СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ И ПОЛЯ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ ТРАПЕЦЕИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ

А. И. Терещенко, Ж. Ф. Пащенко

Харьков

Исследуемый резонатор (рис. 1) представляет собой объем, ограниченный плоскими металлическими поверхностями, две из которых — трапеции, а остальные — прямоугольники. Его можно рассматривать как закороченный с двух сторон отрезок нерегулярного волновода прямоугольного сечения, расширяющегося

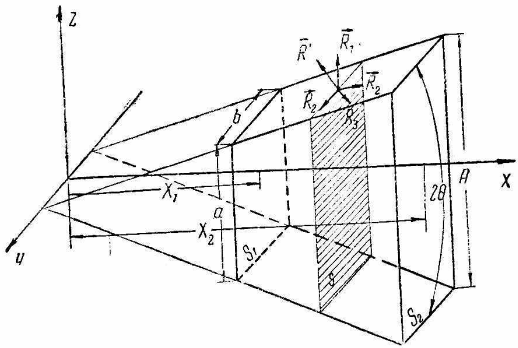


Рис. 1.

в направлении распространения волны. Краевая задача для подобной системы не может быть решена методом разделения переменных, ввиду чего целесообразно использование приближенного метода — метода косоугольных координат [1].

В соответствии с рис. 1

$$u_1 = \operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{x},\ u_2 = y,\ u_3 = x,\ x = u_3,\ y = u_2,\ z = u_3 u_1.$$

Координатные векторы $\vec{R}_i$, взаимные векторы $\vec{R}^j$ и связанные с ними величины:

$$\vec{R}_1 = u_3 \vec{z}_0,\ \vec{R}_2 = \vec{y}_0,\ \vec{R}_3 = \vec{x}_0 + u_1 \vec{z}_0,$$

$$R_1 = u_3,\ R_2 = 1,\ R_3 = \sqrt{1 + u_1^2},\ g_{11} = u_3^2,\ g_{22} = 1,\ g_{33} = 1 + u_1^2,$$

$$g_{12} = 0,\ g_{23} = 0,\ g_{31} = u_1 u_3,\ \sqrt{g} = -u_3,$$

$$\vec{R}^1 = \frac{\vec{z}_0 - u_1 \vec{x}_0}{u_3},\ \vec{R}^2 = \vec{y}_0,\ \vec{R}^3 = \vec{x}_0,$$

$$g^{11}=\frac{1+u_1^2}{u_3^2},\ g^{22}=1,\ g^{33}=1,\ g^{12}=0,\ g^{23}=0,\ g^{31}=-\frac{u_1}{u_3},$$

где $\vec{x}_0$, $\vec{y}_0$, $\vec{z}_0$ — единичные орты.

Налагая граничные условия

$$\begin{aligned} &\Psi_e=0 \ \text{при} \ u_1=u_{11},\ u_{12} \ \text{и} \ u_2=\pm\frac{b}{2}, \\ &\frac{\partial\Psi_h}{\partial u_1}=0 \ \text{при} \ u_1=u_{11},\ u_{12} \ \text{и} \ u_2=\pm\frac{b}{2}, \end{aligned} \tag{1}$$

можно определить полную систему скалярных функций Ψ_e и Ψ_h самосопряженных операторов $L(\Psi_e)$ и $L(\Psi_h)$ в поперечном сечении S (рис. 1). Эти функции могут быть найдены из уравнения

$$\frac{1}{u_3}\frac{\partial^2\Psi_{e,h}}{\partial u_1^2}+\frac{\partial^2\Psi_{e,h}}{\partial u_2^2}+\varkappa_{e,h}^2\Psi_{e,h}=0, \tag{2}$$

где $\Psi_{e,h}$ и $\varkappa_{e,h}$ — собственные функции и собственные значения для колебаний в рассматриваемом резонаторе.

TM-колебания

$$\Psi_e=A_e f_e \sin p\left(u_2+\frac{b}{2}\right)\sin\nu(u_1-u_{11}), \tag{3}$$

где

$$A_e=\frac{2}{\sqrt{2u_{12}b}},\ f_e=\sqrt{\frac{1}{u_3}},\ p=\frac{n\pi}{b},$$

$$\nu=\frac{m\pi}{2u_{12}},\quad 2u_{12}=u_{12}-u_{11},\quad u_{12}=\operatorname{tg}\varphi.$$

TE-колебания

$$\Psi_h=A_h f_h \cos p\left(u_2+\frac{b}{2}\right)\cos\nu(u_1-u_{11}), \tag{4}$$

где

$$A_h=\sqrt{\frac{(2-\delta_{0n})(2-\delta_{0m})}{2bu_{12}}},\ f_h=f_e.$$

Поля в трапецеидальном резонаторе могут быть представлены в виде рядов по собственным векторным функциям $\vec{E}_a$ и $\vec{H}_b$:

$$\vec{E}=\sum_{(a)}U_a\vec{E}_a,\quad \vec{H}=\sum_{(b)}I_b\vec{H}_b, \tag{5}$$

где U_a и I_b — амплитудные коэффициенты, которые могут быть определены из системы волноводных уравнений. Решая эту систему аналогично тому, как это сделано в работе [1], получим дифференциальные уравнения

$$I''_{qe}+\left[\frac{\gamma^2}{V_h^2}-\frac{\nu^2}{u_3^2}\left(\frac{\eta}{V_h}\right)^2-\left(F_e^2+F'_e\right)\right]I_{qe}=-i\omega\varepsilon F_{e,\,h}U_{qh}; \qquad (6)$$

$$U''_{qh}+\left[\frac{\gamma^2}{V_h^2}-\frac{\nu^2}{u_3^2}\left(\frac{\eta}{V_h}\right)^2-\left(F_h^2+F'_e\right)\right]U_{qh}=i\omega\mu F_{eh}I_{qe},$$

где

$$F_e=F_h=\frac{1}{2u_3}\frac{\nu^2/u_3^2-p^2}{\nu^2/u_3^2+p^2};$$

$$F'_e=F'_h=\frac{1}{2u_3}\frac{\left(\nu^2/u_3^2-p^2\right)-2\nu^4/u_3^4)}{\left(\nu^2/u_3^2+p^2\right)^2};$$

$$\gamma=\sqrt{k^2-p^2},\ k=\omega\sqrt{\varepsilon,\ \mu};$$

$$F_{e,\,h}=\frac{2\nu p}{\left(\nu^2/u_3^2+p^2\right)u_3^2}.$$

В общем случае, когда $\nu \neq 0$, $p \neq 0$, система полностью не разделяется: между TE- и TM-колебаниями существует связь.

При $\nu=0$ или $p=0$ система уравнений (6) разделяется полностью, и мы получаем уравнения для основных видов колебаний в рассматриваемом резонаторе.

В случае колебаний H_{0nl} ($\nu=0$) одно из уравнений (6) преобразуется к виду

$$U''_{qh}+\left(\Gamma-\frac{1-{}^1/_4}{u_3^2}\right)U_{qh}=0, \qquad (7)$$

где

$$\Gamma=\gamma\frac{u_{12}}{\operatorname{Arsh} u_{12}}.$$

Решая (7), получаем амплитудные коэффициенты U_{qh} и с учетом граничных условий $U_{qh}=0$ при $u_3=X_1$ и $u_3=X_2$ трансцендентное уравнение для нахождения резонансных частот H_{0nl}-колебаний:

$$\frac{I_1(\Gamma X_1)}{N_1(\Gamma X_1)}=\frac{I_1(\Gamma X_2)}{N_1(\Gamma X_2)}. \qquad (8)$$

Введя безразмерный параметр β_{h0nl} [2], получим из (8) уравнение

$$\frac{I_1\left(\dfrac{\beta_{h0nl}}{X_2/X_1-1}\right)}{N_1\left(\dfrac{\beta_{h0nl}}{X_2/X_1-1}\right)}=\frac{I_1\left(\dfrac{X_2}{X_1}\dfrac{\beta_{h0nl}}{X_2/X_1-1}\right)}{N_1\left(\dfrac{X_2}{X_1}\dfrac{\beta_{h0nl}}{X_2/X_1-1}\right)}, \qquad (9)$$

откуда

$$\Gamma = \frac{\beta_{h0nl}}{X_2 - X_1}$$

или

$$k = \sqrt{\left(\frac{\beta_{h0nl}}{X_2 - X_1}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{Ar\,sh}\, u_{12}}{u_{12}}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

Резонансная длина волны H_{0nl}-колебаний в трапецеидальном резонаторе

$$\lambda_{H_{0nl}} = \frac{2}{\sqrt{\left[\frac{\beta_{h0nl}}{\pi (X_2 - X_1)} \frac{\mathrm{Arsh}\, u_{12}}{u_{12}}\right]^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}. \tag{10}$$

Для H_{011}-колебаний

$$\lambda_{H_{011}} = \frac{2}{\sqrt{\left[\frac{\beta_{h011}}{\pi (X_2 - X_1)} \frac{\mathrm{Arsh}\, u_{12}}{u_{12}}\right]^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2}}. \tag{11}$$

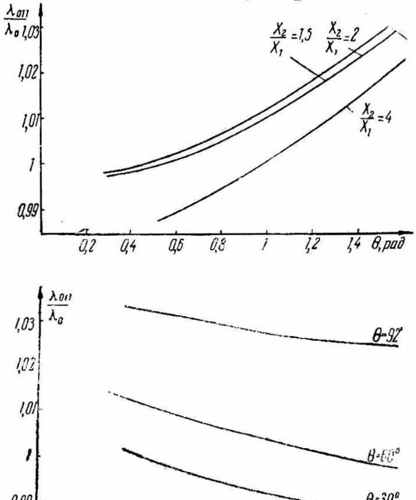


Рис. 2.

Зависимость длины волны колебаний H_{011} от геометрических размеров трапецеидального резонатора показана на рис. 2, *а*, *б*.

Здесь λ_{011} — резонансная длина волны H_{011}-колебаний трапецеидального резонатора; λ_0 — резонансная длина волны H_{011}-колебаний в прямоугольном резонаторе, у которого длина L и размер по оси y совпадают с соответствующими размерами трапецеидального резонатора. Как видно из графиков, резонансная длина волн H_{011}-колебаний в трапецеидальном резонаторе мало изменяется с изменением угла раствора 2θ и с изменением положения резонатора относительно вершины угла, т. е. величины $\frac{X_2}{X_1}$ по сравнению с прямоугольным резонатором, который работает на том же типе колебаний и на той же длине волны.

В случае колебаний H_{m0l} ($p = 0$) из (6) получим

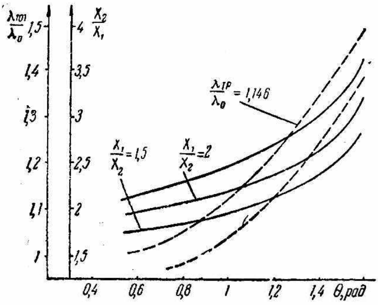
$$U''_{qh} + \left[K^2 - \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{u_3^2}\right] U_{qh} = 0, \tag{12}$$

где

$$K^2 = \frac{k^2}{V_h^2}, \quad \alpha = \frac{m\pi \left(u_{12}\sqrt{1+u_{12}^2} + \operatorname{Arsh} u_{12}\right)}{4u_{12} \operatorname{Arsh} u_{12}}.$$

Решение уравнения (12) имеет вид

$$U_{qh} = C\sqrt{Ku_3} I_\alpha (Ku_3) + D\sqrt{Ku_3} N_\alpha (Ku_3).$$



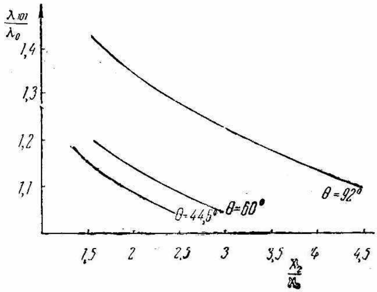


Рис. 3.

Учитывая граничные условия (1), получим трансцендентное уравнение для определения волнового числа k H_{m0l}-колебаний в трапецеидальном резонаторе

$$\frac{I_\alpha (KX_1)}{N_\alpha (KX_1)} = \frac{I_\alpha (KX_2)}{N_\alpha (KX_2)}. \tag{13}$$

Вводя новую неизвестную β_{hm0l}, как это было сделано для H_{0nl}-колебаний, и решая уравнение (13), получим следующее выражение для k_{hm0l}:

$$k_{hm0l} = \frac{\beta_{hm0l} \operatorname{Arsh} u_{12}}{(X_2 - X_1)\, u_{12}}.$$

Резонансная длина волны H_{m0l}-колебаний в трапецеидальном резонаторе равна

$$\lambda_{H_{m0l}} = \frac{2\pi (X_2 - X_1)\, u_{12}}{\beta_{hm0l} \operatorname{Arsh} u_{12}}. \tag{14}$$

Для колебаний H_{101}

$$\lambda_{H_{101}} = \frac{2\pi (X_2 - X_1)\, u_{12}}{\beta_{h101} \operatorname{Arsh} u_{12}}, \tag{15}$$

где β_{h101} — корни трансцендентного уравнения (13); они могут быть определены для различных значений $\frac{X_2}{X_1}$.

Зависимость $\lambda_{H_{m0l}}$ от геометрии резонатора приведена на рис. 3, *а*, *б*. В данном случае, как видно из графиков, изменение геометрии резонатора существенно влияет на резонансную длину волны.

Можно построить трапецеидальные резонаторы, которые имеют существенно различные размеры $\left(\text{угол } \theta, \text{ отношение } \frac{X_2}{X_1}\right)$, определяющие положение резонатора относительно вершины угла, длину резонатора $L = X_2 - X_1$, но все они будут работать на одном и том же типе колебаний H_{m0l} с одной и той же длиной волны. Это одна из интересных особенностей трапецеидального резонатора.

α	$\theta°$	S_1, *мм*^{2}	S_3, *мм*^{2}	L, *мм*
4	22,3	56,2×24	87,9×24	38,4
3	20	48×24	92,4×24	38,4
2	46	25,2×24	104,8×24	38,4

Для проверки проведенных расчетов были изготовлены три резонатора с размерами, указанными в таблице.

Найденная по формуле (15) резонансная длина волны для H_{101}-колебаний в этих резонаторах равна 6,88 *см*. Резонаторы изготовлялись из латуни; внутренняя поверхность их хорошо отполирована.

Эксперимент показал, что резонансная длина волны первого резонатора — 6,83 *см*, второго и третьего — 6,82 *см*. Соответствующие точки нанесены на график рис. 3, *б*. Отклонение полученных экспериментальных данных от теоретических не превосходит 1%.

Составляющие полей в трапецеидальном резонаторе в декартовой системе координат получены при решении волноводных уравнений (5) с учетом граничных условий (1):

для H_{0nl}-колебаний

$$
\begin{aligned}
H_x &= -\frac{p\sqrt{\Gamma}A_h Z_{0nl}}{i\omega\mu}\cos p\left(y+\frac{b}{2}\right)\cos\varphi;\\
H_y &= -\frac{p\sqrt{\Gamma}A_h Z_{0nl}}{i\omega\mu}\cos p\left(y+\frac{b}{2}\right)\sin\varphi;\\
H_z &= \frac{\Gamma\sqrt{\Gamma}V_h A_h R_{0nl}}{i\omega\mu}\sin p\left(y+\frac{b}{2}\right);\\
E_x &= -\sqrt{\Gamma}A_h Z_{0nl}\sin p\left(y+\frac{b}{2}\right)\sin\varphi;\\
E_z &= \sqrt{\Gamma}A_h Z_{0nl}\sin p\left(y+\frac{b}{2}\right)\cos\varphi,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где

$$Z_{0nl} = M_h\left[\frac{I_1(\Gamma u_3)}{I_1(\Gamma X_1)} - \frac{N_1(\Gamma u_3)}{N_1(\Gamma X_1)}\right];$$

$$R_{0nl} = M_h \left[\frac{I_0(\Gamma u_3)}{I_1(\Gamma X_1)} - \frac{N_0(\Gamma u_3)}{N_1(\Gamma X_1)}\right];$$

для H_{m0l}-колебаний

$$H_x = -\frac{\sqrt{K}}{i\omega\mu} A_h \left[\varkappa_h \eta Z_{m0l} \cos\nu(u_1 - u_{11}) \cos\varphi + \right.$$
$$\left. + V_h Z'_{m0l} \sin\nu(u_1 - u_{11}) \sin\varphi\right]; \qquad (17)$$
$$H_z = \frac{\sqrt{K}}{i\omega\mu} A_h \left[V_h Z'_{m0l} \sin\nu(u_1 - u_{11}) \cos\varphi - \right.$$
$$\left. - \varkappa_h \eta Z_{m0l} \cos\nu(u_1 - u_{11}) \sin\varphi\right];$$
$$E_y = -\sqrt{K} Z_{m0l} A_h \sin\nu(u_1 - u_{11}),$$

где

$$Z_{m0l} = P_h \left[\frac{I_\alpha(K u_3)}{I_\alpha(K X_1)} - \frac{N_\alpha(K u_3)}{N_\alpha(K X_1)}\right];$$
$$Z'_{m0l} = P_h \left[\frac{I'_\alpha(K u_3)}{I_\alpha(K X_1)} - \frac{N'_\alpha(K u_3)}{N_\alpha(K X_1)}\right] K;$$
$$\varkappa_h = \frac{\nu}{u_3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Машковцев, К. Н. Цибизов, Б. Ф. Емелин. Теория волноводов. Изд-во «Наука», М.—Л., 1966.

2. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции (формулы, графики, таблицы). Изд-во «Наука». 1964.