МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. III. ПРИБЛИЖЕНИЕ СЛАБОРЕЛЯТИВИСТСКИХ СКОРОСТЕЙ

В. А. Жураховский

Киев

Настоящая работа является заключительной в серии трех статей [1, 2] и посвящена доведению уравнений дифференциальной задачи о гирорезонансном электронно-волновом взаимодействии до безразмерной нормальной формы с минимальным числом обобщенных параметров, как того требуют условия применения численных методов решения с возможным привлечением ЭЦВМ.

Уравнения усредненного движения и энергоотдачи

В качестве отправной точки развиваемой здесь теории примем полученную в [2] сглаженную систему дифференциальных уравнений динамики винтового движения электронов в резонансном электромагнитном поле (основные обозначения сохранены):

$$k\dot{X} = -\frac{n\eta\sqrt{1-\beta^2}}{c\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\phi}\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial kY}\left[\frac{1-\beta_\phi\beta_z}{\beta_\phi}\operatorname{Re}\left(\Pi_n^e F^e \exp j\Theta\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_t}{n}\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\phi}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\operatorname{Re}\left(\Pi_n^m F^m \exp j\Theta\right)\right];$$

$$k\dot{Y} = \frac{n\eta\sqrt{1-\beta^2}}{c\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\phi}\right)}\cdot\frac{\partial}{\partial kX}\left[\frac{1-\beta_\phi\beta_z}{\beta_\phi}\operatorname{Re}\left(\Pi_n^e F^e \exp j\Theta\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_t}{n}\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\phi}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\operatorname{Re}\left(\Pi_n^m F^m \exp j\Theta\right)\right];$$

$$\frac{\dot{\beta}_z}{\beta_i} = \left(\frac{1-\beta_\text{ф}\beta_z}{\beta_i\beta_\text{ф}}\right)\frac{\eta\sqrt{1-\beta^2}}{c}\left[\frac{1-\beta_\text{ф}\beta_z}{\beta_\text{ф}}\,\mathrm{Im}\,(\Pi_n^e F^e \exp j\Theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_t}{n}\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\text{ф}}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\,\mathrm{Im}\,(\Pi_n^m F^m \exp j\Theta)\right]; \qquad \text{(III. 1)}$$

$$\frac{\dot{\beta}_t}{\beta_i} = \left(\frac{1-\beta_t^2-\dfrac{\beta_z}{\beta_\text{ф}}}{\beta_i\beta_t}\right)\frac{\eta\sqrt{1-\beta^2}}{c}\left[\frac{1-\beta_\text{ф}\beta_z}{\beta_\text{ф}}\,\mathrm{Im}\,(\Pi_n^e F^e \exp j\Theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_t}{n}\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\text{ф}}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\,\mathrm{Im}\,(\Pi_n^m F^m \exp j\Theta)\right];$$

$$\dot{\Theta} = \omega\left(1-\frac{\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}}\right) - n\Omega_i - n\Omega_i\,\frac{\beta_\text{ф}^2-1}{\beta_\text{ф}^2-\beta_\text{ф}\beta_{zi}}\left(\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta_i^2}}-1\right) +$$

$$+\left(\frac{1-\dfrac{\beta_z}{\beta_\text{ф}}}{\beta_t^2}\right)\frac{n\eta\sqrt{1-\beta^2}}{c}\left\{\frac{1-\beta_\text{ф}\beta_z}{\beta_\text{ф}}\left(\frac{\beta_t}{n}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\,\mathrm{Re}\,(\Pi_n^e F^e \exp j\Theta) + \right.$$

$$\left. + \left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\text{ф}}\right)\left[1-\frac{\beta_t^2(\beta_\text{ф}^2-1)}{(\beta_\text{ф}-\beta_z)^2}\right]\mathrm{Re}\,(\Pi_n^m F^m \exp j\Theta)\right\}.$$

Рассмотрим индивидуальный текущий коэффициент полезного действия (к. п. д.) отдельного электрона $\varkappa$ как величину отношения релятивистской энергии, переданной им силовому полю за рассматриваемый промежуток времени τ, к его невозмущенной энергии движения:

$$\varkappa = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_i^2}} - \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\Bigg/\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_1^2}} - mc^2\right), \qquad \text{(III. 2)}$$

где m — масса покоя, индекс i относится ко входу основного силового поля, индекс 1 относится ко входу управляющего устройства (если последнее отсутствует, то $i = 1$), в момент $\tau = 0$ будет $\varkappa = \varkappa_i = 0$, так как при этом $\beta = \beta_i$.

Продифференцируем (III. 2) по τ (β_i не зависит от τ) и используем 3-е и 4-е уравнения системы (III. 1). Получим

$$\dot{\varkappa} = -\frac{\eta\sqrt{1-\beta_1^2}}{c\left(1-\sqrt{1-\beta_1^2}\right)}\left[\frac{1-\beta_\text{ф}\beta_z}{\beta_\text{ф}}\,\mathrm{Im}\,(\Pi_n^e F^e \exp j\Theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_t}{n}\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\text{ф}}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\,\mathrm{Im}\,(\Pi_n^m F^m \exp j\Theta)\right]. \qquad \text{(III. 3)}$$

В уравнении (III. 3) роль независимой переменной играет время движения частицы τ. Такая форма записи уравнения вполне удобна для изучения поведения каждого отдельно взятого электрона.

Из-за континуального характера начальных условий нас далее будут интересовать также и характеристики электронного потока в целом как *распределенной вдоль* $\zeta = z - z_i$ *активной среды*, получаемые путем *усреднения по периоду силового поля* (т. е. фактически по $\Theta_1 \in [-\pi; +\pi]$) соответствующих характеристик движения частиц, составляющих этот поток, при ζ в качестве параметра.

Различные частицы потока проходят за один и тот же отрезок времени τ различный путь ζ, что весьма затрудняет получение непосредственно из (III. 3) средних по потоку энергетических характеристик как функций параметра ζ, т. е. в зависимости от длины участка электронно-волнового взаимодействия. Поэтому в силу необходимости придется перейти в (III. 3) от независимой переменной τ к независимой переменной ζ.

Электронный к. п. д. *потока* $\bar{\varkappa}$ как характеристику сплошной активной среды в данном сечении ζ получим путем усреднения индивидуального к. п. д. $\varkappa$ за время периода переменного поля

$$\bar{\varkappa}' = -\frac{\eta\sqrt{1-\beta_1^2}}{c\left(1-\sqrt{1-\beta_1^2}\right)} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{v_z}\left[\frac{1-\beta_\Phi\beta_z}{\beta_\Phi}\operatorname{Im}\left(\Pi_n^e F^e \exp j\Theta\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_t}{n}\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\Phi}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\operatorname{Im}\left(\Pi_n^m F^m \exp j\Theta\right)\right] d\Theta_1. \qquad \text{(III. 4)}$$

Штрих здесь и ниже означает дифференцирование по ζ, а черта сверху символизирует усреднение по начальным фазам (предполагается, что все нити потока находятся в идентичных условиях, в противном случае необходимо выполнить усреднение еще и по начальному поперечному сечению потока).

Медленно меняющееся поле

Исходим из положения, что невозмущенная энергия движения для каждой частицы потока одинакова и равна

$$W_1 = mc^2 \Big/ \sqrt{1-\beta_1^2} - mc^2, \qquad \text{(III. 5)}$$

где mc^2 — энергия покоя.

Пусть $|e| > 0$ — абсолютная величина заряда одной частицы, $I > 0$ — заданный постоянный ток потока частиц на входе его в рассматриваемую систему. Тогда за элементарный отрезок времени dt_1 в систему поступает $\left(\frac{I}{|e|}\right)\frac{t_1}{d}$ частиц с суммарной энергией движения

$$W_1^{\Sigma} = \frac{I}{|e|} dt_1 W_1 = \frac{Ic^2}{\eta} dt_1 \frac{1-\sqrt{1-\beta_1^2}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}, \tag{III. 6}$$

где $\eta = \frac{|e|}{m}$ — абсолютный удельный заряд одного электрона в состоянии кинематического покоя. Следовательно, мощность постоянного тока во входном сечении

$$P_1 = \frac{dW_1^{\Sigma}}{dt_1} = \frac{Ic^2}{\eta} \cdot \frac{1-\sqrt{1-\beta_1^2}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}. \tag{III. 7}$$

Если теперь привлечь введенную ранее такую важную характеристику потока, как его средний электронный к. п. д. $\bar{\varkappa}$, нетрудно выразить *среднюю за период поля мощность $\overline{P}$ энергии, переданной потоком частиц силовому полю на активном участке:*

$$\overline{P} = \bar{\varkappa} P_1 = \bar{\varkappa} \frac{Ic^2}{\eta} \cdot \frac{1-\sqrt{1-\beta_1^2}}{\sqrt{1-\beta_1^2}}. \tag{III. 8}$$

Дифференцируя (III. 8) по продольной координате и используя усредненное уравнение (III. 4), получаем

$$\overline{P'} = -I \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\beta_z} \Big[\frac{1-\beta_\Phi \beta_z}{\beta_\Phi} \operatorname{Im} (\Pi_n^e F^e \exp j\Theta) +$$

$$+ \frac{\beta_t}{n} \left(1 - \frac{\beta_z}{\beta_\Phi}\right) \frac{\partial}{\partial \beta_t} \operatorname{Im} (\Pi_n^m F^m \exp j\Theta) \Big] d\Theta_1. \tag{III. 9}$$

Отданная электронами мощность $\overline{P}$ должна быть поглощена электромагнитным полем. В теории волноводов доказывается, что при одновременном присутствии нескольких элементарных типов волн (в случае гибридной волны, образованной наложением бегущих *TM*- и *TE*-полей) суммарная проносимая ими средняя за период мощность электромагнитной энергии распадается на сумму мощностей, проносимых каждой из элементарных компонент в отдельности («взаимные» мощности как таковые отсутствуют).

Не останавливаясь на подробностях теории волноводов, напишем сразу нужное нам соотношение для среднего (за период поля) потока мощности $\overline{Q}$, проносимого бегущей гибридной волной через произвольное поперечное сечение волноведущей системы:

$$\overline{Q} = \left(\frac{S}{2\beta_\text{ф} Z}\right)(h^e\,|F^e|^2 + h^m\,|F^m|^2), \qquad \text{(III.10)}$$

где S — площадь поперечного сечения волноведущей системы; $Z = 120\pi$ *ом* — волновое сопротивление вакуума; h^e и h^m — безразмерные положительные числовые коэффициенты, связанные с учетом неоднородности распределения плотности энергии электромагнитного поля по поперечному сечению волновода:

$$h^e = \frac{\beta_\text{ф}^2 - 1}{S\beta_\text{ф}^2} \iint\limits_{(S)} (\Pi^e)^2\, dS;$$

$$h^m = \frac{\beta_\text{ф}^2 - 1}{S\beta_\text{ф}^2} \iint\limits_{(S)} (\Pi^m)^2\, dS. \qquad \text{(III. 11)}$$

Дифференцируя (III. 10) по продольной координате, получаем

$$\overline{Q'} = \left(\frac{S}{2\beta_\text{ф} Z}\right)[h^e\,(|F^e|^2)' + h^m\,(|F^m|^2)']. \qquad \text{(III. 12)}$$

Сравним соотношения (III. 12) и (III. 9). На основании закона сохранения энергии левые части этих соотношений должны быть равными, $\overline{Q'} = \overline{P}'$. Следовательно, можно приравнять и правые части, получив уравнение баланса мощностей в дифференциальной форме. Распишем уравнение баланса

$$\left(\frac{Sh^e}{\beta_\text{ф} Z}\right)[\operatorname{Re}(F^e)\operatorname{Re}(F^{e\prime}) + \operatorname{Im}(F^e)\operatorname{Im}(F^{e\prime})] + \ldots =$$

$$= -I\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\beta_\text{ф}}\cdot\frac{1-\beta_\text{ф}\beta_z}{\beta_z}\left[\operatorname{Re}(F^e)\operatorname{Im}(\Pi_n^e \exp j\Theta) + \right. \qquad \text{(III. 13)}$$

$$\left. + \operatorname{Im}(F^e)\operatorname{Re}(\Pi_n^e \exp j\Theta)\right] d\Theta_1 + \ldots,$$

где многоточия заменяют слагаемые подобного же типа, связанные с F^m.

Равенство (III. 13) должно выполняться *тождественно*, независимо от текущего изменения комплексных амплитуд бегущей гибридной волны. Это будет иметь место при условии совпадения коэффициентов отдельно при $\operatorname{Re}(F^e)$, $\operatorname{Im}(F^e)$, ... в обеих частях написанного равенства. Следовательно,

$$\frac{Sh^e}{\beta_\text{ф} Z}\operatorname{Re}(F^{e\prime}) = -I\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\beta_\text{ф}}\cdot\frac{1-\beta_\text{ф}\beta_z}{\beta_z}\operatorname{Im}(\Pi_n^e \exp j\Theta)\, d\Theta_1;$$

$$\frac{Sh^e}{\beta_ф Z}\,\mathrm{Im}\,(F^{e\prime}) = -I\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\beta_ф}\cdot\frac{1-\beta_ф\beta_z}{\beta_z}\,\mathrm{Re}\,(\Pi_n^e \exp j\Theta)\,d\Theta_1; \quad \text{(III. 14)}$$

. . . .

Умножая второе соотношение системы (III. 14) на мнимую единицу j и складывая его с первым, а затем приплюсовывая еще такую же комплексную комбинацию из соотношений, связанных с F^m, окончательно получаем *объединенное усредненное дифференциальное уравнение возбуждения электромагнитного поля:*

$$F^{e\prime} + F^{m\prime} = \frac{\beta_ф Z I}{S}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\beta_z}\left[\frac{1-\beta_ф\beta_z}{h^e\beta_ф}\,(\Pi_n^e j \exp j\Theta)^* + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_t}{h^{mn}}\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_ф}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\,(\Pi_n^m j\exp j\Theta)^*\right]d\Theta_1, \quad \text{(III. 15)}$$

где звездочка — знак комплексного сопряжения. Объединенное уравнение (III. 15) следует рассматривать как компактную запись четырех самостоятельных уравнений для вещественных и мнимых частей медленно меняющихся комплексных амплитуд бегущих силовых полей электрического и магнитного типа.

Поперечный и продольный дрейф

Начиная с данного параграфа, будем всюду далее придерживаться слаборелятивистского приближения

$$\beta^2 \ll 1 \quad \text{(III. 16)}$$

для кинематических скоростей движущихся частиц. Для фазовых скоростей бегущих электромагнитных волн по-прежнему сохраним оговоренное в [2] условие

$$\beta_ф^2 \gg 1. \quad \text{(III. 17)}$$

Уже при поверхностном изучении структуры правых частей дифференциальных уравнений системы (III. 1) обращает на себя внимание резкое различие *порядков* быстроты изменения поперечных кинематических переменных, связанных с *дрейфовым* и с *орбитальным* движениями: первые изменяются со скоростью порядка β^2 по сравнению со вторыми (правая часть уравнения для $\frac{\dot\beta_t}{\beta_i}$ делится на $\beta_i\beta_t$, а родственное слагаемое уравнения для $\dot\Theta$ — на β_t^2). Следовательно, в слаборелятивистском приближении можно пренебречь поперечным дрейфом центров электронных орбит и считать, что *оси винтовых электронных траекторий неподвижны.* При этом

$$X = X_i = \text{const};\ Y = Y_i = \text{const}, \tag{III. 18}$$

а первые два уравнения (III. 1) отбрасываются.

Третье уравнение системы (III. 1) целесообразно заменить полученным в [2] интегралом движения

$$\beta_z = \beta_{zi}\left[1 - \frac{1-\beta_\text{ф}\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}\beta_{zi}}\left(\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta_i^2}} - 1\right)\right], \tag{III. 19}$$

пользуясь которым, можно записать еще две дополнительные формулы для выражений, входящих в систему уравнений (III. 1):

$$\beta_z - \beta_\text{ф}^{-1} = (\beta_{zi} - \beta_\text{ф}^{-1})\left[1 + \left(\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta_i^2}} - 1\right)\right];$$

$$1 - \frac{\beta_z}{\beta_\text{ф}} = \left(1 - \frac{\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}}\right)\left[1 + \frac{1-\beta_\text{ф}\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}^2 - \beta_\text{ф}\beta_{zi}}\left(\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta_i^2}} - 1\right)\right]. \tag{III. 20}$$

Используем разложение

$$\sqrt{\frac{(1-\beta^2)}{(1-\beta_i^2)}} - 1 = (\beta_i^2 - \beta^2)/2. \tag{III. 21}$$

Можно видеть, что с относительной погрешностью, не превосходящей погрешности слаборелятивистского приближения (III. 16), допустимо принять в первом из соотношений (III. 20)

$$\beta_z - \beta_\text{ф}^{-1} = (\beta_{zi} - \beta_\text{ф}^{-1})\,[1 + o\,(\beta^2)] \tag{III. 22}$$

и, вследствие условия (III. 17), принять во 2-м из соотношений (III. 20)

$$1 - \frac{\beta_z}{\beta_\text{ф}} = \left(1 - \frac{\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}}\right)[1 + o\,(\beta^2)]. \tag{III. 23}$$

В уравнении (III. 19) с относительной ошибкой порядка β^2 допустимо принять

$$\beta_z = \beta_{zi}\,[1 + o\,(\beta^2)], \tag{III. 24}$$

однако лишь при **дополнительном** ограничении

$$\frac{|1-\beta_\text{ф}\beta_{zi}|}{2\,|\beta_\text{ф}\beta_{zi}|} \leqslant 1, \tag{III. 25}$$

которое в виде, разрешенном относительно $\beta_\text{ф}\beta_{zi}$, записывается как

$$\beta_\text{ф}\beta_{zi} \not\in \left(-1;\ \frac{1}{3}\right). \tag{III. 26}$$

Отсюда следует, что абсолютная величина фазовой скорости волны и продольная скорость электронов не должны быть слишком малыми. Ограничение (III. 26) и вслед за ним приближение (III. 24) выполняются, например, для технически разумных цифр $\beta_\phi = 2$, $\beta_{zl} = 0{,}1 \cdot \sqrt{3}$.

Итак, при одновременном выполнении ограничений (III. 16), (III. 17) и (III. 26)

$$\beta^2 \ll 1, \ \beta_\phi^2 \gg 1, \ \beta_\phi \beta_{zl} \notin \left(-1; \ \frac{1}{3}\right), \tag{III. 27}$$

которые в совокупности назовем *усиленными условиями слаборелятивистского приближения*, имеются все основания к тому, чтобы при изучении возмущенного винтового движения электронов руководствоваться близостью текущей и начальной продольных скоростей материальных частиц и связанных с этими скоростями выражений.

Резонансные силы

Разложим зависящие от поперечных координат скалярные функции Герца $\Pi^e(x, y)$, $\Pi^m(x, y)$ в ряды Тейлора по двум переменным в окрестности оси рассматриваемой электронной траектории

$$\Pi^e(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} \left[(x - X)\frac{\partial}{\partial X} + (y - Y)\frac{\partial}{\partial Y}\right]^\alpha \Pi^e. \tag{III. 28}$$

Здесь для компактности использована операторная форма записи; выражение для Π^m записывается аналогично.

В [2] использовались соотношения

$$x - X = \left(\frac{n\beta_t}{ks}\right)\cos\vartheta; \ y - Y = \left(\frac{n\beta_t}{ks}\right)\sin\vartheta. \tag{III. 29}$$

Используем их в (III. 28):

$$\Pi^e(x, y) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{n\beta_t}{ks}\right)^\alpha \left(\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial X} + \sin\vartheta\frac{\partial}{\partial Y}\right)^\alpha \Pi^e. \tag{III. 30}$$

Подставим теперь (III. 30) в выражение для рабочей гармоники

$$\Pi_n^e = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} (\exp jn\vartheta)\, \Pi^e d\vartheta, \tag{III. 31}$$

а затем поменяем порядок суммирования и интегрирования

$$\Pi_n^e = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{n\beta_t}{ks}\right)^\alpha \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(\exp jn\vartheta)\left(\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial X} + \sin\vartheta\frac{\partial}{\partial Y}\right)^\alpha d\vartheta\right]\Pi^e. \tag{III. 32}$$

Проанализируем оператор в квадратных скобках выражения (III. 32) для различных соотношений между целыми числами α и n.

Можно заметить, что при $\alpha < n$ подынтегральная функция состоит из чисто колебательных (по отношению к аргументу ϑ) слагаемых, а потому при всех $\alpha < n$ оператор тождественно равен нулю. Когда α достигает значения n, оператор принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left[\exp j\vartheta\left(\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial X}+\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial Y}\right)\right]^n d\vartheta \qquad \text{(III. 33)}$$

или, с использованием представления тригонометрических функций в комплексной форме Эйлера, вид

$$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left[\exp 2j\vartheta\left(\frac{\partial}{\partial X}-j\frac{\partial}{\partial Y}\right)+\frac{\partial}{\partial X}+j\frac{\partial}{\partial Y}\right]^n d\vartheta. \qquad \text{(III. 34)}$$

Теперь ясно, что после выполнения операции возведения в степень n ненулевой результат интегрирования дадут только слагаемые, не связанные с экспонентой, поэтому окончательный результат интегрирования

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(\exp jn\vartheta)\left(\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial X}+\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial Y}\right)^n d\vartheta=\frac{1}{2^n}\left(\frac{\partial}{\partial X}+j\frac{\partial}{\partial Y}\right)^n. \qquad \text{(III. 35)}$$

При $\alpha = n + 1$ подынтегральная функция оператора в квадратных скобках выражения (III. 32) снова состоит из чисто колебательных членов, потому оператор снова равен нулю. Значения оператора при $\alpha \geqslant n + 2$ в слаборелятивистском приближении уже нас не интересуют, так как их вклад в (III. 32) имеет порядок $o(\beta^2)$ по сравнению с вкладом (III. 35) за счет весового коэффициента $\left(\frac{n\beta_t}{ks}\right)^\alpha$, порядок малости которого растет как β^α.

Таким образом, в слаборелятивистском приближении из всего ряда (III. 32) сохраняется лишь одно слагаемое, для которого $\alpha = n$. Окончательное выражение для рабочей гармоники Π_n^e и аналогичное ему выражение для Π_n^m с учетом (III. 35) записываются как

$$\Pi_n^e=\frac{1}{n!}\left(\frac{n\beta_t}{2ks}\right)^n\nabla_\xi^n\Pi^e;$$

$$\Pi_n^m=\frac{1}{n!}\left(\frac{n\beta_t}{2ks}\right)^n\nabla_\xi^n\Pi^m, \qquad \text{(III. 36)}$$

где через ξ обозначена комплексная координата оси рассматриваемой винтовой траектории; ∇_ξ — комплексный дифференциальный оператор, вычисляемый для этой координаты;

$$\xi = X + jY;\ \nabla_\xi=\frac{\partial}{\partial X}+j\frac{\partial}{\partial Y}. \qquad \text{(III. 37)}$$

Из (III. 36) сразу следуют такие два полезных для упрощения системы (III. 1) дифференциальных соотношения:

$$\frac{\beta_t}{n}\cdot\frac{\partial\Pi_n^e}{\partial\beta_t}=\Pi_n^e;\quad \frac{\beta_t}{n}\cdot\frac{\partial\Pi_n^m}{\partial\beta_t}=\Pi_n^m. \qquad \text{(III. 38)}$$

Замкнутая дифференциальная задача в безразмерном виде

Подстановка всех полученных выше результатов, т. е. (III. 18), (III. 21) — (III. 24) и (III. 36) — (III. 38) в дифференциальную систему (III. 1) приводит к следующей формулировке слаборелятивистской замкнутой усредненной системы уравнений движения и возбуждения:

$$v_t' = \frac{\eta s_i}{v_{zi}\beta_t}\left(\frac{n\beta_t}{2ks_i}\right)^n\frac{1}{n!}\operatorname{Im}\left[\nabla_\xi^n\left(\sigma_i\Pi^eF^e+s_i\Pi^mF^m\right)\exp j\Theta\right];$$

$$\Theta' = \frac{\omega s_t - n\Omega_i}{v_{zi}} - \frac{n\Omega_t}{2v_{zi}}\cdot\frac{\beta_ф^2-1}{\beta_ф^2-\beta_ф\beta_{zt}}\left(\beta_{ti}^2-\beta_t^2\right)+$$

$$+\frac{n\eta s_i}{v_{zi}\beta_t v_t}\left(\frac{n\beta_t}{2ks_i}\right)^n\frac{1}{n!}\operatorname{Re}\left[\nabla_\xi^n\left(\sigma_i\Pi^eF_e+s_i\Pi^mF^m\right)\exp j\Theta\right]; \qquad \text{(III. 39)}$$

$$F^{e'}+F^{m'}=$$

$$=\frac{\beta_ф Zl}{S}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{1}{\beta_{zl}}\left(\frac{n\beta_t}{2ks_i}\right)^n\frac{1}{n!}\left[\nabla_\xi^n\left(\frac{\sigma_i}{h^e}\Pi^e+\frac{s_l}{h^m}\Pi^m\right)j\exp j\Theta\right]^* d\Theta_i,$$

где

$$\sigma_l=\frac{1-\beta_ф\beta_{zl}}{\beta_ф};\quad s_l=1-\frac{\beta_{zl}}{\beta_ф}. \qquad \text{(III. 40)}$$

Дальнейшее упрощение замкнутой дифференциальной задачи (III. 39) связано с переходом к системе безразмерных переменных и к обобщенным безразмерным параметрам.

Введем нормированную к единице независимую переменную (безразмерную продольную координату)

$$T=\frac{\zeta}{l}\in[0;\ 1], \qquad \text{(III. 41)}$$

где l — общая длина активного участка, и нормированную к единице зависимую переменную (безразмерную поперечную скорость)

$$\rho=\frac{v_t}{v_{ti}},\quad \rho_i=1, \qquad \text{(III. 42)}$$

где, по предложению, $v_{ti}\neq 0$, а также безразмерную комплексную амплитуду

$$A+jB=-\frac{l\eta s_t}{c^2\beta_{zi}\beta_{ti}^2}\left(\frac{n\beta_{ti}}{2ks_i}\right)^n\frac{1}{n!}\nabla_\xi^n\left(\sigma_i\Pi^eF^e+s_i\Pi^mF^m\right). \qquad \text{(III. 43)}$$

Далее введем безразмерный параметр частотной расстройки (полный фазовый угол пролета)

$$\varphi = l\,(\omega s_l - n\Omega_l)\,/\,v_{zl}, \tag{III. 44}$$

релятивистский параметр

$$\mu = l\,\frac{n\Omega_l}{2v_{zl}}\,\beta_{tl}^2\,\frac{\beta_\Phi^2 - 1}{\beta_\Phi^2 - \beta_\Phi\beta_{zl}} \tag{III. 45}$$

и токовый параметр

$$\varepsilon = \frac{l^2\eta s_l}{(c\beta_{zl}\beta_{tl})^2}\left\{\left[\left(\frac{n\beta_{tl}}{2ks_l}\right)^n \frac{\sigma_l}{n!}\left|\nabla_\xi^n \Pi^e\right|\right]^2 \frac{1}{h^e} + \right.$$

$$\left.\left[\left(\frac{n\beta_{tl}}{2ks_l}\right)^n \frac{s_l}{n!}\left|\nabla_\xi^n \Pi^m\right|\right]^2 \frac{1}{h^m}\right\}\frac{|\beta_\Phi|\,Zl}{S}. \tag{III. 46}$$

Подведем окончательные итоги.

При усиленном условии слаборелятивистского приближения магнитонаправляемое резонансное движение электронов в поле бегущей или слабо распространяющейся волны допустимо рассматривать в рамках упрощенной модели, когда положения осей винтовых траекторий частиц практически сохраняются, а продольная скорость лишь в малой мере испытывает возмущение, которое сказывается только путем влияния на величину расстройки допплеровской частоты поля относительно n-кратной гирочастоты электронов.

Существенное изменение претерпевают относительная вращательная скорость частиц ρ, *эффективная фаза* Θ *и составляющие* A, B *комплексной амплитуды сил поля, совместное поведение которых описывается следующей замкнутой системой сглаженных дифференциальных уравнений:*

$$\frac{d\rho}{dT} = -\rho^{n-1}\,(A\sin\Theta + B\cos\Theta);$$

$$\frac{d\Theta}{dT} = \varphi - \mu\,(1-\rho^2) - n\rho^{n-2}\,(A\cos\Theta - B\sin\Theta);$$

$$\frac{dA}{dT} = \pm\,\varepsilon\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\rho^n\sin\Theta\,d\Theta_1; \tag{III. 47}$$

$$\frac{dB}{dT} = \pm\,\varepsilon\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\rho^n\cos\Theta\,d\Theta_1,$$

где верхние знаки отвечают случаю попутной волны ($\beta_\Phi > 0$), *нижние — случаю встречной волны* ($\beta_\Phi < 0$).

Отметим, что замкнутая система дифференциальных уравнений, близкая по форме к (III. 47), была получена в [3] при анализе двумерного поведения электронных осцилляторов на основе априорного положения о том, что продольная скорость перемещения любого из центров осцилляций неизменна, фиксирована. Как ясно из рассмотренного выше, применительно к случаю винтового движения электронов в бегущем силовом поле двумерная модель с фиксированной поступательной скоростью не вполне приемлема даже при усиленном условии слаборелятивистского приближения. Во-первых, изучаемое движение существенно трехмерно и, во-вторых, что особо важно, именно *переменный* характер поступательной скорости вносит через посредство допплеровской частоты принципиальные коррективы в окончательное выражение для безразмерного релятивистского параметра, с которым связаны наиболее существенные физические особенности фазовой картины гирорезонансных режимов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Жураховский. Математический аппарат теории нелинейных колебаний электронов в магнитном поле. I. Метод усреднения в динамике магнитонаправляемых потоков. Сб. «Радиотехника», вып. 21. Изд-во ХГУ, Харьков, 1972.
2. В. А. Жураховский. Математический аппарат теории нелинейных колебаний электронов в магнитном поле. II. Усредненное винтовое движение. Сб. «Радиотехника», вып. 21. Изд-во ХГУ, Харьков, 1972.
3. В. К. Юлпатов. Нелинейная теория взаимодействия периодического электронного пучка с электромагнитной волной. «Изв. вузов, Радиофизика», 10, № 6, 1967.