

ТЕОРИЯ РЕЗОНАТОРОВ, НАГРУЖЕННЫХ РЕЗОНАНСНЫМИ ВОЗМУЩАЮЩИМИ ТЕЛАМИ

В. А. Попов, Н. А. Хижняк

Харьков

Резонаторы, нагруженные металлическими или диэлектрическими телами, находят широкое применение в радиофизике сверхвысоких частот, ускорительной технике и т. д. Строго обоснована лишь теория резонаторов правильной геометрии без возмущающих элементов. Приближенные методы теории возмущений распространены на случаи, когда резонаторы нагружены малыми возмущающими элементами. В последнее время, особенно в ускорительной технике, большое внимание уделяется резонаторам, нагруженным сильно возмущающими элементами. Теория таких резонаторов совершенно не разработана. В настоящей статье излагаются результаты исследования резонаторов, нагруженных резонансными возмущающими элементами, когда сдвиг частоты за счет внесения возмущения соизмерим с разностью частот между соседними модами колебаний.

Исходные уравнения

Исходными являются интегро-дифференциальные уравнения, полностью эквивалентные уравнениям Максвелла и граничным условиям на поверхности возмущающего тела:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) + \left(\text{grad div} - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{\Pi}^{\text{э}} - \frac{\mu_1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{\Pi}^{\text{м}}; \quad (1)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}, t) + \left(\text{grad div} - \frac{\varepsilon_1 \mu_1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{\Pi}^{\text{м}} + \frac{\varepsilon_1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{\Pi}^{\text{э}},$$

где

$$\vec{\Pi}^{\text{э}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} dt' \int_V \left(\frac{\hat{\varepsilon}}{\varepsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}', t') f(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t') d\vec{r}';$$

$$\vec{\Pi}^{\text{м}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} dt' \int_V \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{r}', t') f(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t') d\vec{r}'.$$

Физический смысл этих уравнений заключается в следующем. При $t < 0$ в рассматриваемой области пространства существовало электромагнитное поле с векторами $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$, $\vec{H}_0(\vec{r}, t)$. В момент времени $t = 0$ в это пространство внесено тело объемом V , характеризующееся тензорами диэлектрических ε_{ik} и магнитных μ_{ik} проницаемостей, сокращенно записанных как $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$. Естественно, что

ϵ_1 и μ_1 представляют собой проницаемости окружающего пространства. После внесения возмущения при $t > 0$ в рассматриваемой области устанавливается электромагнитное поле, характеризующееся векторами $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{H}(\vec{r}, t)$.

Функция Грина $f(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t')$ определяется уравнением

$$\Delta f(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t') - \frac{\epsilon_1 \mu_1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} f(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t') = -4\pi \delta(|\vec{r} - \vec{r}'|) \delta(t - t'). \quad (2)$$

В неограниченном пространстве f является скалярной функцией. В пространстве, ограниченном идеально-проводящими стенками, расположенными на конечном расстоянии от возмущающего тела, f является тензором второго ранга. Каждая из компонент этого тензора удовлетворяет уравнению (2) и отличается лишь характером граничных условий на стенках.

Общее решение исходных уравнений для резонатора произвольной геометрии

Для решения уравнений (1) необходимо построить функцию Грина этих уравнений в объеме резонатора Ω .

Каждая собственная функция объема Ω характеризуется набором трех индексов m, n и l , сокращенно обозначаемых через N .

Пусть $\chi_N(\vec{r})$ — собственные функции рассматриваемого резонатора, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta \chi_N(\vec{r}) + k_{0N}^2 \chi_N(\vec{r}) = 0 \quad (3)$$

и условию нормировки

$$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \chi_N^*(\vec{r}) \chi_{N'}(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_{NN'}, \quad (4)$$

где k_{0N} — собственное волновое число, соответствующее волновой функции χ_N . Ищем функцию Грина в виде

$$f(|\vec{r} - \vec{r}'|, t - t') = \sum_N a_N(t - t') \chi_N(\vec{r}) \chi_N^*(\vec{r}'). \quad (5)$$

Тогда из (2) с учетом (3) и (4) находим уравнение для определения амплитуд a_N :

$$\ddot{a}_N + \omega_{0N}^2 a_N = -\frac{4\pi c^2}{\epsilon_1 \mu_1 \Omega} \delta(t - t'), \quad (6)$$

где $\omega_{0N}^2 = k_{0N}^2 c^2 / \epsilon_1 \mu_1$ — собственные частоты невозмущенного резонатора. Решение уравнения (6), удовлетворяющее начальным условиям $a_N = 0$ при $t \leq 0$, $\dot{a}_N = 0$, имеет вид разрывной функ-

ции параметра t . Подставляя его в (5), получим для функции Грина следующее выражение:

$$f(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \begin{cases} \frac{4\pi c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \sum_N \frac{\hat{\chi}_N(\vec{r}) \hat{\chi}_N^*(\vec{r}')}{\omega_{0N}} \sin \omega_{0N}(t - t') & \text{при } t > t' \\ 0 & \text{при } t < t'. \end{cases} \quad (7)$$

Пусть при $t > 0$ как внутри возмущающего тела, так и во всем объеме резонатора установились гармонические колебания частоты ω . Не нарушая общности, можно положить, что

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \cos \omega t; \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r}) \sin \omega t. \quad (8)$$

Тогда потенциалы Герца принимают вид

$$\vec{\Pi}^{\text{э}}(\vec{r}, t) = \frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \sum_N \frac{1}{\omega^2 - \omega_{0N}^2} (\cos \omega_{0N} t - \cos \omega t) \hat{\chi}_N(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \times \\ \times \vec{E}(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}'; \quad (9)$$

$$\vec{\Pi}^{\text{м}}(\vec{r}, t) = \frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \sum_N \frac{1}{\omega^2 - \omega_{0N}^2} \left(\frac{\omega}{\omega_{0N}} \sin \omega_{0N} t - \sin \omega t \right) \hat{\chi}_N(\vec{r}) \times \\ \times \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}'.$$

До внесения возмущений в полости существовали электромагнитные колебания, характеризуемые одной из резонансных частот, например, ω_{0M} . Не нарушая общности можно считать, что

$$\vec{E}_0(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos \omega_{0M} t; \quad \vec{H}_0(\vec{r}, t) = \vec{H}_0(\vec{r}) \sin \omega_{0M} t. \quad (10)$$

Соотношения (8)–(10) позволяют представить интегральные уравнения (1) для внешних точек $\vec{r} \in V$ в следующем виде:

$$\vec{E}(\vec{r}) \cos \omega t = \vec{E}_0(\vec{r}) \cos \omega_{0M} t + \frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \sum_N \frac{\cos \omega_{0N} t}{\omega^2 - \omega_{0N}^2} \left[(\text{grad div} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_1 \mu_1 \omega_{0N}^2}{c^2}) \hat{\chi}_N(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}' - \right. \\ \left. - \frac{\mu_1 \omega}{c} \text{rot} \hat{\chi}_N(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}' \right] - \\ - \frac{c_2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \sum_N \frac{\cos \omega t}{\omega^2 - \omega_{0N}^2} \left[(\text{grad div} + \frac{\varepsilon_1 \mu_1 \omega_{0N}^2}{c^2}) \hat{\chi}_N(\vec{r}) \times \right.$$

$$\times \int_V \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}' - \frac{\mu_1 \omega}{c} \text{rot} \hat{\chi}_N(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \times \\ \times \vec{H}(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}'];$$

$$\vec{H}(\vec{r}) \sin \omega t = \vec{H}_0(\vec{r}) \sin \omega_{0N} t + \frac{c^2}{\epsilon_1 \mu_1 \Omega} \sum_N \frac{\sin \omega_{0N} t}{\omega^2 - \omega_{0N}^2} \left[\frac{\omega}{\omega_{0N}} \left(\text{grad div} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\epsilon_1 \mu_1 \omega_{0N}^2}{c^2} \right) \hat{\chi}_N(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}^2(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}' - \right. \\ \left. - \frac{\epsilon_1 \omega_{0N}}{c} \text{rot} \hat{\chi}_N(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}' \right] - \\ - \frac{c^2}{\epsilon_1 \mu_1 \Omega} \sum_N \frac{\sin \omega t}{\omega^2 - \omega_{0N}^2} \left[\left(\text{grad div} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\epsilon_1 \mu_1 \omega^2}{c^2} \right) \hat{\chi}_N(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}' - \right. \\ \left. - \frac{\epsilon_1 \omega}{c} \text{rot} \hat{\chi}_N(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}' \right]. \quad (11)$$

Представляя поле в резонаторе с нагрузкой в виде (8), мы пренебрегаем переходными процессами, возникающими при внесении возмущения. Поэтому в уравнениях (11) не содержатся слагаемые, описывающие эти переходные процессы, что, впрочем, несущественно, если понимать амплитуды полей как средние во времени вида

$$\vec{E}_{0N} = 2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \vec{E}_{0N}(\vec{r}, t) \cos \omega_{0N} t dt. \quad (12)$$

Пользуясь формулой усреднения (12), из (11) находим следующие уравнения для электрического и магнитного вектора:

$$\vec{E}(\vec{r}) = - \frac{c^2}{\epsilon_1 \mu_1 \Omega} \sum_N \frac{1}{\omega^2 - \omega_{0N}^2} \left(\text{grad div} + k^2 \right) \hat{\chi}_N(\vec{r}) \times \\ \times \int_V \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}' + \\ + \frac{c^2}{\epsilon_1 \mu_1 \Omega} \sum_N \frac{\mu_1 \omega / c}{\omega^2 - \omega_{0N}^2} \text{rot} \hat{\chi}_N(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}'; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_0(\vec{r}) = & -\frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \frac{1}{\omega^2 - \omega_{0M}^2} (\text{grad div} + \\ & + k_{0M}^2) \hat{\chi}_M(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') \hat{\chi}_M^*(\vec{r}') d\vec{r}' + \\ & + \frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \frac{\mu_1 \omega / c}{\omega^2 - \omega_{0M}^2} \text{rot} \hat{\chi}_M(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{r}') \hat{\chi}_M^*(\vec{r}') d\vec{r}'; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) = & -\frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \sum_N \frac{1}{\omega^2 - \omega_{0N}^2} (\text{grad div} + \\ & + k^2) \hat{\chi}_N(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}' + \\ & + \frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \sum_N \frac{\varepsilon_1 \omega / c}{\omega^2 - \omega_{0N}^2} \text{rot} \hat{\chi}_N(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') \hat{\chi}_N^*(\vec{r}') d\vec{r}'; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_0(\vec{r}) = & -\frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \frac{\omega / \omega_{0M}}{\omega^2 - \omega_{0M}^2} (\text{grad div} + \\ & + k_{0M}^2) \hat{\chi}_M(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{r}') \hat{\chi}_M^*(\vec{r}') d\vec{r}' + \\ & + \frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \frac{\varepsilon_1 \omega_{0M} / c}{\omega^2 - \omega_{0M}^2} \text{rot} \hat{\chi}_M(\vec{r}) \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') \hat{\chi}_M^*(\vec{r}') d\vec{r}'. \end{aligned} \quad (16)$$

Соотношения (13)—(16) в наиболее общем виде решают задачу о возмущении резонаторов телами произвольной формы и с произвольными значениями проницаемостей.

При этом соотношения (13) и (15) определяют возмущенные поля через внутреннее поле в возмущающем теле и сдвиг частоты. Соотношения (14) и (16) приводят к дисперсионному уравнению нагруженного резонатора, т. е. определяют сдвиг частоты через параметры самого резонатора и возмущающего тела.

При $\vec{r} \in V$ интегральные уравнения (1) определяют внутреннее поле через невозмущенное поле, существовавшее в резонаторе до момента внесения возмущения.

Случай малых возмущений

Применим общие уравнения (1) для описания малых возмущений в резонаторе. Считаем $\frac{a}{\lambda} \ll 1$, где a — линейные размеры возмущающего тела. Внутренние поля в возмущающем теле

могут быть найдены в квазистатистическом приближении, которое следует из (1) в результате предельного перехода $c \rightarrow \infty$. Уравнения (1) принимают вид

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \text{grad div} \int_V \left(\frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_1} - 1 \right) \vec{E}(\vec{r}') f(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}';$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \text{grad div} \int_V \left(\frac{\hat{\mu}}{\mu_1} - 1 \right) \vec{H}(\vec{r}') f(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}', \quad (17)$$

где функция Грина $f(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ определяется уравнением

$$\Delta f(|\vec{r} - \vec{r}'|) = -4\pi\delta(|\vec{r} - \vec{r}'|)$$

и для неограниченного пространства равна

$$f(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Уравнения (17) уже исследовались ранее [1].

Если предположить, что $\vec{E}_0(\vec{r})$ и $\vec{H}_0(\vec{r})$ изменяются мало на расстояниях порядка размеров возмущающего тела, т. е. $\vec{E}_0(\vec{r}) = \text{const}$ и $\vec{H}_0(\vec{r}) = \text{const}$ при $\vec{r} \in V$, то тогда для тела эллипсоидальной геометрии внутренние поля будут постоянными [2]. Действительно, ньютоновский потенциал для внутренних точек однородного эллипсоида является квадратичной функцией декартовых координат

$$\int_V \frac{d\vec{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = C - \pi abc (I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2), \quad (18)$$

где a, b, c — полуоси эллипсоида; I_1, I_2, I_3 — постоянные, выражающиеся через величины a, b, c . Тогда интеграл в (17) справа повышает степень переменных на две единицы, а дифференциальный оператор второго порядка перед интегралом понижает эту степень на две единицы. В конечном итоге находим систему линейных алгебраических уравнений, из которой следует

$$\vec{E} = \hat{A} \vec{E}_0(\vec{r}_0); \quad \vec{H} = \hat{B} \vec{H}_0(\vec{r}_0), \quad (19)$$

где \hat{A} и \hat{B} — числовые матрицы, определенные в [1]; \vec{r}_0 — радиус-вектор центра эллипсоида; $\vec{E}_0(\vec{r}_0)$ и $\vec{H}_0(\vec{r}_0)$ — поля, которые были бы в точке \vec{r}_0 при отсутствии возмущения,

Для изотропного эллипсоида эти матрицы приводятся к диагональным матрицам, элементы которых приведены в работе [1].

В случае сферы матрицы \hat{A} и \hat{B} приводятся к единичной, умноженной на постоянное число:

$$\hat{A} = \hat{I} \frac{1}{4\pi} \frac{3\mu_1}{\mu + 2\mu_1}; \quad \hat{B} = \hat{I} \frac{1}{4\pi} \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1}. \quad (20)$$

Соотношения (20) будем использовать и при рассмотрении возмущений в резонаторе. Заметим, что учет в выражении для функции Грина при $\vec{r} \in V$ граничных эффектов на стенках резонатора несущественен для нерезонансных возмущающих тел и приводит к тонкой структуре резонанса в случае резонансных возмущающих тел, которые в настоящем разделе не рассматриваются.

Применим теперь общие соотношения (13)—(16) к описанию дисперсионных свойств и структуры полей в цилиндрическом резонаторе, нагруженном малым диэлектрическим телом. Пусть координаты центра тела есть $(0, 0, z_0)$. Возмущающее тело предполагается изотропным, а его магнитная проницаемость равна проницаемости окружающей среды ($\mu = \mu_1$). Тогда магнитный вектор Герца равен нулю (заметим, что невозмущенное магнитное поле всегда равно нулю на оси цилиндрического резонатора, поэтому магнитный момент этого тела равен нулю даже при $\mu \neq \mu_1$). Собственные функции резонатора $\chi_{0nl}(r, z)$, нормированные согласно (4), имеют вид

$$\chi_{0nl}(r, z) = \frac{\sqrt{2}}{J_1(\alpha_0^n)} \cdot J_0\left(\alpha_0^n \frac{r}{R}\right) \cos k_{3l}z, \quad (21)$$

где α_0^n — n -й корень функции Бесселя нулевого порядка; R — радиус резонатора; $k_{3l} = l\pi/L$ — продольное волновое число невозмущенного резонатора; L — его длина. Продольная часть функции Грина (7) для электрического вектора может быть записана в виде

$$f_{12}(\|\vec{r} - \vec{r}'\|, t - t') = \begin{cases} \frac{4\pi c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \cdot \sum_{n, l} \frac{2}{J_1^2(\alpha_0^n)} \cdot J_0\left(\alpha_0^n \frac{r}{R}\right) \cos k_{3l}z \times \\ \times \cos k_{3l}z' \sin \omega_{0N}(t - t') \\ \text{при } t > t', \text{ и } 0 \text{ при } t < t' \end{cases} \quad (22)$$

Суммирование по n и l ведется по всем целочисленным значениям $n = 1, 2, \dots, l = 0, 1, 2, \dots$

При осевом расположении возмущающего тела возможны поля с отдельно взятыми индексами по n . Для упрощения последующих вычислений будем предполагать, что индекс n имеет

определенное значение. Тогда из (13), (15) и (22) находим следующие выражения для возмущенных полей E_{0nl} — мод колебаний:

$$\begin{aligned}
 E_z &= -\frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k^2 - k_{3l}^2}{\omega^2 - \omega_{0nl}^2} \cdot \frac{2}{J_1^2(\alpha_0^n)} \cdot J_0\left(\alpha_0^n \frac{r}{R}\right) \times \\
 &\quad \times \cos k_{3l} z \cos k_{3l} z_0 \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) E_z^{(0)}(\vec{r}') d\vec{r}'; \\
 E_r &= -\frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{k_{3l} \left(\frac{\alpha_0^n}{R}\right)}{\omega^2 - \omega_{0nl}^2} \cdot \frac{2}{J_1^2(\alpha_0^n)} \cdot J_1\left(\alpha_0^n \frac{r}{R}\right); \\
 &\quad \sin k_{3l} z \cos k_{3l} z_0 \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) E_z^{(0)}(\vec{r}') d\vec{r}'; \\
 H_\varphi &= \frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\frac{\varepsilon_1 \omega}{c} \left(\frac{\alpha_0^n}{R}\right)}{\omega^2 - \omega_{0nl}^2} \cdot \frac{2}{J_1^2(\alpha_0^n)} \cdot J_1\left(\alpha_0^n \frac{r}{R}\right) \times \\
 &\quad \times \cos k_{3l} z \cos k_{3l} z_0 \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) E_z^{(0)}(\vec{r}') d\vec{r}'. \quad (23)
 \end{aligned}$$

Здесь уже принято во внимание, что линейные размеры тела малы по сравнению с длиной волны и $\cos k_{3l} z'$ заменен на $\cos k_{3l} z_0$.

Соотношения (14) и (16) приводятся к виду

$$\begin{aligned}
 E_{0Nz} &= -A_0 (k_{0N}^2 - k_{3l}^2) J_0\left(\alpha_0^n \frac{r}{R}\right) \cos k_{3l} z; \\
 E_{0Nr} &= -A_0 k_{3l} \cdot \left(\frac{\alpha_0^n}{R}\right) J_1\left(\alpha_0^n \frac{r}{R}\right) \sin k_{3l} z; \\
 H_{0N\varphi} &= A_0 \cdot \frac{\varepsilon_1 \omega_{0N}}{c} \cdot \left(\frac{\alpha_0^n}{R}\right) J_1\left(\alpha_0^n \frac{r}{R}\right) \cos k_{3l} z, \quad (24)
 \end{aligned}$$

где

$$A_0 = \frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega_{0N}^2} \cdot \frac{2}{J_1^2(\alpha_0^n)} \cdot \cos k_{3l} z_0 \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right) E_z^{(0)}(\vec{r}') d\vec{r}';$$

N — набор индексов, характеризующих невозмущенную волну (т. е. $0, n, l$).

Соотношения (23)—(24) решают поставленную задачу. Прежде чем переходить к анализу конкретных случаев, сделаем ряд

общих замечаний. Соотношения (24) удовлетворяют уравнениям Максвелла для невозмущенного резонатора

$$\operatorname{rot} \vec{E}_{0N} = -\frac{\omega_{0N}}{c} \cdot \vec{H}_{0N}; \operatorname{rot} \vec{H}_{0N} = -\frac{\omega_{0N}}{c} \vec{E}_{0N},$$

поэтому два последних соотношения следуют из первого. Если запишем E_{0Nz} -компоненту невозмущенного поля в виде

$$E_{0Nz} = E_0 J_0 \left(\alpha_0^n \frac{r}{R} \right) \cos k_{3l} z, \quad (25)$$

внутреннее поле $E_2^{(0)}$ выразится через это поле соотношением

$$E_2^{(0)} = B E_{0Nz}(0, z_0), \quad (26)$$

где B — коэффициент, зависящий от геометрии возмущения. В случае сферического возмущения, согласно (20),

$$B = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1}. \quad (27)$$

Подставляя в первое из соотношений (24) поле E_{0Nz} в виде (25) и выражая внутреннее поле согласно (26), получаем дисперсионное уравнение резонатора, нагруженного малой диэлектрической неоднородностью на оси

$$\omega^2 - \omega_{0N}^2 = -\frac{V}{\Omega} \cdot \frac{2c^2}{\varepsilon_1 \mu_1} \cdot \frac{\cos^2 k_{3l} z_0}{J_1^2(\alpha_0^n)} \cdot \left(\frac{\alpha_0^n}{R} \right)^2 B \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right). \quad (28)$$

В частности, если неоднородность имеет сферическую форму, то, согласно (27), дисперсионное уравнение принимает вид

$$\omega^2 - \omega_{0N}^2 = -\frac{V}{\Omega} \cdot \frac{6c^2}{\varepsilon_1 \mu_1} \cdot \frac{\cos^2 k_{3l} z_0}{J_1^2(\alpha_0^n)} \cdot \left(\frac{\alpha_0^n}{R} \right) \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1}. \quad (29)$$

При малых возмущениях эта формула может быть записана в таком виде:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{c^2}{\omega_{0N}^2} \left(\frac{\alpha_0^n}{R} \right)^2 \frac{\cos^2 k_{3l} z_0}{J_1^2(\alpha_0^n)} \frac{V}{\pi R^2 L} \frac{3(\varepsilon - \varepsilon_1)}{\varepsilon + 2\varepsilon_1}.$$

Эту же формулу можно записать непосредственно из (14) и (16)

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{3}{2} \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1} \cdot \frac{V E_{0z}^2(z_0)}{\int_{\Omega} \vec{E}_0^2 d\vec{r}},$$

где $E_{0z}(z_0)$ — невозмущенное поле в месте нахождения шарика. Полученное соотношение впервые найдено Слэгером и Майером [3] и служит рабочей формулой для нахождения амплитуд полей по сдвигу частоты в резонаторе.

Дисперсионные уравнения (28) и (29) показывают, что если резонатор был возбужден на моде E_{0nl} ($0, n, l = N$), то в результате возмущения его частота уменьшается ($\omega < \omega_{0N}$), если $\varepsilon > \varepsilon_1$.

Однако смещение частоты пропорционально отношению V/Ω объема тела к объему резонатора и для нерезонансных возмущений мало.

Структура поля в нагруженном резонаторе

Соотношения (23) определяют установившееся поле в нагруженном резонаторе. Эти поля должны удовлетворять уравнениям Максвелла с измененной рабочей частотой

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\omega}{c} \vec{H}; \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\omega}{c} \vec{E}. \quad (30)$$

Путем непосредственных вычислений легко убедиться, что каждая гармоника полей в рядах (23) этим уравнениям не удовлетворяет. Чтобы показать, что суммарное поле удовлетворяет этим уравнениям, произведем суммирование по l .

Сделаем эти вычисления для поля H_φ

$$H_\varphi = \frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1 \Omega} \cdot \frac{\varepsilon_1 \omega}{c} \left(\frac{\alpha_0^n}{R} \right) \cdot \frac{2}{J_1^2(\alpha_0^n)} \cdot J_1 \left(\alpha_0^n \frac{r}{R} \right) \times \\ \times \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) E_z^{(0)}(\vec{r}') d\vec{r}' \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\cos k_{3l} z \cos k_{3l} z_0}{\omega^2 - \omega_{0nl}^2}.$$

Легко заметить, что приведенная сумма представляет собой Фурье — преобразование следующей функции:

$$W(z, z_0) = \frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\cos k_{3l} z \cos k_{3l} z_0}{\omega^2 - \omega_{0nl}^2} = \\ = \begin{cases} \frac{L}{2} \cdot \frac{\cos k_3 z \cos k_3 (L - z_0)}{k_3 \sin k_3 L}, & z < z_0 \\ \frac{L}{2} \cdot \frac{\cos k_3 z_0 \cos k_3 (L - z)}{k_3 \sin k_3 L}, & z > z_0, \end{cases} \quad (31)$$

где

$$k_3^2 = k^2 - \left(\frac{\alpha_0^n}{R} \right)^2. \quad (32)$$

Функция W удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + k_3^2 W = -\frac{L}{2} \delta(z - z_0). \quad (33)$$

С помощью функции W поля (23) могут быть представлены в следующем окончательном виде:

$$\begin{aligned} E_z &= -A J_0 \left(\alpha_0^n \frac{r}{R} \right) \left(\frac{d^2 W}{dz^2} + k^2 W \right); \\ E_r &= A \left(\frac{\alpha_0^n}{R} \right) J_1 \left(\alpha_0^n \frac{r}{R} \right) \cdot \frac{dW}{dz}; \\ H_\varphi &= A \cdot \frac{\varepsilon_1 \omega}{c} \left(\frac{\alpha_0^n}{R} \right) J_1 \left(\alpha_0^n \frac{r}{R} \right) W, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$A = \frac{2}{\Omega J_1^2(\alpha_0^n)} \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1 \right) E_z^{(0)}(\vec{r}') d\vec{r}'. \quad (35)$$

Нетрудно убедиться, что поля (34) удовлетворяют уравнениям (30) и справедливы при произвольных возмущениях частоты.

Управление структурой поля резонатора с помощью резонансного возмущения

Малые нерезонансные возмущения приводят к малому сдвигу частоты и к малому изменению структуры поля. Однако малые резонансные возмущения приводят к значительным сдвигам по частоте и поэтому могут быть использованы для управления структурой поля в резонаторе.

Рассмотрим управление структурой поля в цилиндрическом резонаторе с помощью сферического резонансного тела, расположенного на оси резонатора — точка $(0, 0, z_0)$.

Сферическое резонансное тело представляет собой диэлектрическую сферу из диэлектрика с большим значением диэлектрической проницаемости. Тогда при условии, что $a/\lambda \ll 1$, величина $\sqrt{\varepsilon} \frac{a}{\lambda}$ может быть как меньше единицы, так и приближенно равняться ей. В этом случае коэффициент B (27) и дисперсионное уравнение (29) формально сохраняют тот же вид, что и для шарика с малым ε , однако значение диэлектрической проницаемости в формулах заменяется на эффективное значение, равное [4]

$$\varepsilon_{\text{эфф}} = \varepsilon F(ka\sqrt{\varepsilon}), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda};$$

a — радиус шарика. Функция $F(x)$ имеет вид [5]

$$F(x) = \frac{2(\sin x - x \cos x)}{(x^2 - 1) \sin x + x \cos x}. \quad (36)$$

График этой функции представлен на рис. 1. Из вида функции следует, что при $ka\sqrt{\varepsilon} \sim 1$ $F(x) \sim 1$ и лишь при $ka\sqrt{\varepsilon} \sim 3,1$

функция $F(x)$ неограниченно возрастает и меняет знак на противоположный. При отрицательном $F(x)$ возможна ситуация, когда

$$\varepsilon F(ka\sqrt{\varepsilon}) + 2\varepsilon_1 = 0. \quad (37)$$

Уравнение (37) определяет условия резонансного возбуждения сферы.

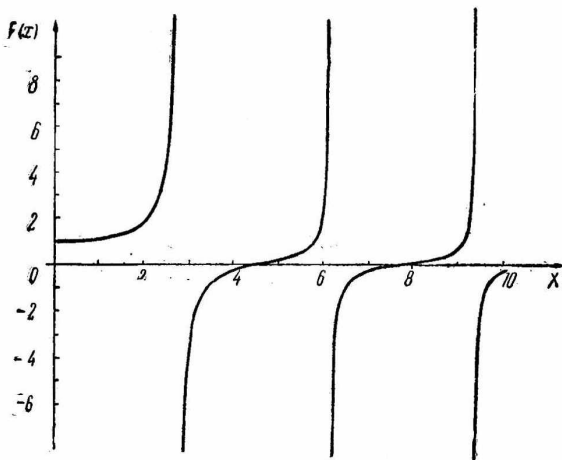


Рис. 1.

При резонансном возбуждении сферы разность $\omega^2 - \omega_{0N}^2$ может стать большой, несмотря на малость отношения V/Ω , так как

$$\frac{V}{\Omega} \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon + 2\varepsilon_1} \gtrsim 1.$$

В выражении для полей (23) разность $\omega^2 - \omega_{0N}^2$ стоит в знаменателе. Поэтому, если в резонаторе были колебания типа E_{0N} и в этот резонатор введено резонансное возмущающее тело, сдвиг частоты приводит к изменению структуры поля. При больших сдвигах ω^2 может стать равной $\omega_{0, N-1}^2$, что и приведет к непрерывной трансформации E_{0N} -моды колебаний в $E_{0, N-1}$ -моду. Исключение составляет наименьшая мода колебаний E_{010} , частота которой может убывать неограниченно, не возбуждая других мод колебаний.

Поля определяются соотношениями (34), которые справедливы при произвольных возмущениях, расположенных на оси резона-

тора. Сдвиг частоты от возмущенного значения определяется дисперсионным уравнением (29)

$$\omega^2 - \omega_{0N}^2 = -\frac{V}{\Omega} \cdot \frac{6c^2}{\epsilon_1 \mu_1} \cdot \frac{\cos^2 k_{z1} z_0}{J_1^2(a_0^2)} \cdot \left(\frac{a_0^2}{R}\right)^2 \cdot \frac{\epsilon F \left(\frac{\omega}{c} a \sqrt{\epsilon}\right) - \epsilon_1}{\epsilon F \left(\frac{\omega}{c} a \sqrt{\epsilon}\right) + 2\epsilon_1},$$

а продольное волновое число связано с частотой $\omega = kc\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$ соотношением (32). Таким образом, все параметры поля полностью определены.

В качестве примера рассмотрим случай, когда на оси цилиндрического резонатора расположена сфера, параметры которой (диэлектрическая проницаемость) могут изменяться непрерывно. На графике рис. 2 представлены изменения резонансных частот нагруженного резонатора от диэлектрической проницаемости сферы. Из графика следует, что с ростом ϵ собственные частоты

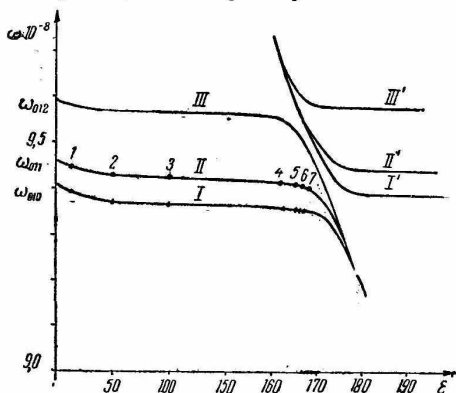


Рис. 2.

резонатора вначале изменяются мало, но в окрестности резонансных частот сферы ($\epsilon \sim 160-180$) происходит значительная перестройка колебаний резонатора. В идеальном случае диэлектрической сферы без потерь каждая из частот уменьшается почти до нуля, и наряду с этой ветвью колебаний возникает следующая, с высокой частотой, которая быстро уменьшается практически до невозмущенной частоты резонатора. В пределах действия сильного возмущения резонансная частота колебаний всецело определяется резонансными свойствами сферы и распределение поля нечувствительно к неточностям в изготовлении остальных элементов резонатора. В этом смысле можно говорить и о стабилизирующем действии резонансного возмущения.

Изменение резонансной частоты приводит к изменению продольного распределения поля на оси резонатора. На графике рис. 3 представлена зависимость $\left| \frac{E_{011}(z)}{E_{011}(0)} \right|$ при $z < z_0$ от изменения диэлектрической проницаемости сферы. Видно, что с уменьшением резонансной частоты происходит смещение минимума поля с последующей трансформацией E_{011} -моды колебаний в E_{010} -моду. Одна из наиболее важных особенностей этой транс-

формации состоит в том, что заметное смещение минимума поля достигается еще вдали от собственно резонансной области. При непрерывном изменении видно, что кривая 1 соответствует $\epsilon = 15$, кривая 2 соответствует $\epsilon = 35$, третья — 52, четвертая — 100, и лишь кривые 5—7 достигаются при переходе в собственно резонансную область $\epsilon \sim \sim 160-180$.

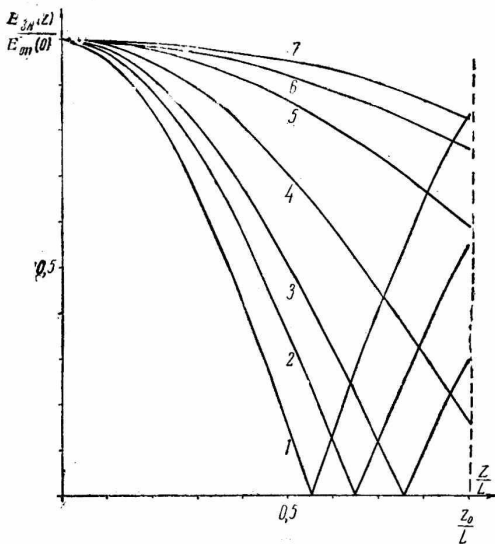


Рис. 3.

Подобная зависимость частоты и структуры поля от параметров возмущения может быть обеспечена и другими возмущающими телами (ферритовые и диэлектрические стержни, параметры которых зависят от внешних, статических, магнитных или электрических полей, полуволновой вибратор и т. д.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Хижняк. ЖТФ, 28, 1958.
2. Л. Д. Ландау, Е. Л. Лившиц. Электродинамика сплошных сред. ГИФМЛ, 1959.
3. L. C. Maier, J. C. Slater. Journ of Appl. Phys. 23, 1952.
4. Н. А. Хижняк. ЖТФ, 27, 1957.
5. Л. Левин. Современная теория волноводов. Изд-во иностр. лит., 1954.