. $x_{\perp} = 1$ при *конечной* длине отбирателя $\sqrt{\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$, тогда как на высших гирогармониках может идти речь лишь об *асимптотическом* стремлении $x_{\perp} \rightarrow 1$ при $\sqrt{\varepsilon} \rightarrow \infty$.

Гиротвистрон с идеальной группировкой и однородным магнитным полем

Проанализируем случай $B = \text{const}$, т. е. $\varphi - \mu(1 - \rho^2) \neq 0$; см. (3).

Используем введенную уравнением (10) связь между ρ и x_{\perp} и преобразуем систему (3) к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx_{\perp}}{dT} &= 2(1 - x_{\perp})^{\frac{n}{2}} (A \sin \theta + B \cos \theta); \\ \frac{d\theta}{dT} &= \varphi - \mu x_{\perp} - n(1 - x_{\perp})^{\frac{n}{2}-1} (A \cos \theta - B \sin \theta); \\ \frac{dA}{dT} &= \varepsilon(1 - x_{\perp})^{\frac{n}{2}} \sin \theta; \\ \frac{dB}{dT} &= \varepsilon(1 - x_{\perp})^{\frac{n}{2}} \cos \theta. \end{aligned} \quad (14)$$

Построим два первых интеграла системы (14). С этой целью умножим 1-е уравнение на $-\frac{d\theta}{dT}$, 2-е — на $\frac{dx_{\perp}}{dT}$, 3-е — на

$-\frac{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)dB}{dT}$, 4-е — на $\frac{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)dA}{dT}$ и все результаты сложим. Тогда имеем

$$2(1-x_{\perp})^{\frac{n}{2}}(A \cos \theta - B \sin \theta) + \varphi x_{\perp} - \mu \frac{x_{\perp}^2}{2} = \text{const} \equiv 0, \quad (15)$$

причем равенство нулю вытекает из начальных условий (4). Далее умножим 3-е уравнение системы (14) на $-\frac{2A}{\varepsilon}$, 4-е — на $-\frac{2B}{\varepsilon}$ и сложим эти результаты с неизменным 1-м уравнением. Получим

$$x_{\perp} - \frac{(A^2 + B^2)}{\varepsilon} = \text{const} \equiv 0. \quad (16)$$

Теперь дифференцируем 1-е уравнение (14) по правилам дифференцирования сложной функции с несколькими параллельными промежуточными аргументами (x_{\perp} , θ , A , B) и затем исключаем $A^2 + B^2$ и $(1-x_{\perp})^{\frac{n}{2}}(A \cos \theta - B \sin \theta)$ на основе интегралов движения (15) и (16). В результате получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка для поперечного к. п. д.:

$$\frac{d^2 x_{\perp}}{dT^2} = 2\varepsilon[(1-x_{\perp})^n - n x_{\perp}(1-x_{\perp})^{n-1}] - (\varphi - \mu x_{\perp})\left(\varphi x_{\perp} - \frac{\mu x_{\perp}^2}{2}\right). \quad (17)$$

Умножаем (17) на $\frac{2dx_{\perp}}{dT}$ и после интегрирования формулируем соотношение типа уравнений фазовой траектории

$$\left(\frac{dx_{\perp}}{dT}\right)^2 = 4\varepsilon x_{\perp}(1-x_{\perp})^n - \left(\varphi x_{\perp} - \frac{\mu}{2} x_{\perp}^2\right)^2. \quad (18)$$

Полагая в (18) $x_{\perp} = 1$ и $\frac{dx_{\perp}}{dT} = 0$, получаем необходимое условие полного преобразования энергии

$$\varphi_{\text{опт}} = \frac{\mu}{2}, \quad (19)$$

при соблюдении которого уравнение (18) переходит в

$$\frac{dx_{\perp}}{d(2T\sqrt{\varepsilon})} = \pm \sqrt{x_{\perp}(1-x_{\perp})^n - \frac{\mu^2}{16\varepsilon}(x_{\perp} - x_{\perp}^2)^2}. \quad (20)$$

Обозначая

$$\frac{dx_{\perp}}{d(2T\sqrt{\varepsilon})} = \dot{x}_{\perp}; \quad \frac{\mu^2}{16\varepsilon} = \sigma, \quad (21)$$

окончательно получаем оптимальный закон движения по фазовой плоскости $(x_{\perp}, \dot{x}_{\perp})$:

$$\dot{x}_{\perp} = \pm \sqrt{x_{\perp} (1 - x_{\perp})^n - \sigma (x_{\perp} - x_{\perp}^2)^2}. \quad (22)$$

Полагая здесь $n = 1$, приходим к выводу, что можно достичь значения $x_{\perp} = 1$ в рамках ограничения $0 < \sigma < 4$ (рис. 2, а). При $n = 2$ возможно асимптотическое приближение к значению $x_{\perp} = 1$ в рамках ограничения $0 < \sigma < 1$ (рис. 2, б). Наконец, при $n > 2$ даже теоретически не существует траекторий, ведущих, хотя бы асимптотически, к состоянию с $x_{\perp} = 1$.

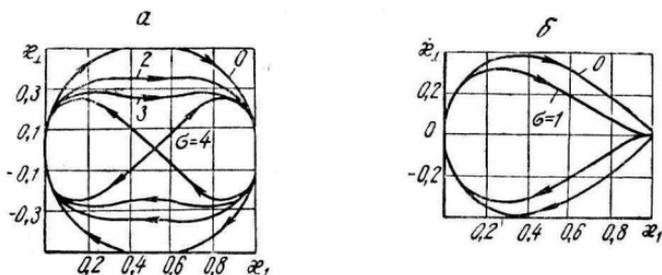


Рис. 2.

Некоторые результаты машинных расчетов отбирателя при оптимизированном группирователе с одним и с двумя резонаторами

Приводимые ниже результаты относятся к гиротвистрону с отбором энергии в режиме основного гирорезонанса, $n = 1$.

Применялся известный вычислительный метод квазичастиц, при котором непрерывный отрезок потока, поступающего в активную зону за период поля, моделируется дискретным набором точечных электронных сгустков. В качестве континуальных начальных условий были использованы данные [5] об оптимизации резонаторного группирователя. Было принято

$$\theta_i = 1,57 + \theta_1 - 1,84 \sin \theta_1 \quad (23)$$

при однокаскадной группировке и

$$\theta_i = 1,57 + \theta_1 - 3,18 \sin \theta_1 - 1,57 \sin (\theta_1 - 3,05 \sin \theta_1) \quad (24)$$

при двухкаскадной.

Для исключения особенности при $\rho \rightarrow 0$ во 2-м уравнении системы (1), недопустимой в машинных расчетах, вводилась замена

$$u = \rho \sin \theta; \quad \omega = \rho \cos \theta, \quad (25)$$

преобразующая (1) к более удобному для машины виду

$$\begin{aligned} \frac{du}{d(T\sqrt{\varepsilon})} &= -\frac{A}{\sqrt{\varepsilon}} + \omega \left[\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}} (1 - u^2 - \omega^2) \right]; \\ \frac{d\omega}{d(T\sqrt{\varepsilon})} &= -\frac{B}{\sqrt{\varepsilon}} - u \left[\frac{\varphi}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\mu}{\sqrt{\varepsilon}} (1 - u^2 - \omega^2) \right]; \\ \frac{d(A/\sqrt{\varepsilon})}{d(T\sqrt{\varepsilon})} &= \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} u; \quad \frac{d(B/\sqrt{\varepsilon})}{d(T\sqrt{\varepsilon})} = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} \omega. \end{aligned} \quad (26)$$

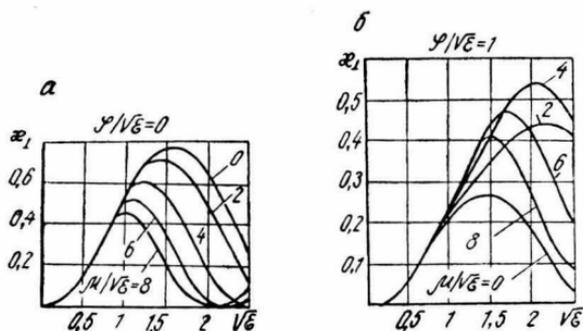


Рис. 3.

Начальные условия (2), (23), (24) были заменены на

$$u_i = \cos(\theta_1 - 1,84 \sin \theta_1); \quad \omega_i = -\sin(\theta_1 - 1,84 \sin \theta_1);$$

$$\theta_i = \left(\frac{2\nu}{N} - 1 \right) \pi, \quad N = 24; \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, N - 1;$$

$$A_i = B_i = 0 \quad (27)$$

при однокаскадной группировке и

$$u_i = \cos[\theta_1 - 3,18 \sin \theta_1 - 1,57 \sin(\theta_1 - 3,05 \sin \theta_1)];$$

$$\omega_i = -\sin[\theta_1 - 3,18 \sin \theta_1 - 1,57 \sin(\theta_1 - 3,05 \sin \theta_1)];$$

$$\theta_i = \left(\frac{2\nu}{N} - 1 \right) \pi, \quad N = 24; \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, N - 1;$$

$$A_i = B_i = 0 \quad (28)$$

при двухкаскадной.

Решение производилось методом Рунге-Кутты 4-го порядка. В процессе решения определялся средний по потоку поперечный электронный к. п. д.

$$x_{\perp} = \frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} (1 - u^2 - \omega^2) \quad (29)$$

как функция $T\sqrt{\varepsilon}$ или, по существу, как функция от $\sqrt{\varepsilon}$, так как при любом $T\sqrt{\varepsilon}$ можно считать, что T достигло единицы.

Результаты решения задачи (26), (27) приведены на рис. 3, а задачи (26), (28) — на рис. 4. Как видим, при оптимальной однокаскадной группировке $\kappa_{\perp \text{ макс}} \approx 0,55$, а при двухкаскадной — $\kappa_{\perp \text{ макс}} \approx 0,84$. По-видимому, еще большие значения к. п. д. могут быть достигнуты при подвозбуждении волновода дополнительным внешним электромагнитным сигналом.

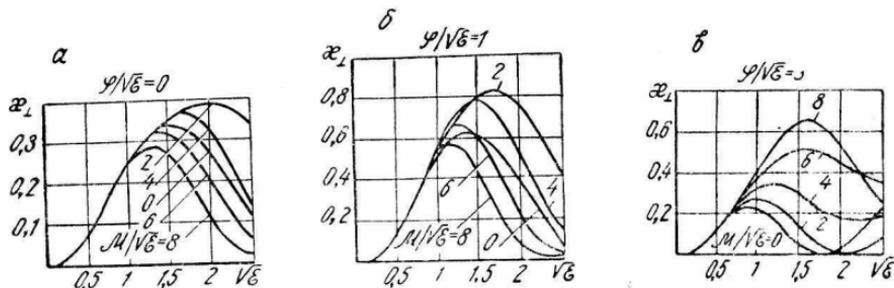


Рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Жураховский. Микроволновая энергетика. «Энергетика и электрификация», 1970, № 3.
2. В. А. Жураховский. Гирорезонансный усилитель. «Бюлл. изобр.», 1969, № 32.
3. В. А. Жураховский. Математический аппарат теории нелинейных колебаний электронов в магнитном поле. III. Приближение слабoreлятивистских скоростей. См. статью настоящего сборника.
4. В. А. Жураховский. Силовое выпрямление и генерирование сверхвысокочастотного напряжения. «Энергетика и электрификация», 1970, № 5.
5. В. А. Жураховский. Кинематическое группирование винтовых электронных потоков. Сб. «Радиотехника», вып. 18. Изд-во ХГУ, Харьков, 1971.