НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ПОТОКА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Л. А. Поспелов

Харьков

На практике часто приходится иметь дело с нелинейным динамическим поведением электронного потока, помещенного во внешнем поле. Так, для теоретической электроники представляют интерес сведения о нелинейном процессе группирования и взаимодействия электронного потока с полями различных радиотехнических устройств (резонатор, замедляющая система, поле активного пространства дрейфа). Простейшей постановкой задачи, способной дать сведения о роли пространственного заряда и нелинейных эффектах, является гидродинамическое приближение для бесконечно широкого электронного потока. Однако и в этом случае исходные уравнения нелинейны и содержат частные производные. Методы отыскания аналитических решений таких уравнений разработаны слабо, а решение методами численного счета весьма трудоемко. Однако в гидродинамике известно, что в ряде случаев при использовании функции тока подобные системы удается свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям, для которых разработаны эффективные методы исследования решений. Этот прием был использован в работе [1] для получения общего решения системы гидродинамических уравнений холодной плазмы в отсутствие внешних полей. Исходная система трех нелинейных уравнений в частных производных в работе [1] сведена к одному неоднородному линейному уравнению второго порядка в обыкновенных производных с постоянными коэффициентами. Найденное в [1] общее решение этого уравнения дает исчерпывающее описание всех нелинейных эффектов в рамках применимости этой теории.

Однако обобщение метода работы [1] на случай влияния внешних полей встречает затруднение. Оно состоит в том, что поле пространственного заряда до получения общего решения известно с точностью до произвольной функции от времени, которая входит в окончательное уравнение. Это существенно сужает класс задач, для которых возможны точные решения.

В работе [2] удалось в общем виде найти эту функцию и получить ряд точных решений для нелинейных колебаний электронов плазмы во внешнем поле.

Настоящее сообщение продолжает работу [2] с целью нахождения точных решений для электронного потока во внешнем поле.

Исходная система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial t'} + V \frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{e}{m} (E + E_0 (x,\ t)); \tag{1}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t'} + \frac{\partial NV}{\partial x'} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x'} = eN \tag{3}$$

или

$$\frac{\partial E}{\partial t'} = - NV, \tag{4}$$

где V — скорость электронов, N — плотность, E — напряженность поля пространственного заряда, $E_0 (x',\ t')$ — поле внешних источников. Введем безразмерные переменные

$$t = \omega_p t',\ x = \frac{\omega_p x'}{V_a},\ v = \frac{V}{V_0}; \tag{5}$$

$$n = \frac{N}{N_0},\ \varepsilon = \frac{e}{m} \frac{E}{\omega_p V_0},\ \ \omega_p^2 = \frac{e^2 N_0}{m},$$

где V_0 — величина с размерностью скорости; N_0 — плотность электронов в фиксированном сечении потока.

В переменных (5) исходная система имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon + \varepsilon_0 (x,\ t); \tag{6}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nv}{\partial x} = 0; \tag{7}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = n; \tag{8}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = - nv. \tag{9}$$

Вводя функцию тока соотношениями

$$n = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{10}$$

и

$$nv = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{11}$$

получим

$$v = \frac{\partial x(t,\ \psi)}{\partial t}; \tag{12}$$

$$\frac{\partial \psi(t,\ x)}{\partial t} + v\frac{\partial \psi(x,\ t)}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

Уравнение (7) удовлетворяется тождественно, а уравнения (6), (7), (9) перепишутся в виде

$$\frac{\partial^2 x(t,\ \psi)}{\partial t^2} = \varepsilon(x,\ t) + \varepsilon_0(x,\ t); \tag{14}$$

$$\frac{\partial \varepsilon(x,\ t)}{\partial x} = -\frac{\partial \psi(x,\ t)}{\partial x}; \tag{15}$$

$$\frac{\partial \varepsilon(x,\ t)}{\partial t} = -\frac{\partial \psi(x,\ t)}{\partial t}. \tag{16}$$

Решение уравнений (15) и (16) имеет вид

$$\varepsilon = -\psi. \tag{17}$$

Константа интегрирования, не зависящая от поведения электронов, трактуется как внешнее поле и поэтому считается равной нулю, так как все внешнее поле содержится в величине ε_0. Итак, уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial^2 x(t,\ \psi)}{\partial t^2} + \psi = \varepsilon_0(x,\ t), \tag{18}$$

и допускается ряд точных решений для важных в практике видов внешнего поля:

1) однородного,
2) стационарного,
3) бегущей волны с произвольной фазовой скоростью.

В первом случае $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(t)$. Решение уравнения (18) имеет вид

$$x(t,\ \psi) = -\psi\frac{t}{2} + \int\limits_0^t dt \int\limits_0^t dt\varepsilon_0(t) + A(\psi)\,t + B(\psi). \tag{19}$$

Это соотношение дает зависимость функции тока ψ от координат x и времени t.

Согласно соотношениям (10)—(12), найдем плотность и скорость

$$v = -\psi t + \int\limits_0^t dt\varepsilon_0(t) + A(\psi); \tag{20}$$

$$n^{-1} = \frac{t}{2} - \frac{\partial A(\psi)}{\partial \psi}\cdot t - \frac{\partial B(\psi)}{\partial \psi}. \tag{21}$$

Для нахождения зависимостей $A(\psi)$ и $B(\psi)$ необходпмо воспользоваться дополнительными условиями. Пусть заданы начальные условия

$$n(x,\ 0) = h(x); \tag{22}$$

$$v(x,\ 0) = \nu(x). \tag{23}$$

Тогда начальное условие для ψ, согласно соотношению (10), будет иметь вид

$$\psi(x,\ 0) = -\int_0^x dx h(x). \tag{24}$$

После этого легко найти выражения для A и B:

$$B(\psi) = x(\psi); \tag{25}$$

$$A(\psi) = \nu(x(t)), \tag{26}$$

где $x = x(\psi)$ определяется соотношением (24).
Для граничных условий

$$n(0,\ t) = f(t), \tag{27}$$

$$v(0,\ t) = g(t) \tag{28}$$

из соотношения (11) следует

$$\psi(0,\ t) = \int_0^t dt fg; \tag{29}$$

$$A(\psi) = g(t(\psi)) + \psi t(\psi) - \int_0^{t(\psi)} dt \varepsilon_0(t); \tag{30}$$

$$B(\psi) = \psi \frac{t^2(\psi)}{2} - A(\psi) t(\psi) - \int_0^{t(\psi)} dt \int_0^t dt \varepsilon_0(t). \tag{31}$$

Пусть поле $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x)$. Тогда $\psi = \psi(x,\ t)$ задается соотношением

$$t = B(\psi) + \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A(\psi) + 2\left[\int_0^x dx \varepsilon_0(x) - \psi x\right]}} \tag{32}$$

при

$$v(x,\ t) = \sqrt{A(\psi) + 2\left[\int_0^x dx \varepsilon_0(x) - \psi x\right]}; \tag{33}$$

$$[nv]^{-1} = B'(\psi) - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx\,[A'(\psi) - 2x]}{\left\{A(\psi) + 2\left[\int_0^x dx \varepsilon_0(x) - \psi x\right]\right\}^{3/2}}. \tag{34}$$

Для случая начальных условий (22)—(24) функции $A(\psi)$ и $B(\psi)$ определяются соотношением

$$A(\psi) = \nu^2(x(\psi)) - 2\left\{\int\limits_0^{x(t)} dx\varepsilon_0(x) - \psi x(\psi)\right\}; \tag{35}$$

$$B(\psi) = -\int\limits_0^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{A(t) + 2\left[\int\limits_0^x dx\varepsilon_0(x) - \psi x\right]}}. \tag{36}$$

Если заданы граничные условия (27)—(29), то

$$A(\psi) = g^2(t(\psi)); \tag{37}$$

$$B(\psi) = t(\psi). \tag{38}$$

Если внешнее поле имеет вид бегущей волны $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(x - kt)$, то переход от искомой функции $x(t, \psi)$ к новой $\theta(t, \psi) = x - kt$ приводит уравнение движения к виду рассмотренного выше случая. Зависимость $\psi = \psi(x, t)$ определяется из соотношения

$$t = B(\psi) + \int\limits_0^{x-kt} \frac{d\theta}{\sqrt{A(\psi) + 2\left[\int\limits_0^\theta d\theta\varepsilon_0(\theta) - \theta\psi\right]}}. \tag{39}$$

Скорость электрона

$$v = \sqrt{A(\psi) + 2\left[\int\limits_0^{x-kt} d\theta\varepsilon_0(\theta) - \psi(x - kt)\right]}. \tag{40}$$

Плотность тока имеет вид

$$[nv)^{-1} = \frac{d}{d\psi} B(\psi) - \frac{1}{2}\int\limits_0^{x-kt} d\theta \frac{\frac{dA}{d\psi} - 2\theta}{\left\{A(\psi) + 2\left[\int\limits_0^\theta d\theta\varepsilon_0(\theta) - \theta\psi\right]\right\}^{3/2}}. \tag{41}$$

Для случая начальных условий (22)—(24)

$$A(\psi) = \nu^2(x(\psi)) - 2\left[\int\limits_0^{x(\psi)} d\theta\varepsilon_0(\theta) - \psi x(\psi)\right]; \tag{42}$$

$$B(\psi) = \int\limits_0^{x(\psi)} d\theta \int\limits_0^\theta d\theta \left\{A(\psi) + 2\int\limits_0^\theta d\theta\varepsilon_0(\theta) - \psi\theta\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{43}$$

Для граничных условий (27)—(29)

$$A(\psi) = g^2[t(\psi)] - 2\left[\int\limits_0^{-kt(\psi)} d\theta\varepsilon_0(\theta) + \psi kt(\psi)\right]; \tag{44}$$

$$B(\psi) = t(\psi) - \int_0^{-kt(\psi)} d\theta \left\{ A(\psi) + 2 \left[\int_0^{\theta} d\theta \varepsilon_0(\theta) - \psi\theta \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (45)$$

Детальному исследованию рассмотренных случаев и отысканию решений для других практически важных зависимостей ε_0 от x и t будут посвящены отдельные сообщения.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Kalman. Non — linear Ocsilations and Nonstasionary Flow in a Zero Temperature Plasma. Annals of Physics, 1960, v. 10, № 1.
2. Л. А. Поспелов. Нелинейные гидродинамические колебания электронов плазмы во внешнем поле. Препринт, ИРЭ АН УССР, 1972.