НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛБВ С ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

С. Г. Кельнер, Т. Р. Шаворыкина

Донецк

Исследуются нелинейные процессы в ЛБВ. В основу рассмотрения взаимодействия электронов с полем бегущей электромагнитной волны положены уравнение баланса потока энергии в поперечном сечении и уравнение движения электронов.

Рассмотрим произвольную замедляющую систему, на вход которой поступает электромагнитная волна и поток электронов.

Введем следующие допущения:

1. Замедляющая система не обладает затуханием и имеет аксиальную симметрию.
2. Фазовая и групповая скорости постоянны по всей длине системы и не зависят от амплитуды волны.
3. Поле волны во времени меняется по гармоническому закону.
4. Электроны летят строго по оси z и не взаимодействуют друг с другом.

Рассмотрим взаимодействие электронов с полем замедленной волны. На вход пространства взаимодействия поступают электроны через строго определенные промежутки времени:

$$\Delta t = \frac{T}{n} = \frac{2\pi}{n\omega}, \tag{1}$$

где ω — частота электромагнитной волны;

n — целое число.

При $n \to \infty$ это соответствует непрерывному потоку электронов.

Каждый i-й электрон, поступивший в пространстве взаимодействия в момент времени τ, характеризуется начальной разницей в фазе между электромагнитной волной и этим электроном. Тогда τ — время влета электрона в пространстве взаимодействия — определяется следующим образом:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}\frac{i}{n} = \frac{2\pi}{\omega}\xi, \tag{2}$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, а через ξ обозначено $\frac{i}{n}$.

При $z = 0$ скорости всех электронов одинаковы:

$$v_i/_{z=0} = v_0.$$

Заряд электронов будем считать распределенным по длине системы непрерывным образом. Тогда можно ввести линейную плотность заряда q, зависящую от координаты z и от времени t. Но в действительности заряды являются точечными, поэтому плотность q равна нулю везде, кроме тех точек, где находятся точечные заряды. Следовательно, q напишем с помощью δ-функции [1]:

$$q(z, t) = e\delta(z - z(t)), \tag{3}$$

где z — однозначная функция времени t;

t — функция времени влета τ;

$$t = f(z, \tau). \tag{4}$$

Таким образом, и скорость электронов является функцией z и τ:

$$v_z(z, \tau), \text{ или } v_z(t).$$

Плотность конвенционного тока пучка в режиме больших амплитуд может быть записана в виде

$$J = ev_z(t)\,\delta(z - z(t)). \tag{5}$$

δ-функция обладает следующим свойством:

$$\delta(z - z(t)) = \frac{1}{\frac{dz}{dt}}\,\delta(t - t(z)) = \frac{1}{v_z(z, \tau)}\,\delta(t - t(z)). \tag{6}$$

Используя (6), перепишем (5) в виде

$$J = e\delta\left(t - t\,(z)\right). \tag{7}$$

Электрон в точке z находится в момент времени $t\,(z)$, поэтому

$$t\,(z) = \int\limits_0^z \frac{dz}{v} + \tau. \tag{8}$$

Подставляя (8) в выражение для плотности конвенционного тока, получим

$$J = e\delta\left(t - \int\limits_0^z \frac{dz}{v} - \tau\right). \tag{9}$$

Предполагается, что на протяжении всего времени взаимодействия $v\,(z, \tau) > 0$. Рассматриваем установившийся процесс. Электроны, вылетевшие в моменты времени τ, $\tau + T$, $\tau + 2T$, $\tau - T$ и т. д., будут иметь в точке z одинаковые скорости (но, разумеется, придут туда в разные моменты времени, сдвинутые на период). Поэтому $v\,(z, \tau)$ — периодическая функция τ. Таким образом, чтобы найти ток электронов, необходимо проинтегрировать выражение (9) по всему τ:

$$I\,(z, t) = I_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\,\delta\left(t - \int\limits_0^z \frac{dz'}{v\,(z', t)} - \tau\right). \tag{10}$$

Тогда линейная плотность заряда

$$q\,(z, t) = I_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{v\,(z, \tau)}\,\delta\left(t - \int\limits_0^z \frac{dz}{v\,(z', t)} - \tau\right). \tag{11}$$

Запишем поток энергии пучка электронов

$$W_e = \frac{mv^2\,(z, \tau)}{2}\,\frac{I_0}{e} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau\,\delta\left(t - \int\limits_0^z \frac{dz}{v} - \tau\right). \tag{12}$$

За период средний поток энергии равен

$$\overline{W}_e = \frac{1}{T}\int\limits_0^T dt\,W_e = \frac{I_0 m\omega}{4\pi e}\int\limits_0^T d\tau\,v^2\,(z, \tau). \tag{13}$$

Поток энергии электромагнитной волны запишем следующим образом:

$$\overline{W}_n = \alpha E^2\,(z, t), \tag{14}$$

где E — z-ая компонента поля;

$\alpha = \dfrac{1}{2k^2 R_{\text{св}}}$;

$k = \frac{\omega}{v_ф}$ — постоянная распространения волны в системе;

$R_{св}$ — сопротивление связи системы.

Для слабой связи между электронным потоком и волной в произвольном сечении данной системы должен выполняться закон сохранения энергии

$$\overline{W}_n + \overline{W}_e = \text{const} \tag{15}$$

или

$$\frac{1}{2}\alpha E^2(z) + \frac{I_0 m\omega}{4\pi e}\int\limits_0^{\frac{2\pi}{\omega}} d\tau v^2(z, \tau) = \frac{1}{2}\alpha E_0^2 + \frac{I_0 m}{2e} v_0^2. \tag{16}$$

Уравнение (16) связывает амплитуду поля E со скоростью $v(z, \tau)$ и начальными значениями амплитуды и скорости.

Запишем уравнение движения электронов

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m} E(z, t). \tag{17}$$

Перейдя к переменным z и τ и усредняя по времени, получим

$$v\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{e}{m} E(z) \cos\left(kz - \omega\int\limits_0^z \frac{dz}{v} - \omega\tau\right). \tag{18}$$

Введем безразмерные величины следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0}, \quad \nu = \frac{v}{v_0}, \quad \xi = \frac{z}{\frac{v_0}{\omega}}, \tag{19}$$

где

$$\varepsilon(0) = 1, \quad \nu(0) = 1;$$

$$f = \frac{e}{m}\frac{E_0}{v_0\omega}; \quad \beta = \frac{v_0}{v_ф}; \quad 2f\eta = \frac{v_0 I_0}{\alpha\omega E_0};$$

f — безразмерный начальный сигнал; η — величина, обратная электронному к. п. д.; β — параметр скорости. Он связан с параметрами несинхронности b и параметром усиления c следующим образом:

$$\beta = \frac{v_0}{v_ф} = 1 - cb. \tag{20}$$

Тогда уравнения (16) и (18) примут следующий вид:

$$\frac{d\varepsilon}{d\xi} = -2f\eta\int\limits_0^1 d\xi \cos\left(\beta\xi - \int\limits_0^\xi \frac{d\varphi}{\nu} - 2\pi\xi\right); \tag{21}$$

$$\nu\frac{d\nu}{d\xi} = f\varepsilon\cos\left(\beta\xi - \int\limits_0^\xi \frac{d\xi'}{\nu} - 2\pi\xi\right). \tag{22}$$

Используя уравнение баланса энергии в безразмерных величинах

$$\varepsilon^2(\xi) = 1 + 2\eta\left(1 - \int_0^1 \nu^2 d\xi\right), \tag{23}$$

получим уравнение

$$\nu\frac{d\nu}{d\xi} = f\sqrt{1 + 2\eta\int_0^1 (1-\nu^2)\, d\xi}\,\cos\left(\beta\xi - \int_0^\xi \frac{d\xi'}{\nu} - 2\pi\xi\right). \tag{24}$$

Уравнения (23) и (24) определяют зависимость амплитуды поля по продольной координате и величину электронного к. п. д. Они могут быть найдены любым методом численного счета, поскольку в аналитическом виде эти уравнения неразрешимы.

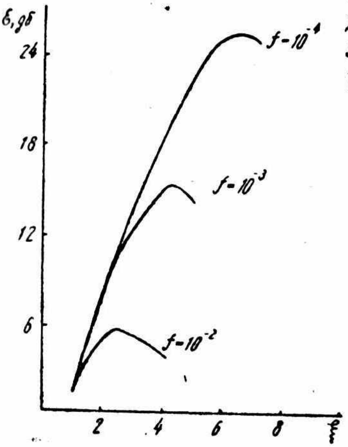

Рис. 1.

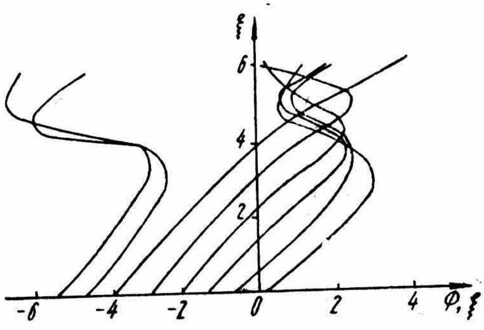

Рис. 2.

Предельный переход при малых значениях ξ, когда лампа работает в линейном режиме, приводит к линейным уравнениям, приведенным в работе [2]. Данные уравнения рассчитаны на ЭВЦМ для следующих значений параметров:

$\beta = 1{,}1$; $f = 10^{-2}$; 10^{-3}; 10^{-4}; $\eta = 2{,}42 \cdot 10$; $2{,}42 \cdot 10^3$; $2{,}42 \cdot 10^5$.

На рис. 1 представлена зависимость безразмерной амплитуды поля ε от безразмерной координаты ξ для трех значений входного сигнала. Из кривых ясно виден режим насыщения по мощности. Помимо того видно, что с увеличением уровня входного сигнала усиление в режиме насыщения уменьшается и укорачивается длина, на которой наступает насыщение.

На рис. 2 приведена зависимость безразмерной координаты электронов от фазы волны $\Phi(\xi)$

$$\Phi(\xi) = \beta\xi - \int_0^\xi \frac{d\xi'}{\nu} - 2\pi\xi \tag{25}$$

На рисунке ясно виден процесс обгона одних электронов другими, приводящий к эффекту насыщения и группировки электронного потока по плотности.

Сравнение приведенных результатов с результатами других работ по нелинейному режиму ЛБВ [3] свидетельствует о правомерности предлагаемого метода, при котором задача сводится к решению интегро-дифференциальных уравнений первого порядка, что значительно уменьшает время, необходимое для расчетов на ЭЦВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, ч. II. Изд-во «Наука», 1967.
2. В. Клеен, К. Пешль. Введение в электронику СВЧ, ч. II. Изд-во «Советское радио», 1963.
3. М. Б. Цейтлин, А. М. Кац. Лампа с бегущей волной. Изд-во «Советское радио», 1964.