ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ОТВЕТВЛЯЮЩИХ УСТРОЙСТВ

В. Ю. Лейкин

Москва

В первой части [5] настоящей работы рассмотрены некоторые функции передачи ответвляющих устройств СВЧ, процесс синтеза которых можно представить в замкнутом виде. Однако аналитические методы построения полиномов Чебышевского приближения имеют ограниченное применение и не исчерпывают большого числа разнообразных задач синтеза.

В последнее время широкое распространение получили численные методы последовательных приближений, которые строятся на теоремах весьма общего характера и позволяют быстро находить оптимальное решение [1, 2].

Известен аналитический способ синтеза реализуемой функции передачи интегрального модового селектора или направленного ответвителя на линиях с различными фазовыми скоростями связываемых волн [3]. Указанная функция передачи задается в следующем виде:

$$F(\varphi) = \begin{cases} 1, \text{ если } \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2; \\ 0, \text{ если } \bar{\varphi}_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2. \end{cases} \qquad (1)$$

В качестве меры точности аппроксимации $F(\varphi)$ в работе [3] предлагается использовать величину среднеквадратичного уклонения соответствующего ряда Фурье, дополненного множителем сходимости Ланцоша. Несмотря на значительное ослабление явления Гиббса, рассмотренный метод синтеза не может считаться оптимальным. Следуя терминологии [5], сформулируем следующую задачу оптимального синтеза функции (1).

Из всех полиномов $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi; I_0, I_1, \ldots, I_M)$ класса целых функций конечной степени $B_{L/2}$ определить такой, для которого величина уклонения

$$\sup |F(\varphi) - \Phi(\varphi)| \equiv \delta^*(I_0, I_1, \ldots, I_M) = \min \qquad (2)$$

на двух заданных отрезках $[\varphi_1, \varphi_2]$ и $[\bar{\varphi}_1, \varphi_2]$ — минимальна.

Величина равномерного приближения $\delta^*(I_0, I_1, I_2, \dots I_M) = \delta^*(I)$ представляет собой непрерывную функцию параметров $I_0, I_1, \dots, I_M$, которую можно рассматривать как функцию точки $I = (I_0, I_1, \dots, I_M)$ в соответствующем $(M+1)$-мерном евклидовом пространстве [1]. Из непрерывности $\delta^*(I)$ следует возможность решения (2) по крайней мере для одного набора I_0, $I_1, \dots, I_M$.

Заданная в (1) функция $F(\varphi)$ не является непрерывной, однако при выполнении условия $\varphi_1 < \bar{\varphi}_1$ ее можно доопределить

$$F(\varphi) = \psi(\varphi) \tag{3}$$

на отрезке $[\varphi_1, \bar{\varphi}_1]$, где $\psi(\varphi)$ — непрерывная на $[\varphi_1, \bar{\varphi}_1]$ целая функция конечной степени из $BL/2$, удовлетворяющая граничным условиям: $\psi(\varphi_1) = 1$ и $\psi(\bar{\varphi}_1) = 0$.

Для непрерывной функции $F(\varphi)$ решение (2), в соответствии с известной теоремой Хаара, не только существует, но оно и единственно.

Аналитические методы нахождения реализуемой $\Phi(\varphi)$ из условия (2) отсутствуют, из численных методов наиболее эффективным является второй полиноминальный алгоритм Ремеза. В основу алгоритма положена следующая теорема [4].

Для того чтобы полином $\Phi(\varphi)$ степени M был наименее уклоняющимся от данной непрерывной функции $F(\varphi)$ на замкнутом и ограниченном множестве $\{\varphi\}$, необходимо и достаточно, чтобы абсолютный максимум разности $|F(\varphi) - \Phi(\varphi)$ достигался не менее чем в $M+1$ последовательных точках множества $\{\varphi\}$, в которых знаки разности $F(\varphi) - \Phi(\varphi) = d(\varphi)$ последовательно противоположны.

Строгое обоснование сходимости второго полиноминального алгоритма содержится в работе [1]. Ниже будет изложена лишь формальная последовательность вычислений.

1. На отрезках $[\varphi_1, \varphi_2]$ и $[\bar{\varphi}_1, \varphi_2]$ произвольно выбирается $M+1$ точек φ_n, образующих первое приближение. В качестве φ_n берутся точки, в которых функция $\Phi(\varphi)$ имеет значения, противоположные по знаку.

2. По выбранным значениям φ_n строится система уравнений:

$$\begin{gathered}\delta_1 + \Phi(\varphi_1;\ I_1,\ I_2,\ \dots,\ I_M) = F(\varphi_1);\\ -\delta_1 + \Phi(\varphi_2;\ I_1,\ I_2,\ \dots,\ I_M) = F(\varphi_2);\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ (-1)^{M+1}\delta_1 + \Phi(\varphi_{M+1};\ I_1,\ I_2,\ \dots,\ I_M) = F(\varphi_{M+1}),\end{gathered}$$

из которой определяются коэффициенты $I_1^{(0)}, I_2^{(0)}, \dots, I_M^{(0)}$ и величина модуль-максимума уклонения $\delta_1^{(0)}$.

3. Исследуется на экстремум функция

$$d_0(\varphi) = F(\varphi) - \Phi(\varphi;\ I_1^{(0)},\ I_2^{(0)},\ \dots,\ I_M^{(0)}$$

и определяется комбинация $M+1$ точек $\varphi_n^{(0)}$, в которых $d_0(\varphi)$ имеет максимальные значения с чередующимися знаками.

4. Находится поправка $\Phi(\varphi;\ dI_1^{(0)},\ dI_2^{(0)},\ \ldots,\ dI_M^{(0)})$ к полиному $\Phi(\varphi;\ I_1^{(0)},\ I_2^{(0)},\ \ldots,\ I_M^{(0)})$, для чего решается следующая система линейных уравнений:

$$\delta_1 + \Phi(\varphi_1^{(0)};\ dI_1^{(0)},\ dI_2^{(0)},\ \ldots,\ dI_M^{(0)}) = d_0(\varphi_1^{(0)});$$

$$-\delta_1 + \Phi(\varphi_2^{(0)};\ dI_1^{(0)},\ dI_2^{(0)},\ \ldots,\ dI_M^{(0)}) = d_0(\varphi_2^{(0)});$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^{M+1}\delta + \Phi(\varphi_{M+1}^{(0)};\ dI_1^{(0)};\ dI_2^{(0)},\ \ldots,\ dI_M^{(0)}) = d_0(\varphi_{M+1}^{(0)}).$$

5. Определяется многочлен первого приближения

$$\Phi(\varphi;\ I_1^{(1)},\ I_2^{(1)},\ \ldots,\ I_M^{(1)}) = \Phi(\varphi;\ I_1^{(0)},\ I_2^{(0)},\ \ldots,\ I_M^{(0)}) + $$
$$+\Phi(\varphi;\ dI_1^{(0)},\ dI_2^{(0)},\ \ldots,\ dI_M^{(0)}).$$

6. Решается вопрос о целесообразности дальнейших вычислений. При этом можно воспользоваться теоремой Валле — Пуссена [4], из которой вытекает следующая оценка:

$$\delta_{\min} \leqslant \delta^* \leqslant \delta_{\max},$$

где δ^* — погрешность аппроксимации, обеспечиваемая номиналом наилучшего приближения; $\delta_{\min}$, $\delta_{\max}$ — экстремальные значения функции $d_1(\varphi) = F(\varphi) - \Phi(\varphi;\ I_1^{(1)},\ I_2^{(1)},\ \ldots,\ I_M^{(1)})$.

При необходимости весь процесс вычислений повторяется, что приводит к росту $\delta_{\min}$ и уменьшению $\delta_{\max}$.

В рассматриваемом случае в качестве аппроксимирующей функции $\Phi(\varphi)$ используется полином степени M

$$\Phi(\varphi) = \sum_{n=0,\,1,\,3\ldots}^{M} I_n \cos n\varphi, \tag{4}$$

который образует систему Чебышева на отрезке $[0,\ \pi]$. Используя (1) и (4), задачу синтеза можно записать следующим образом:

$$\sup_{\varphi\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2} \left| 1 - \sum_{n=0,\,1,\,3\ldots}^{M} I_n \cos n\varphi \right| = \min! \tag{5}$$

$$\sup \left| \sum_{n=0,\,1,\,3\ldots}^{M} I_n \cos n\varphi \right| = \min.$$

На основе второго алгоритма Ремеза в соответствии с изложенным процессом вычислений была составлена программа и построены полиномы для ряда значений параметров M, φ_1, φ_2, $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$.

---

* Все вычисления проводились на ВЦ УДН им. П. Лумумбы под руководством Ю. А. Рябова.

Коэффициенты полинома, а также точки и величины его экстремальных уклонений при $M = 15$, $\varphi_1 = 0{,}77935$, $\varphi_2 = 0{,}84946$, $\bar{\varphi}_1 = 1{,}83645$, $\varphi_2 = \pi$ сведены в табл. 1 (здесь и в дальнейшем для записи коэффициентов и уклонений применяется запись с плавающей запятой).

Таблица 1

n	l_n	φ	δ
0	5 000 000—00	0.779 350	33 376—02
1	6 328 112—00	1.836 450	—33 376—02
3	—1 988 835—00	1.886 450	33 376—02
5	1 075 553—00	2.016 450	—33 376—02
7	—6 352 040—01	2.186 450	33 816—02
9	3 984 376—01	2.376 450	—34 012—02
11	—2 218 027—01	2.576 450	33 376—02
13	1 366 486—01	2.776 450	—33 376—02
15	6 475 986—02	3.026 450	33 932—02

Из анализа таблицы видно, что максимальное уклонение, обеспечиваемое полиномом лучшего приближения, находится на отрезке (0,0 033 376; 0,0034 012) и найденное решение совпадает с точным с погрешностью, не превышающей 10^{-3}.

Полученное оптимальное приближение целесообразно сравнить с аппроксимацией, выполняемой на основе минимизации среднеквадратичного уклонения [3].

Среднеквадратичное приближение задается следующей функцией:

$$\Phi(\varphi) = 0{,}5 + \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{8} \frac{(-1)^p}{2p-1} \frac{\cos[0{,}5(2p-1)(\pi - 2\varphi_2)]}{[\pi^{-1}(2p-1)(\pi - 2\varphi_2)^2 - 1} \times$$

$$\times \sigma_{2p-1} \cos(2p-1)\varphi, \tag{6}$$

где $\sigma_{2p-1} = \dfrac{\sin\left[(2p-1)\dfrac{\pi}{16}\right]}{(2p-1)\dfrac{\pi}{16}}$ — множитель Ланцоша, и обеспечивает на отрезке (1,83; 1,98) следующие экстремальные значения уклонений.

Таблица 2

φ	$\Phi(\varphi)$
1,83	5 530 793—01
1,93	8 076 231—02
1,96	2 940 343—02
1,98	9 356 730—03

Максимальное значение функции (6) в полосе (1,98; π) не превосходит $0{,}93567 \times \times 10^{-3}$.

Полученные результаты показывают, что в случае среднеквадратичного приближения на краях диапазона аппроксимации наблюдается остаточное проявление эффекта Гиббса. Осцилляции функции быстро затухают и при $\varphi = 1{,}96$ экстремальное уклонение практически совпадает с максимальным значением чебышевского приближения (табл. 1). При дальнейшем возрастании аргумента среднеквадратичное приближение дает лучшие результаты. Так, на отрезке $[1,98; \pi]$ оно составляет $0,93567\ 10^{-3}$, что при конструировании ответвителя обеспечит дополнительную направленность около 11 дб.

Учитывая отмеченную неравномерность среднеквадратичного приближения в полосе аппроксимации, при расчете конкретных направленных ответвителей или модовых селекторов необходимо искусственно несколько расширять диапазон подавления, вводя тем самым поправку на явление Гиббса. Как показывают численные расчеты, увеличение коэффициента перекрытия диапазона (в единицах φ) в 1,1 раза может считаться вполне достаточным.

Справедливость сделанных выводов можно иллюстрировать еще одним численным примером аппроксимации функции (1) на отрезках $[0,255; 0,441]$ и $[1,12; \pi]$ полиномом (4), в котором помимо нечетных учитываются также и четные гармоники при $M = 8$.

Используя принятую форму записи (5), получаем

$$\max_{\varphi\in[0,255;\ 0,441]} \left| 1 \sum_{n=0}^{8} I_n \cos n\varphi \right| = \min_{\vec{I}_n};$$

$$\max_{\varphi\in[1,12;\ \pi]} \left| \sum_{n=0}^{8} I_n \cos n\varphi \right| = \min_{\vec{I}_n}. \qquad (7)$$

Так же, как и предыдущая, эта задача решалась в соответствии с изложенной последовательностью вычислений, что после трех итераций привело к следующим результатам (табл. 3):

Таблица 3

n	I_n	φ	δ
0	2 376 980—00	0,255	1 084 751—01
1	4 234 358—00	0,355	—1 084 752—01
2	2 902 218—00	0,435	1 084 751—01
3	1 309 200—00	1,12	1 084 751—01
4	3 002 459—02	1,24	1 084 751—01
5	6 233 116—01	1,88	1 084 752—01
6	6 687 113—01	2,28	1 084 751—01
7	4 642 079—01	2,70	1 086 539—01
8	7 599 068—02	3,14	1 084 752—01

В данной таблице приведены коэффициенты полинома (4) и его экстремальные значения. В соответствии с теоремой Валле—Пуссена погрешность аппроксимации не превышает 10^{-4}.

Аналогичное среднеквадратичное приближение можно выполнить с помощью функции (3)

$$\Phi(\varphi) = 0{,}25 + \frac{\pi^2}{8}\sum_{n-1}^{8} \frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{\frac{\pi n}{4}} \frac{\cos n\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_2\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left[n\left(\frac{\pi}{4} - \varphi_2\right)\right]^2} \sigma_n \cos n\varphi =$$

$$= \sum_{n=0}^{8} I_n \cos n\varphi; \qquad (8)$$

здесь

$$\sigma_n = \frac{\sin\frac{\pi n}{16}}{\frac{\pi n}{16}}.$$

Значения коэффициентов ряда (8) сведены в табл. 4.

Таблица 4

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
I_n	25—00	442 238—00	2 964 011—00	1 276 569—00	0	—5 681 871—01	—5 402 008—01	—2 511 342—01	0

Из табл. 3 и 4 очевидна идентичность характера изменения коэффициентов Чебышевского и Фурье-полиномов в зависимости от номера.

Поведение функции (8) на отрезке [1,12; π] видно из табл. 5, где приводятся экстремальные точки и значения модуль-функции в этих точках.

Таблица 5

φ	1,12	1,17	1,775	2,0
$\Phi(\varphi)$	408—01	100—01	391—02	655—02

Здесь так же, как и в рассмотренном случае в начале интервала проявляется эффект Гиббса: начиная со значения $\varphi = 1{,}17$ чебышевское и среднеквадратичное приближения имеют одинаковые уклонения. На отрезке [1,75; π] среднеквадратичное приближение дает лучшие результаты.

В рассмотренных выше случаях проводилась минимизация максимального уклонения в соответствии с (2) и (5). Второй алгоритм Ремеза допускает модификацию, которая при заданной точности аппроксимации обеспечивает минимальное число членов ряда (4). При этом задача синтеза имеет вид

$$\sup_{\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2} \left|1 - \sum_{n=0}^{M} I_n \cos n\varphi\right| = \delta,$$
$$\sup_{\bar{\varphi}_1 \leqslant \varphi \leqslant \bar{\varphi}_2} \left|\sum_{n=0}^{m} I_n \cos n\varphi\right| = \delta \quad \text{при } M = \min!, \tag{9}$$

где δ — максимальное уклонение аппроксимирующего полинома.

Зависимость степени полинома от точности приближения видна из табл. 6, составленной для ряда конкретных значений модуль-максимума уклонения на отрезках $\varphi \in [0{,}255;\ 0{,}441]$ и $[1{,}12;\ \pi]$.

Таблица 6

δ	060—01	330—01	140—01	960—02	630—02
M	5	6	7	9	10

Из сопоставления табл. 5 и 6 очевиден выигрыш в степени полинома, который обеспечивает оптимальная аппроксимация (9) по сравнению с приближением Фурье (8), если за величину допустимого уклонения принять его максимальное значение из табл. 5. Степень полинома при этом понизится на две единицы, что может оказаться весьма существенным при практической реализации полученных функций передачи.

Однако достижение максимальной точности, которую дает ряд (8) при оптимальном синтезе потребует увеличения степени полинома на две единицы.

Таким образом, среднеквадратичное приближение (8) дает результаты, заключенные между значениями уклонений оптимальных полиномов степеней 6 и 10.

ВЫВОДЫ

1. Модифицированный второй алгоритм Ремеза является весьма эффективным средством построения реализуемых функций передачи модовых селекторов и направленных ответвителей с неравными фазовыми скоростями связываемых волн.

2. Предложенный в работе [3] метод синтеза измерительных ответвляющих устройств на основе рядов Фурье с множителями сходимости Ланцоша дает результаты, незначительно отличающиеся от оптимальных, и может быть назван «квазиоптимальным».

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Я. Ремез. Основы численных методов Чебышевского приближения. Изд-во «Наукова думка», 1969.

2. А. А. Ланнэ. Оптимальный синтез линейных электрических цепей. Изд-во «Связь», 1969.

3. В. Ю. Лейкин. Синтез измерительных ответвляющих устройств. «Вопросы радиоэлектроники», серия «Радиоизмерительная техника», вып. 4, 1970.
4. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. Изд-во «Наука», 1965.
5. В. Ю. Лейкин. Вопросы оптимального синтеза ответвляющих устройств, ч. I. вып. 18. Сб. «Радиотехника». Изд-во ХГУ, Харьков, 1971.