УЧЕТ ПОТЕРЬ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ РЕЗОНАТОРЕ ПРИ ОБОСНОВАНИИ ПОНДЕРОМОТОРНОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ МОЩНОСТИ СВЧ, ч. I.

В. С. Жилков, Н. А. Хижняк

Харьков

В последнее время появилась серия работ [1, 2, 3, 10], посвященных отдельным вопросам теории пондеромоторного метода измерения мощности СВЧ. В некоторых из них [3] рассмотрены особенности абсолютной калибровки пондеромоторных ваттметров в реальных условиях, когда проводимость стенок линии передачи конечна, но достаточно большая. При этом авторы ставили перед собой задачу оценить величину погрешности калибровки, обусловленной конечной проводимостью стенок, если она выполняется согласно методике [1], в основе которой лежит теорема действия для электромагнитного резонатора без потерь [4].

Точка зрения авторов данной статьи по указанному вопросу существенно отличается от изложенной ранее. В частности, прежде чем говорить о погрешности абсолютной калибровки для реального случая, необходимо принципиально выяснить возможность распространения метода Каллена на системы с конечной проводимостью. Для этого требуется доказать теорему действия для электромагнитного резонатора с потерями, после чего, если окажется возможным, применить ее при выводе соотношения между силой, действующей на чувствительный элемент прибора, и мощностью СВЧ, передаваемой по тракту.

Доказательству теоремы действия для электромагнитного резонатора с конечной проводимостью стенок и распространению обобщенного метода абсолютной калибровки пондеромоторных ваттметров на системы с малыми потерями и посвящена данная статья.

Теорема действия в том виде, в котором она использовалась А. Л. Калленом при обосновании абсолютной калибровки пондеромоторных ваттметров, формулируется следующим образом.

«В электромагнитном резонаторе без потерь суммарная энергия инвариантна относительно любого адиабатического изменения, при котором период колебаний остается неизменным.»

Из доказательства теоремы следует, что необходимым условием является отсутствие потерь в стенках резонатора и в среде, заполняющей полость. В действительности, если потерями в среде можно пренебречь, то потерями в стенках резонатора (даже, если он изготовлен из серебра, меди и т. д.) пренебречь нельзя, в результате чего теорема в изложенной формулировке и сам метод измерения теряют свою строгость.

Проведение доказательства теоремы действия для электромагнитного резонатора с конечной проводимостью стенок в общем случае, когда деформация его приводит к изменениям периода колебаний τ, объема и констант среды, заполняющего полость, встретило серьезные трудности. Задача существенно упрощается, если по аналогии с [1] предположить, что при адиабатических деформациях τ и параметры среды не изменяются, если суммарный запас энергии остается неизменным. Таким образом, требуется доказать, что на запас электромагнитной энергии в резонаторе с конечной проводимостью стенок, подпитка которого осуществляется от внешнего источника при весьма слабой связи, не влияет любая малая по сравнению с объемом его деформация, при которой резонансная частота остается неизменной, если деформация протекает медленно по сравнению с периодом колебаний.

Соотношение между энергией электрического и магнитного полей для реального резонатора. Рассмотрим резонатор произвольной формы с объемом полости V, площадью поверхности s и проводимостью стенок σ. Обозначим объем, занимаемый токами, которые протекают в проводящей стенке, через V_2, а площадь поверхности, ограничивающей этот объем, S_2.

При рассмотрении считаем, что радиус кривизны R поверхности стенок резонатора значительно больше глубины скин-слоя d. Подпитка резонатора осуществляется от внешнего источника при весьма слабой его связи с резонатором.

Уравнения Максвелла для поля внутри проводника имеют вид

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{i\omega\mu}{c}\vec{H}; \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} + \frac{i\omega\varepsilon}{c}\vec{E}, \tag{2}$$

где μ — магнитная проницаемость;
σ — проводимость;
ε — диэлектрическая проницаемость;
$\vec{E}$, $\vec{H}$ — комплексные амплитуды электрического и магнитного полей;
c — скорость света.

Множитель вида $e^{i\omega t}$, характеризующий временную зависимость, здесь и дальнейшем не учитывается.

Произведя простейшие преобразования, из (1) и (2) нетрудно получить

$$\int\limits_{S_2}\left[\vec{E}\vec{H}^*\right]dS = -\frac{i\omega}{c}\int\limits_{V_2}\left(\mu\vec{H}\vec{H}^* - r\vec{E}\vec{E}^*\right)dV - \frac{4\pi}{c}\int\limits_{V_2}\sigma\vec{E}\vec{E}^* dV. \tag{3}$$

Для сравнения интегралов, стоящих в правой части выражения (3), воспользуемся соответствующими членами разложения E-и H-полей в ряд по степеням d. Согласно [5], в случае плоской поверхности, либо поверхности, у которой $R \gg d$, составляющие поля имеют вид

$$
\begin{aligned}
&E_x = \frac{\mu\omega d}{c} e^{-\frac{1+i}{d} z} \sqrt{\frac{i}{2}} H_{0y};\\
&E_y = -\frac{\mu\omega d}{c} e^{-\frac{1+i}{d} z} \sqrt{\frac{i}{2}} H_{0x};\\
&E_z = 0;\\
&H_x = e^{-\frac{1+i}{d} z} H_{0x};\\
&H_y = e^{-\frac{1+i}{d} z} H_{0y};\\
&H_z = 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Тогда, произведя подстановку составляющих из выражения (4) в формулу (3) и учитывая, что для металлов при

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)$$

выполняется соотношение [7]

$$\frac{4\pi\sigma}{\omega} \gg \varepsilon_0,$$

получаем $\int\limits_{S_2}$ в следующем виде:

$$\int\limits_{S_2} \left[\vec{E}\vec{H}^*\right] ds = -i \frac{\mu\omega d}{2c} \int\limits_{S_2} H_t^2 ds. \tag{5}$$

С другой стороны, рассматривая уравнения Максвелла для полости с параметрами ε_0, μ_0 и $\sigma = 0$, нетрудно получить

$$\int\limits_{S} \left[\vec{E}\vec{H}^*\right] ds = -\frac{i\omega}{c} \int\limits_{V} \left(\mu_0 \vec{H}\vec{H}^* - \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E}^*\right) dV. \tag{6}$$

Если теперь учесть, что $\int\limits_{S_2} \left[\vec{E}\vec{H}^*\right] ds$ — поток вектора Умова — Пойтинга, направленный из металла в полость, а $\int\limits_{S} \left[\vec{E}\vec{H}^*\right] ds$ — поток вектора Умова — Пойтинга, имеющий противоположное направление, их суммирование при $S_2 \cong S_1$ дает нуль, в итоге имеем

$$\frac{\omega}{c} \int\limits_{V} \left(\mu_0 \vec{H}\vec{H}^* - \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E}^*\right) dV = \frac{\mu\omega d}{2c} \int\limits_{S} H_t^2 ds. \tag{7}$$

Согласно [6], энергия, рассеиваемая в металлической стенке с конечной проводимостью, определяется соотношением

$$W_{\text{пот}} = \frac{\mu\omega d}{32\pi} \int\limits_{S} H_t^2 ds, \tag{8}$$

где μ — магнитная проницаемость металла. Если он не ферромагнетик, можно принять $\mu_0 = \mu$. Представив выражение (7) в виде

$$\omega \int\limits_V \left(\frac{\mu_0 \vec{H}\vec{H}}{16\pi} - \frac{\varepsilon_0 \vec{E}\vec{E}^*}{16\pi} \right) dV = \frac{\omega \mu d}{32\pi} \int\limits_S H_t^2 ds,$$

мы получим

$W_H = \frac{1}{16\pi} \int\limits_V \mu_0 \vec{H}\vec{H}^* dV$ — энергия магнитного поля;

$W_t = \frac{1}{16\pi} \int \varepsilon_0 \vec{E}\vec{E}^* dV$ — энергия электрического поля.

Здесь $\vec{E}$-и $\vec{H}$-поля для реального резонатора.

Тогда, учитывая, что суммарная энергия, запасенная в полости резонатора, равна $W_{зап} = W_E + W_H$ и со средним за период колебаний значением энергии потерь она связана известным соотношением

$$Q = \frac{\omega W_{зап}}{W_{пот}},$$

где Q — добротность резонатора, получаем следующее выражение:

$$W_H = \frac{Q+1}{Q-1} W_E. \tag{9}$$

Из (9) вытекает, что в отличие от идеального резонатора, у которого наблюдается равенство средних во времени энергий электрического и магнитного полей и, как следствие, неизменность запасенной в объемном резонаторе энергии, для резонатора с конечной проводимостью стенок имеет место неравенство $W_H > W_E$.

Если сравнивать энергии, запасенные в резонаторе без потерь и в резонаторе с потерями, связанном с внешним источником весьма слабой связью, то относительная разность этих энергий $\eta = 1/Q \cdot 100\,\%$ может быть использована для количественной оценки понятия «хорошая» или «большая» проводимость, очень часто встречающейся в отечественной и зарубежной литературе. Уже при $Q > 1000$ значение $\eta < 0{,}1\,\%$, что подтверждает справедливость пренебрежения потерями при решении целого ряда электродинамических задач. Однако теорема действия для электромагнитного резонатора не может быть отнесена к этому ряду, так как в противном случае остается неясным вопрос, будут ли потери влиять на величину электрического калибровочного коэффициента и вызовет ли пренебрежение потерями погрешность абсолютной калибровки.

Доказательство теоремы. Ограничиваясь рассмотрением электромагнитного резонатора с металлическими стенками конечной проводимости, у которого $R \gg d$, выпишем исходные уравнения

$$W_H = \frac{Q+1}{Q-1} \int\limits_V \frac{\varepsilon}{16\pi} \vec{E}\vec{E}^* dV; \tag{10}$$

$$W_E = \frac{Q-1}{Q+1} \int\limits_V \frac{\mu}{16\pi} \vec{H}\vec{H} dV; \tag{11}$$

$$W_n = \frac{\mu\omega d}{32\pi} \int\limits_S H_t^2 ds. \tag{8}$$

Формально уравнения (10) и (11) при $Q \to \infty$ по своей математической структуре совпадают с аналогичными формулами для нормальных колебаний в теории малых колебаний линейных систем со многими степенями свободы [8]. Разница состоит лишь в том, что в объемном резонаторе, представляющем собой колебательную систему с распределенными параметрами, число уравнений для нормальных колебаний бесконечно велико, а в теории линейных систем со многими степенями свободы число нормальных колебаний конечно, но принципиально может быть сколь угодно большим.

Для линейной системы без потерь, а следовательно, и для электромагнитного резонатора при $\sigma \to \infty$, уравнение Лагранжа, полностью описывающее движение системы, имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{g}} - \frac{\partial L}{\partial g} = 0,$$

где g — обобщенная координата; L — функция Лагранжа, равная $L = T - V$ (T — кинетическая энергия, V — потенциальная. Соответственно W_H — аналог кинетической энергии, W_E — потенциальной).

Учет сил трения при движении приводит к изменению уравнения Лагранжа, которое, согласно [8], становится следующим:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{g}} - \frac{\partial L}{\partial g} + \frac{\partial \xi}{\partial \dot{g}} = 0.$$

Здесь ξ — диссипативная функция Рэлея, вводимая в тех случаях, когда сила трения пропорциональна скорости движущейся точки. Физически диссипативная функция выражает скорость рассеивания энергии вследствие трения.

Для электромагнитного резонатора с конечной проводимостью стенок роль диссипативной функции Рэлея играет энергия, рассеиваемая в стенках резонатора, так что поэтому

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\mu\omega d}{32\pi} \int\limits_S H_t^2 ds. \tag{12}$$

В данном случае функция Лагранжа может быть представлена следующим образом:

$$L = \frac{1}{16\pi}\int\limits_V \left(\frac{Q-1}{Q+1}\mu\vec{H}\vec{H}^* - \varepsilon\vec{E}\vec{E}^*\right)dV =$$

$$= \frac{1}{16\pi}\int\left(\mu\vec{H}\vec{H}^* - \varepsilon\vec{E}\vec{E}^*\right)dV - \frac{1}{16\pi}\cdot\frac{2}{Q+1}\int\limits_V \mu\vec{H}\vec{H}^* dV = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) удобнее выразить в виде

$$L = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \vec{l}dV = 0, \quad (14)$$

где

$$l = \frac{1}{4}\mu\vec{H}\vec{H}^* - \frac{1}{4}\varepsilon\vec{E}\vec{E}^* - \frac{1}{2}\frac{1}{Q+1}\mu\vec{H}\vec{H}^*$$

представляет собой плотность функции Лагранжа.

Рассмотрим поведение интеграла при адиабатической деформации резонатора. Как и в [1] считаем, что деформация резонатора вызывает только изменения объема и поля.

При восполнении потерь в электромагнитном резонаторе от внешнего источника функция Лагранжа $L = 0$ до и после деформации. Следовательно, к нулю должно свестись и изменение интеграла (14). Тогда

$$\delta L = \delta\int\limits_V \vec{l}dV = \int\limits_{\delta V} ldV + \int\delta\vec{l}dV = 0, \quad (15)$$

или

$$\delta L = 1/4\pi\int\limits_{\delta V}\left(1/4\mu\vec{H}\vec{H}^* - 1/4\varepsilon\vec{E}\vec{E}^*\right)dV +$$

$$+ 1/4\pi\int\limits_V \delta\left(1/4\mu\vec{H}\vec{H}^* - 1/4\varepsilon\vec{E}\vec{E}^*\right)dV -$$

$$- \delta 1/16\pi\int\frac{2}{Q+1}\mu\vec{H}\vec{H}dV = 0.$$

Оставив без изменения первое слагаемое, выразим второе и третье через $W_з$, Q и ω. В этом случае нетрудно показать, что

$$\delta\left(1/16\pi\int\limits_V\frac{2}{Q+1}\mu\vec{H}\vec{H}^* dV\right) = \delta\left(\frac{W_{зап}}{Q}\right). \quad (16)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_V \delta\left(1/4\mu\vec{H}\vec{H}^* - 1/4\varepsilon\vec{E}\vec{E}^*\right)dV = \frac{\delta W_{пот}}{\omega} \quad (17)$$

при условии, что деформация не приводит к изменению поверхности резонатора, а только его объема и поля.

Предполагая неизменной собственную частоту резонатора при его адиабатической деформации, нетрудно получить равенство вида

$$\delta\left(\frac{W_{\text{пот}}}{\omega}\right)=\frac{\delta W_{\text{пот}}}{\omega}=\delta\left(\frac{W_{\text{зап}}}{Q}\right).$$

Следовательно,

$$\delta L=1/4\pi\int\left(1/4\mu\vec{H}\vec{H}^*\right)dV=0, \tag{18}$$

где $\vec{E}$, $\vec{H}$ — поля в реальном резонаторе, а подынтегральное выражение представляет собой плотность функции Лагранжа, равную разности между плотностями энергией магнитного и электрического полей.

Выражение (18), полученное при рассмотрении реального резонатора, полностью совпадает с аналогичной формулой для идеального резонатора. Это совпадение имеет вполне логическое объяснение. Действительно, и в одном, и в другом случае подынтегральное выражение представляет собой разность между энергией магнитного и электрического полей, которая для системы с потерями не равна нулю, а для идеального резонатора есть нуль.

Вариация плотности функции Лагранжа при изменении объема для идеального резонатора также равна нулю, ибо суммарная энергия его не изменяется во времени. Этот вывод очевиден.

Рассматривая резонатор с конечной проводимостью стенок, мы предположили, что потери энергии в нем восполняются извне так, что соотношение между энергиями E- и H- поля не изменяется, и суммарная энергия есть const. В этом случае разность между плотностями энергий магнитного и электрического полей не равна нулю, однако она постоянна, следовательно, вариация ее также должна равняться нулю.

Таким образом, вариация плотности функции Лагранжа, как и для идеального резонатора с потерями при адиабатических деформациях, равна нулю.

Теперь необходимо показать, что интеграл (18) выражает собой работу δA, произведенную полем при изменении объема резонатора на величину δdV.

Для этого получим формулу для результирующей силы $\vec{F}_R$, с которой поле в реальном резонаторе действует на его стенки.

Согласно [9],

$$\vec{F}_R=\int\limits_S\vec{R}d\vec{s},$$

где $\vec{R}$ — сила, с которой поле действует на единицу поверхности резонатора.

С другой стороны,

$$\vec{R} = \vec{R}_e + \vec{R}_H,$$

$$R_e = \varepsilon_0 \vec{E}_n \vec{E} - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \vec{n};$$

$$R_H = \mu_0 \vec{H}_n \vec{H} - \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \vec{n}. \qquad (19)$$

Здесь $\vec{R}_e$ — отнесенная к единице поверхности сила, с которой напряженность электрического поля действует на индуктированные заряды; $\vec{R}_H$ — отнесенная к единице поверхности сила, с которой напряженность магнитного поля действует на поверхностные токи; $\vec{E}_n$, $\vec{H}_n$ — нормальные составляющие электрического и магнитного полей.

Поверхностная сила $\vec{F}_R$ в том случае, когда проводимость стенок резонатора конечна, имеет тангенциальную и нормальную составляющие. Однако работу производит только нормальная составляющая, выражение для которой имеет вид

$$\vec{R}_H = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_n^2 - \frac{1}{2} H_t^2 \mu_0. \qquad (20)$$

и совпадает с формулой для поверхности силы, действующей на идеально проводящую стенку.

С другой стороны, нормальная составляющая силы, действующая на стенку резонатора с конечной проводимостью, равна разности между средними плотностями энергий электрического и магнитного полей на стенке

$$\vec{R} = (W_e - W_H)\,\vec{n}.$$

Поверхностную силу, направленную против внешней нормали и отнесенную к единице площади, принято называть давлением. Следовательно, давление, производимое периодическим полем на стенки реального резонатора, равно

$$p_3 = W_H - W_C.$$

Переписав выражение (18) в виде

$$\delta L = \frac{1}{4}\pi \int\limits_{\delta V} \left(1/4\mu \vec{H}\vec{H}^* - \frac{1}{4}\varepsilon \vec{E}\vec{E}^*\right) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\delta V} (\omega_H - \omega_e)\, dx = 0$$

и анализируя его, можно сделать вывод, что плотность функции Лагранжа есть давление, производимое периодическим полем на единицу поверхности резонатора, т. е. $\left|\vec{e}\right| = p_s$, а интеграл (18) выражает работу δA, произведенную полем при изменении объема на величину δdV. Так как изменение интеграла при адиабатической деформации резонатора с конечной проводимостью стенок не произошло, следовательно, и $\delta A = 0$, т. е. изменение суммарной энергии в резонаторе также равно нулю. Это и есть теорема действия, которая для электромагнитного резонатора с омическими потерями формулируется следующим образом. *В электромагнитном резонаторе с конечной проводимостью стенок суммарная энергия инвариантна относительно любого адиабатического изменения, при котором период колебаний и площадь поверхности остаются неизменными, а потери восполняются от внешнего источника при весьма слабой связи его с резонатором* [*10*].

В таком виде теорема может быть использована для вывода соотношения между силой, которая действует на подвижный элемент в линии передачи с потерями, и мощностью СВЧ.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. L. Cullen. General Method for the Absolute Measurement of Microwave Power. Proc. IEE, 1952, 99, pt. IV, p. 112.
2. A. L. Cullen. Absolute Power Measurement of Microwave Ereguencies. Proc. IEE, 1952, 99, pt, IX, p. 137.
3. В. Г. Орлов. О погрешности абсолютной калибровки пондеромоторных ваттметров, вызванной потерями. «Вопросы радиоэлектроники», VI, 3, 1963.
4. W. R. Maclean. The Resonator Aetion Theorem. Quait. J. appl. math., 1945, 2, p. 329.
5. С. М. Рытов. К расчету поглощения электромагнитных волн в трубах. ЖЭТФ, т. 10, вып. 2. 1940.
6. С. М. Рытов. Расчет скин-эффекта методом возмущений. ЖЭТФ, т. 10, вып. 2, 1940.
7. Дж. А. Стрэттоп. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, 1948.
8. Г. Голдстейн. Классическая механика. Госиздат, 1957.
9. С. Д. Гвоздовер. Теория электронных приборов сверхвысоких частот. Госиздат, 1956.
10. В. С. Жилков. Исследование и разработка образцов пондеромоторных измерителей мощности СВЧ. Автореф. канд. дисс., Харьков, 1968.