К РАСПРОСТРАНЕНИЮ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ, СОДЕРЖАЩИХ ПРОДОЛЬНО НЕОДНОРОДНЫЙ ДИЭЛЕКТРИК

Ю. В. Шаворыкин, Б. Н. Бондаренко

Донецк

Влияние продольной неоднородности диэлектрика, заполняющего волновод, на распространение электромагнитных волн представляет не только теоретический, но и практический интерес. В работе разрабатывается общий подход к исследованию волноводов, содержащих продольно неоднородный диэлектрик. Полученные результаты могут быть использованы при анализе волноводов, частично заполненных диэлектриком (к практическим конструкциям таких волноводных устройств можно отнести волноводные окна, диэлектрические переходы и т. п.).

Известно, что электрические и магнитные поля выражаются через потенциалы φ и $\overline{A}$ (при $\mu = 1$):

$$\overline{F} = -\operatorname{grad}\varphi + \frac{i\omega}{c}\overline{A}; \quad \overline{H} = \operatorname{rot}\overline{A}. \tag{1}$$

Уравнения Максвелла и уравнения

$$\operatorname{div}(\varepsilon\overline{E}) = 0, \quad \operatorname{div}(\mu\overline{H}) = 0 \tag{2}$$

будут удовлетворяться, если потенциалы φ и $\overline{A}$ подчинить условию

$$\varphi = -\frac{ic}{\omega\varepsilon}\operatorname{div}\overline{A} \tag{3}$$

и если потенциал $\overline{A}$ будет удовлетворять условию [1]

$$\Delta\overline{A} + k^2\overline{A} - \frac{2}{k}\operatorname{div}\overline{A}\operatorname{grad}k = 0, \tag{4}$$

где ε и μ — электрическая и магнитная проницаемости,

$$\varepsilon = \varepsilon(z); \ \mu = 1, \ k = k_0\sqrt{\varepsilon(z)}, \ k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

(λ_0 — длина волны).

Ограничившись декартовой системой координат, рассмотрим возможные частотные случаи, соответствующие прямоугольному волноводу. Получим следующие выражения для составляющих электромагнитного поля.

1. Вектор A направлен по оси z, т. е. $A_z = 0$, $A_x = A_y = 0$:

$$E_x = \frac{ik_0}{k^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}; \quad H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}; \tag{5}$$

$$E_y = \frac{ik_0}{k^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z}; \quad H_y = \frac{\partial A_z}{\partial x};$$

$$E_z = ik_0\left[A_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{k^2}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\right]; \quad H_z = 0,$$

что соответствует E-волнам.

2. Вектор A лежит в плоскости xy, т. е. $A_z = 0$, A_x, $A_y \neq 0$:

$$E_x = ikA_x; \quad H_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z};$$

$$E_y = ikA_y; \quad H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}; \tag{6}$$

$$E_z = 0; \quad H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y},$$

что соответствует H-волнам.

Как видно, поля в волноводе с продольно неоднородным диэлектриком, аналогично полям в волноводе с однородным диэлектриком, представим волнами E- и H-типов. Нетрудно заметить, что волны различных типов не взаимодействуют между собой.

Явные выражения для компонент полей получаются из решения уравнения (4), которое для рассматриваемых случаев приводится к следующему:

1 случай

$$\Delta A_z + k^2 A_z - \frac{1}{k^2}\frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{\partial k^2}{\partial z} = 0; \tag{7}$$

2 случай

$$\Delta A_\perp + k^2 A_\perp = 0, \tag{8}$$

где $A_\perp$ не содержит компоненты A_z $(A_z = 0)$.

Уравнение (8) представляет собой волновое уравнение с переменным волновым числом k. К волновому уравнению можно привести и (7), вводя функцию $\psi = \frac{A_z}{k}$:

$$\Delta\psi + \left(k^2 + \frac{k''}{k} - \frac{2(k')^2}{k^2}\right)\psi = 0. \tag{9}$$

Введя эффективное волновое число k при помощи формулы

$$k^2 = k^2 + \frac{k''}{k} - \frac{2(k')^2}{k^2}, \qquad (10)$$

выражение (7) перепишем в виде

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0. \qquad (11)$$

Таким образом, задача сводится к решению волновых уравнений (8), (11) с переменным коэффициентом k. При решении этого уравнения можно применить метод разделения переменных, в результате чего определяются мембранные функции, аналогичные мембранным функциям волновода с однородным диэлектриком, и получается уравнение относительно продольной составляющей в виде

$$\Delta Z(z) + k^2(z) Z(z) = 0. \qquad (12)$$

В частном случае H-волн последнее уравнение можно записать следующим образом:

$$\Delta Z(z) + k_0^2\left[\varepsilon(z) - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2\right] Z(z) = 0, \qquad (13)$$

или

$$\Delta Z(z) + k_0^2\left[\varepsilon(z) - \sin^2\alpha\right] Z(z) = 0, \qquad (14)$$

где λ_0 — критическая длина волны в волноводе; α — угол между направлением распространения плоских волн и осью волновода [2]. Вид решения данного уравнения зависит от конкретного вида функции $\varepsilon(z)$.

Рассмотрим случай линейно убывающей диэлектрической проницаемости (рисунок)

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_0 - az. \qquad (15)$$

Вводя новую переменную $\eta = \varepsilon(z) - \sin^2\alpha$, перепишем уравнение (14)

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial\eta^2} + \left(\frac{k_0}{a}\right)^2 \eta Z = 0. \qquad (16)$$

Решением этого уравнения являются функции Ханкеля порядка $\frac{1}{3}$ [3]:

$$Z = w^{\frac{1}{3}}\left[A H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(w) + B H^{(2)}_{\frac{1}{3}}(w)\right]; \quad w = \frac{2}{3}\frac{k_0}{a}\eta^{\frac{3}{2}};$$

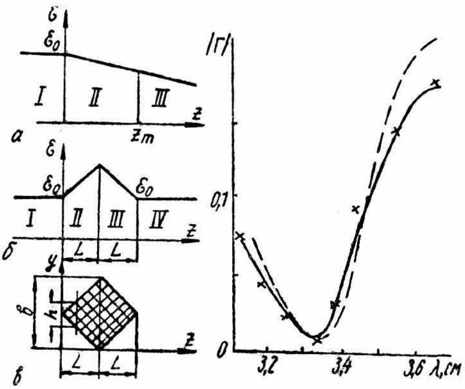
$$(z < z_m); \quad Z = w^{\frac{1}{3}}\left[C H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(iw) + D H^{(2)}_{\frac{1}{3}}(iw)\right]; \qquad 17)$$

$$w = \frac{2}{3}\frac{k_0}{a}(-\eta)^{\frac{3}{2}}; \quad (z > z_m).$$

где z_m — координата, при которой $\eta = 0$ $(D = 0)$. Исходя из конечности полей на бесконечности

$$Z_m = \frac{\varepsilon_0 - 1 + \cos^2 \alpha}{a}. \tag{18}$$

Из (17) видно, что при $z > z_m$ поле имеет затухающий характер. Определим коэффициент отражения от участка волновода, содержащего диэлектрик с линейно убывающей проницаемостью. Разобьем волновод на три области:



1. $\varepsilon = \varepsilon_0$;
2. $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $z < z_m$;
3. $\varepsilon = \varepsilon(z)$, $z > z_m$.

Обозначим коэффициент отражения через Г. Положим, что волна падает из участка с постоянной проницаемостью на участок волновода с изменяющейся проницаемостью. Поперечные составляющие электромагнитного поля в этих областях запишутся следующим образом:

1. $E_x = ik_0 [e^{ik_0 z} + \Gamma e^{-ik_0 z}]$; $H_y = [e^{ik_0 z} - \Gamma e^{-ik_0 z}]$;

2. $E_x = ik_0 w^{\frac{1}{3}} \left[A H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(w) + B H^{(2)}_{\frac{1}{3}}(w) \right]$; $H_y = \eta^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{3}} \Big[A H^{(1)}_{-\frac{2}{3}}(w) +$

$$+ B H^{(2)}_{-\frac{2}{3}}(w) \Big]; \tag{19}$$

3. $E_x = ik_0 w^{\frac{1}{3}} C H^{(1)}_{\frac{1}{3}}(iw_1)$; $H_y = \eta^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{3}} C H^{(1)}_{-\frac{2}{3}}(iw_1)$.

Используя связь между функциями Ханкеля и Бесселя, разлагая функции Бесселя в ряд по степеням аргументов в окрестности точки $z = z_m$ и используя условия непрерывности при $z = z_m$, получим связь между константами A, B и C:

$$A = Be^{i\frac{\pi}{3}}; \; C = iBe^{i\frac{\pi}{3}}. \tag{20}$$

Используя условия непрерывности при $z = 0$ (начало неоднородного участка), получим выражение для коэффициента отражения

$$\Gamma = \frac{I_{-\frac{2}{3}} - I_{\frac{2}{3}} + i\left(I_{\frac{1}{3}} - I_{-\frac{1}{3}}\right)}{I_{-\frac{2}{3}} - I_{\frac{2}{3}} - i\left(I_{\frac{1}{3}} - I_{-\frac{1}{3}}\right)}. \tag{21}$$

Здесь аргумент у всех функций один и тот же: $w_0 = w(z=0)$. Как видно из этого выражения, модуль коэффициента отражения равен единице. Перейдя от функций Бесселя к функциям Эйри [4], запишем коэффициент отражения в виде

$$\Gamma = e^{i\theta}, \tag{22}$$

где

$$\theta = -2 \operatorname{arctg}\left[\sqrt{t}\, \frac{v(-t)}{v'(-t)}\right] - \pi; \quad t = \left(\frac{3}{2} w_0\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Рассмотрим случай медленного изменения функции $\varepsilon(z)$, когда $t \gg 1$ и можно использовать асимптотику функций Эйри

$$V(-1) = t^{-\frac{1}{4}} \sin\left(w_0 + \frac{\pi}{4}\right); \quad V'(-t) = -t^{\frac{1}{4}} \cos\left(w_0 + \frac{\pi}{4}\right). \tag{23}$$

Подставляя эти выражения в (22), получим фазу коэффициента отражения

$$\theta = \left[\frac{4}{3}\frac{k}{a}(\varepsilon - \cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{2}\right]. \tag{24}$$

Определим фазу коэффициента отражения θ с точки зрения геометрической оптики

$$\theta = 2\int_0^{z_m} k(z)\,dz = 2k_0 \int_0^{z_m} \sqrt{\varepsilon(z) - \sin^2 \alpha dz} =$$

$$= \frac{2k_0}{a} \int_0^{\varepsilon - \cos^2\alpha} \eta^{\frac{1}{2}} d\eta = \frac{4}{3}\frac{k_0}{a}(\varepsilon - \cos^2\alpha)^{\frac{3}{2}}. \tag{25}$$

Это выражение совпадает с предыдущим с точностью до $\frac{\pi}{2}$ и определяет набег фазы коэффициента отражения при пробеге волны от точки $z=0$ до точки $z=z_m$ и обратно. Таким образом, фаза коэффициента отражения в плоскости $z=z_m$ равна $-\frac{\pi}{2}$. Как видно из (25), $z=z_m$ с точки зрения геометрической оптики соответствует месту поворота плоских волн. Расположение этой плоскости поворота, или, как принято называть ее в волноводной технике, «критического» сечения, определяется из (18).

Определим коэффициент отражения от участка волновода, в котором $\varepsilon(z)$ линейно возрастает от ε_0 до $\varepsilon(z) = \varepsilon$ и затем линейно убывает до прежнего значения ε_0 (рис. 1, *б*). Разделим волновод на четыре участка:

1. $\varepsilon = \varepsilon_0$; 2. $\varepsilon = \varepsilon_0 + az$; 3. $\varepsilon = \varepsilon - az$; 4. $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Записывая поперечные составляющие электромагнитного поля аналогично предыдущему случаю и используя условия непрерывности на границах областей, после ряда преобразований получим выражение для коэффициента отражения:

$$\Gamma = \frac{B_1B_2 + B_3B_4}{i(B_1B_2 - B_3B_4) - (B_2B_4 - B_1B_3)}, \tag{26}$$

где

$$B_1 = \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{21}; \quad B_2 = \alpha_{22}\beta_{12} - \alpha_{12}\beta_{22};$$

$$B_3 = \alpha_{11}\beta_{22} + \alpha_{22}\beta_{11}; \quad B_4 = \alpha_{21}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{21};$$

α_{mn}, β_{mn} — комбинации функций Бесселя, через которые выражаются функции Ханкеля:

$$H_{\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}}(\omega_n) = \alpha_{m,n} \pm \beta_{m,n}.$$

Знаки + и — соответствуют функциям Ханкеля первого и второго рода; $m = 1,2$ для функций Ханкеля индекса $\frac{1}{3}$ и $-\frac{2}{3}$ соответственно; $n = 1,2$ соответственно для областей с возрастающим и убывающим значением.

Результаты исследования волноводов с продольно неоднородным диэлектриком могут быть использованы для анализа и расчета частично заполненных диэлектриком волноводов (в том числе и при изменении степени заполнения по длине волновода) при введении эквивалентной диэлектрической проницаемости [5]. Расхождение между расчетными и экспериментальными данными при этом будет тем меньше, чем меньше связь основной волны с волнами высших типов и чем дальше отстоит рабочая частота от частоты резонанса волны высшего типа в участке волновода, содержащем диэлектрический элемент [6, 7, 8].

Проиллюстрируем применимость полученных результатов для расчета диэлектрических элементов, частично заполняющих волновод. Согласно [5], эквивалентная диэлектрическая проницаемость на волне H_{10} для прямоугольного волновода, частично заполненного по высоте, может быть определена по формуле

$$\varepsilon_{\text{экв}} = 1 + (\varepsilon - 1)\frac{h}{b}, \tag{27}$$

где ε — проницаемость диэлектрика. Остальные обозначения приведены на рисунке 1, *в*.

Как видно из этой формулы, линейное изменение проницаемости достигается линейным изменением высоты диэлектрической вставки. Диэлектрические элементы с конфигурацией, изображенной на рис. 1, *в*, были изготовлены из фторопласта-4 для волновода с поперечными размерами 23×10.

На рис. 1, *г* пунктирной линией изображены результаты расчетов по формуле (26) для образца с размером $L = 3$ *см*, сплошной линией — результаты измерений в трехсантиметровом диапазоне. Расхождение между расчетными и экспериментальными данными — в пределах погрешности эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Бреховских. Волны в слоистых средах. Изд. АН СССР, 1957.
2. Л. Де-Бройль. Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах. Изд-во иностр. лит., 1948.
3. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, 1961.
4. В. А. Фок. Таблицы функций Эйри. 1946.
5. A. D. Berk. Variational principles for electromagnetic resonators and waveguides. Trans. IRE, 1956, AP-4, № 2.
6. S. E. Miller. Bell System Techn. J. 1954, 35 (4), pp. 661—719.
7. A. P. King, E. A. Marcatili. Bell System Techn. J, 1956, 35 (4), pp. 899—906.
8. Ю. Я. Юров. Связь нормальных волн в волноводах с ферритом. «Изв. вузов, Радиотехника», 4, № 1, 1961.