МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. УСРЕДНЕННОЕ ВИНТОВОЕ ДВИЖЕНИЕ

В. А. Жураховский

Киев

Проследим получение усредненных дифференциальных уравнений движения для *обобщающего случая гибридных полей*, реализуемого при допущении об одновременном присутствии ТМ-и ТЕ-типов. По мере надобности мы будем полагать амплитуду того или иного типа исчезающе малой и тем самым выделять в чистом виде результаты, связанные с ТМ-либо ТЕ-полями в отдельности.

Чтобы акцентировать внимание на главных особенностях *резонансного* движения электронов, заранее условимся о некоторых упрощающих предположениях. В частности, будем считать, что силовое поле представлено одной (а не сразу несколькими) конкретной бегущей волной с вполне определенной фиксированной фазовой скоростью, характеризующей данный тип волны в данной волноведущей системе. Конструкционные материалы волноведущей системы договоримся рассматривать как идеальные, не имеющие тепловых и других видов потерь. Объемную плотность электрических зарядов в движущемся сплошном потоке примем как величину малую, не вносящую заметного возмущения в организованное движение частиц.

Для определенности будем говорить о *бегущем* силовом электромагнитном поле с медленно-меняющейся амплитудой, но подразумевать, что в любом месте рассмотрения может быть совершен предельный переход к неограниченно большим фазовым скоростям, и это позволит охватить также важный случай стоячих волн с медленно меняющейся амплитудой.

Силовое электромагнитное поле

В теории волноводов доказывается, что все электрические и магнитные компоненты гармонического во времени бегущего векторного поля электрического (ТМ) типа выражаются через скалярную функцию, так называемую *электрическую функцию Герца* Π^e, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi^e}{\partial y^2} + k^2 \frac{\beta_\Phi^2 - 1}{\beta_\Phi^2} \Pi^e = 0 \qquad (1)$$

в точках поперечного сечения волновода и *нулевому условию* на его границе. Все компоненты переменного поля магнитного (ТЕ) типа выражаются через скалярную *магнитную функцию Герца* Π^m, удовлетворяющую также уравнению Гельмгольца в точках поперечного сечения волновода, но имеющую *нулевую нормальную производную* на его границе. В соотношении (1) $\kappa = \frac{\omega}{c}$ — волновое число, ω — частота, c — скорость света, $\beta_\text{ф} = \frac{v_\text{ф}}{c}$ — нормированная к скорости света фазовая скорость бегущей волны, далее для определенности будем считать $|\beta_\text{ф}| \geqslant 1$, что отвечает гладким металлическим трубам. Π^e и Π^m представляют собой вещественные безразмерные функции от поперечных координат x и y.

Не останавливаясь на подробностях теории волноводов, которая в достаточной мере освещена в соответствующих пособиях по электродинамике сверхвысоких частот, выпишем сразу удобным для нас образом нормированные соотношения для электрических и магнитных компонент *гибридных* бегущих полей:

$$
\begin{aligned}
E_x &= \mathrm{Re}\left[-\left(\frac{1}{\beta_\text{ф}}\frac{\partial \Pi^e}{\partial kx}F^e + j\frac{\partial \Pi^m}{\partial ky}F^m\right)\exp jp\right];\\
E_y &= \mathrm{Re}\left[-\left(\frac{1}{\beta_\text{ф}}\frac{\partial \Pi^e}{\partial ky}F^e - j\frac{\partial \Pi^m}{\partial kx}F_m\right)\exp jp\right];\\
E_z &= \mathrm{Re}\left(-j\frac{\beta_\text{ф}^2-1}{\beta_\text{ф}^2}\Pi^e F^e\exp jp\right);\\
B_x &= \frac{1}{c}\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\partial \Pi^e}{\partial ky}F^e - \frac{j}{\beta_\text{ф}}\frac{\partial \Pi^m}{\partial kx}F^m\right)\exp jp\right];\\
B_y &= \frac{1}{c}\mathrm{Re}\left[-\left(\frac{\partial \Pi^e}{\partial kx}F^e + \frac{j}{\beta_\text{ф}}\frac{\partial \Pi^m}{\partial ky}F^m\right)\exp jp\right];\\
B_z &= \frac{1}{c}\mathrm{Re}\left(\frac{\beta_\text{ф}^2-1}{\beta_\text{ф}^2}\Pi^m F^m\exp jp\right),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где Re — символ взятия вещественной части выражения; $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица; $F^e = F^e(z)$ и $F^m = F^m(z)$ имеют размерность электрической напряженности и в общем случае представляют собой медленно-меняющиеся *комплексные* функции продольной координаты z (комплексность здесь связана с учетом возможного медленного изменения фазы); $p = \omega\left(t - \frac{z}{v_\text{ф}}\right) + p_i$ — быстроменяющаяся фаза поля бегущей электромагнитной волны в данный момент t в данном сечении z; p_i — начальная фаза в системе отсчета неподвижного наблюдателя.

Основываясь на том, что функции Герца Π^e и Π^m зависят от поперечных координат, а в терминах переменных Лагранжа являются периодическими функциями быстровращающейся фазы ϑ движущейся частицы, мы покажем, что справедлива следующая

Теорема. *Усредненное винтовое движение электронов в заданном резонансном поле* (2) *определяется только рабочей гармоникой функций Герца*:

$$\Pi_n^e = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} (\exp jn\vartheta)\, \Pi^e d\vartheta; \tag{3}$$

$$\Pi_n^m = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} (\exp jn\vartheta)\, \Pi^m d\vartheta,$$

где n — порядок реализуемого резонанса ($n = 1, 2, \ldots$).

Поперечный дрейф

Рассмотрим первое из уравнений системы (36) части I. Методика его преобразования с целью выделения гармоник Π_n^e, Π_n^m (3) является типичной и во многом будет повторяться для других уравнений, поэтому остановимся сейчас на этой методике детальнее, чтобы впоследствии можно было опустить излишне подробные промежуточные выкладки.

Подставим в первое уравнение (36) значения E_y, B_x, B_z из (2) с учетом замены (38) $p = \Theta + n\vartheta$. Получаем

$$\dot{X} = \frac{\eta}{\Gamma} \operatorname{Re}\left\{(\exp j\Theta)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left[\left(-\frac{1}{\beta_\text{ф}} + \beta_z\right)\frac{\partial \Pi^e}{\partial ky}F^e + j\left(1 - \frac{\beta_z}{\beta_\text{ф}}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\partial \Pi^m}{\partial kx}F^m + \beta_t\frac{\beta_\text{ф}^2 - 1}{\beta_\text{ф}^2}\,\Pi^m F^m \sin\vartheta\right](\exp jn\vartheta)\, d\vartheta\right\}. \tag{4}$$

Вначале преобразуем первые два интегральных слагаемых, содержащих частные производные по безразмерным поперечным координатам kx и ky.

Согласно выражениям (35), имеем

$$kx = kX + \left(kv_t/\Gamma\sqrt{1-\beta^2}\right)\cos\vartheta; \tag{5}$$

$$ky = kY + \left(kv_t/\Gamma\sqrt{1-\beta^2}\right)\sin\vartheta,$$

откуда видно, что

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial ky} = \frac{\partial \Pi^e}{\partial kY}, \quad \frac{\partial \Pi^m}{\partial kx} = \frac{\partial \Pi^m}{\partial kX} \tag{6}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(\exp jn\vartheta)\frac{\partial \Pi^e}{\partial ky}d\vartheta = \frac{\partial \Pi_n^e}{\partial kY};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(\exp jn\vartheta)\frac{\partial \Pi^m}{\partial kx}d\vartheta = \frac{\partial \Pi_n^m}{\partial kX}. \tag{7}$$

Теперь преобразуем третье интегральное слагаемое соотношения (4).

Используем тот факт, что Π^m удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Имеем

$$\Pi^m = -\frac{\beta_\Phi^2}{\beta_\Phi^2 - 1}\left[\frac{\partial^2 \Pi^m}{\partial (kx)^2} + \frac{\partial^2 \Pi^m}{\partial (ky)^2}\right]. \tag{8}$$

В соотношении (4) функция Π^m входит в произведение с $\sin\vartheta$. Выразим $\sin\vartheta$ из (5). С этой целью привлечем условие гирорезонанса (1. 29) $\omega(1-\beta_z/\beta_\Phi) \approx n\Gamma\sqrt{1-\beta^2}$ и с несущественной погрешностью преобразуем (5) к виду

$$kx = kX + \frac{n}{s}\beta_t\cos\vartheta; \quad ky = kY + \frac{n}{s}\beta_t\sin\vartheta, \tag{9}$$

где обозначено $s = 1-\beta_z/\beta_\Phi$. Отсюда можно увидеть, что

$$\sin\vartheta = -\frac{s}{n\beta_t}\cdot\frac{\partial kx}{\partial\vartheta} = \frac{s}{n}\cdot\frac{\partial ky}{\partial\beta_t}; \tag{10}$$

$$\cos\vartheta = \frac{s}{n\beta_t}\cdot\frac{\partial ky}{\partial\vartheta} = \frac{s}{n}\cdot\frac{\partial kx}{\partial\beta_t}.$$

Следовательно, на основании (8) и (10)

$$\Pi^m\sin\vartheta = \frac{\beta_\Phi^2 s/n}{\beta_\Phi^2 - 1}\left[\frac{1}{\beta_t}\cdot\frac{\partial kx}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial kx}\left(\frac{\partial\Pi^m}{\partial kx}\right) - \frac{\partial ky}{\partial\beta_t}\cdot\frac{\partial}{\partial ky}\left(\frac{\partial\Pi^m}{\partial ky}\right)\right]. \tag{11}$$

Далее, видоизменяя дифференциальные операторы на основе символических формул

$$\frac{\partial kx}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial kx} = \frac{\partial}{\partial\vartheta} - \frac{\partial ky}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial ky}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial ky}{\partial\beta_t}\cdot\frac{\partial}{\partial ky} = \frac{\partial}{\partial\beta_t} - \frac{\partial kx}{\partial\beta_t}\cdot\frac{\partial}{\partial kx}$$

и учитывая, что, согласно второму из отношений (10), выполняется равенство

$$-\frac{1}{\beta_t}\cdot\frac{\partial ky}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial}{\partial ky}\left(\frac{\partial\Pi^m}{\partial kx}\right) + \frac{\partial kx}{\partial\beta_t}\cdot\frac{\partial}{\partial kx}\left(\frac{\partial\Pi^m}{\partial ky}\right) = 0, \tag{13}$$

в результате которого взаимно уничтожаются члены со вторыми смешанными производными, вместо (11) получаем

$$\Pi^m\sin\vartheta = \frac{\beta_\Phi^2 s/n}{\beta_\Phi^2 - 1}\left[\frac{1}{\beta_t}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{\partial\Pi^m}{\partial kx}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta_t}\left(\frac{\partial\Pi^m}{\partial ky}\right)\right], \tag{14}$$

или на основании связей типа (6)

$$\Pi^m\sin\vartheta = \frac{\beta_\Phi^2 s/n}{\beta_\Phi^2 - 1}\left[\frac{1}{\beta_t}\frac{\partial}{\partial kX}\left(\frac{\partial\Pi^m}{\partial\vartheta}\right) - \frac{\partial^2\Pi^m}{\partial\beta_t\partial kY}\right]. \tag{15}$$

Теперь не представляет труда записать результат выделения из этого выражения его рабочей гармоники по ϑ

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}(\exp jn\vartheta)\,\Pi^m \sin\vartheta d\vartheta = \frac{\beta_\Phi^2 s}{1-\beta_\Phi^2}\left(\frac{j}{\beta_t}\frac{\partial \Pi_n^m}{\partial kX}+\frac{1}{n}\cdot\frac{\partial^2\Pi_n^m}{\partial\beta_t\partial kY}\right), \qquad (16)$$

где первое слагаемое было получено путем интегрирования (в произведении с $\exp jn\vartheta$) соответствующего слагаемого из (15) *по частям* с учетом того, что образующийся внеинтегральный член обращается в нуль вследствие периодичности Π^m как функции ϑ.

Итак, подставляя (7) и (16) в правую часть (4) и приводя подобные (в результате чего взаимно уничтожаются члены с производными по kX), окончательно получаем

$$\dot X = -\frac{\eta}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial kY}\left[\frac{1-\beta_\Phi\beta_z}{\beta_\Phi}\operatorname{Re}(\Pi_n^e F^e \exp j\Theta) + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta_t}{n}\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\Phi}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\operatorname{Re}(\Pi_n^m F^m \exp j\Theta)\right]; \qquad (17)$$

здесь учтено соотношение

$$s = 1-\beta_z/\beta_\Phi.$$

Совершенно аналогичным путем, преобразуя второе из уравнений (36), в конечном итоге получаем

$$\dot Y = \frac{\eta}{\Gamma}\frac{\partial}{\partial kX}\left[\frac{1-\beta_\Phi\beta_z}{\beta_\Phi}\operatorname{Re}(\Pi_n^e F^e \exp j\Theta) + \right.$$
$$\left. + \frac{\beta_t}{n}\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\Phi}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\operatorname{Re}(\Pi_n^m F^m \exp j\Theta)\right]. \qquad (18)$$

В соотношениях (17), (18) дифференцирование по kX, kY и β_t относится только к Π_n^e, Π_n^m.

Продольная и поперечная скорости

Рассмотрим третье из уравнений (36). Подставим сюда значения электромагнитных компонент (2) с учетом замены $p = \Theta + n\vartheta$. Получаем

$$\dot v_z = \eta\sqrt{1-\beta^2}\operatorname{Re}\left\{(\exp j\Theta)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\left[j\frac{(\beta_\Phi^2-1)(1-\beta_z^2)}{\beta_\Phi^2}\Pi^e F^e + \right.\right.$$
$$+\left(\frac{\beta_z\beta_t}{\beta_\Phi}-\beta_t\right)\left(\frac{\partial\Pi^e}{\partial kx}F^e\sin\vartheta-\frac{\partial\Pi^e}{\partial ky}F^e\cos\vartheta\right)+$$
$$\left.\left.+j\left(\beta_z\beta_t-\frac{\beta_t}{\beta_\Phi}\right)\left(\frac{\partial\Pi^m}{\partial kx}F^m\cos\vartheta+\frac{\partial\Pi^m}{\partial ky}F^m\sin\vartheta\right)\right](\exp jn\vartheta)\,d\vartheta\right\}. \qquad (19)$$

Усматривая смысл выражений $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$ из соотношений (10), преобразуем (19) к виду

$$\dot{v}_z = \eta\sqrt{1-\beta^2}\,\mathrm{Re}\left\{(\exp j\Theta)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[j\frac{(\beta_\Phi^2-1)(1-\beta_z^2)}{\beta_\Phi^2}\Pi^e F^e + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{s^2}{n}\frac{\partial\Pi^e}{\partial\vartheta}F^e - j\beta_t\frac{1-\beta_\Phi\beta_z}{\beta_\Phi}\left(\frac{s}{n}\right)\frac{\partial\Pi^m}{\partial\beta_t}F^m\right](\exp jn\vartheta)\,d\vartheta\right\}. \tag{20}$$

Теперь легко записать результат выделения из каждого слагаемого написанного выражения его рабочей гармоники по ϑ:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(\exp jn\vartheta)\,\Pi^e d\vartheta = \Pi_n^e;\\
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(\exp jn\vartheta)\frac{\partial\Pi^e}{\partial\vartheta}d\vartheta = -jn\Pi_n^e;\\
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(\exp jn\vartheta)\frac{\partial\Pi^m}{\partial\beta_t} = \frac{\partial\Pi_n^m}{\partial\beta_t},
\end{aligned} \tag{21}$$

причем второе соотношение было получено путем интегрирования по частям с учетом того, что образующийся внеинтегральный член обращается в нуль вследствие периодичности Π^e как функции ϑ.

Итак, подставляя (21) в правую часть (20) и приводя подобные, окончательно получаем

$$\dot{v}_z = \eta\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{1-\beta_\Phi\beta_z}{\beta_\Phi}\left[\frac{1-\beta_\Phi\beta_z}{\beta_\Phi}\mathrm{Im}\,(\Pi_n^e F^e\exp j\Theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_t}{n}\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\Phi}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\mathrm{Im}\,(\Pi_n^m F^m\exp j\Theta)\right], \tag{22}$$

где Im есть символ взятия мнимой части комплексного выражения.

Аналогичным путем, преобразуя четвертое из уравнений (36), в конечном итоге получаем

$$\dot{v}_t = \eta\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{1-\beta_t^2-\beta_z/\beta_\Phi}{\beta_t}\left[\frac{1-\beta_\Phi\beta_z}{\beta_\Phi}\mathrm{Im}\,(\Pi_n^e F^e\exp j\Theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_t}{n}\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\Phi}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\mathrm{Im}\,(\Pi_n^m F^m\exp j\Theta)\right]. \tag{23}$$

Интеграл движения

Отправляясь от уравнений (22), (23), найдем важный первый интеграл усредненного винтового движения заряженной частицы в поле бегущей электромагнитной волны.

Из очевидного равенства

$$\frac{d\sqrt{1-\beta^2}}{d\tau} = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\beta_z\mathring{\beta}_z + \beta_t\mathring{\beta}_t\right) \tag{24}$$

с учетом (22) и (23) получаем

$$\frac{d\sqrt{1-\beta^2}}{d\tau} = -\frac{\eta(1-\beta^2)}{c}\left[\frac{1-\beta_\text{ф}\beta_z}{\beta_\text{ф}}\operatorname{Im}\left(\Pi_n^e F^e \exp j\Theta\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_t}{n}\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\text{ф}}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\operatorname{Im}\left(\Pi_n^m F^m \exp j\Theta\right)\right], \tag{25}$$

или иначе

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{d\sqrt{1-\beta^2}}{d\tau} = \frac{1}{\beta_z-\beta_\text{ф}^{-1}}\cdot\frac{d\left(\beta_z-\beta_\text{ф}^{-1}\right)}{d\tau}. \tag{26}$$

В результате интегрирования имеем

$$\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta_i^2}} = \frac{\beta_z-\beta_\text{ф}^{-1}}{\beta_{zi}-\beta_\text{ф}^{-1}} = \frac{1-\beta_\text{ф}\beta_z}{1-\beta_\text{ф}\beta_{zi}}, \tag{27}$$

где i — индекс начальных условий.

Результат (27) можно переписать еще и в таком виде:

$$\beta_z = \beta_{zi}\left[1-\frac{1-\beta_\text{ф}\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}\beta_{zi}}\left(\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta_i^2}}-1\right)\right]. \tag{28}$$

Соотношение (27) для специального частного случая неизменной амплитуды бегущей *TEM*-волны было найдено в работе *. Однако, как показано выше, оно охватывает несравненно более широкий диапазон типов волн, оставаясь справедливым едва ли не для всех практически интересных случаев.

Интеграл усредненного движения (27), в частности, показывает, что частица, отдающая энергию ($\beta^2 < \beta_i^2$) попутной ($\beta_\text{ф} > 0$) волне, замедляется в продольном направлении при $\beta_\text{ф} < \beta_{zi}^{-1}$ и ускоряется при $\beta_\text{ф} > \beta_{zi}^{-1}$. Частица, отдающая энергию встречной ($\beta_\text{ф} < 0$) волне (за счет потери поперечной скорости, т. е. в конечном счете — полной скорости), всегда ускоряется в продольном направлении.

Релятивистская фазовая неустойчивость и относительная фаза

Обратимся к последнему уравнению усредненной системы (36).

Преобразуем выражение частотной расстройки на основе результата (28):

$$\omega\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\text{ф}}\right) - n\Gamma\sqrt{1-\beta^2} = \omega\left(1-\frac{\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}}\right) - n\Omega_i +$$

* А. А. Коломенский, А. Н. Лебедев. Резонансные явления при движении частицы в плоской электромагнитной волне. ЖЭТФ, 44, 1, 1963.

$$+\left[\omega\left(1-\frac{\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}}\right)\frac{1-\beta_\text{ф}\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}^2-\beta_\text{ф}\beta_{zi}}-n\Omega_i\right]\left(\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta_i^2}}-1\right), \tag{29}$$

где под Ω_i подразумевается начальная гирочастота

$$\Omega_i=\Gamma\sqrt{1-\beta_i^2}.$$

Как можно судить по виду левой части выражения (29), связь текущего значения медленно меняющейся частотной расстройки с релятивистскими эффектами обусловлена двумя самостоятельными, параллельно действующими причинами. Во-первых, — это *ангармоничность* электронных колебаний в постоянном магнитном поле: гирочастота $\Gamma\sqrt{1-\beta^2}$ существенно зависит от текущей энергии частицы. Во-вторых, — это так называемый *допплеровский сдвиг частоты поля*, состоящий в том, что в системе отсчета, поступательно движущейся вместе с частицами (в переменных Лагранжа), частота воздействия сил поля, т. е. допплеровская частота $\omega(1-\beta_z/\beta_\text{ф})$, зависит от текущей продольной скорости и, следовательно, отлична от постоянной величины ω, воспринимаемой неподвижным наблюдателем (в переменных Эйлера). Сама же продольная скорость меняется вследствие изменения релятивистского значения продольного импульса, которое вызвано преимущественно резонансными продольными электрическими полями и резонансными поперечными магнитными полями и частично — вследствие релятивистского изменения массы.

Существенно, что два эффекта — ангармоничность собственных колебаний электронов и допплеровский сдвиг частоты поля — могут, в зависимости от соотношения величин $\beta_\text{ф}$ и β_{zi}^{-1}, либо поддерживать друг друга, либо, что бывает более заметно, работать в противоположные стороны. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть выражения в квадратных скобках (коэффициент перед релятивистским фактором) в правой части выражения (29).

Если $\beta_\text{ф}\leqslant-1$ или если $1\leqslant\beta_\text{ф}<\beta_{zi}^{-1}$, то $1-\beta_\text{ф}\beta_{zi}>0$, и два слагаемых в квадратной скобке будут иметь противоположные знаки, ослабляя вклад друг друга. Более того, возможен режим

$$\omega\left(1-\frac{\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}}\right)\frac{1-\beta_\text{ф}\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}^2-\beta_\text{ф}\beta_{zi}}=n\Omega_i, \tag{30}$$

когда релятивистские эффекты фазовой неустойчивости полностью выключены из игры. Режим (30), в силу условия гирорезонанса $\omega(1-\beta_{zi}/\beta_\text{ф})\approx n\Omega_i$, реализуется при значениях $\beta_\text{ф}^2\approx1$ (случай *TEM*-волны).

Для высоких положительных значений $\beta_\text{ф}>\beta_{zi}^{-1}$, когда $1-\beta_\text{ф}\beta_{zi}<0$, два слагаемых в квадратной скобке выражения (29) будут иметь одинаковые знаки, формально усиливая вклад друг друга. Впрочем, фактически при значениях $|\beta_\text{ф}|$ порядка или более β_{zi}^{-1} основной вклад вносит слагаемое — $n\Omega_i$, тогда как слагаемое, порождаемое допплеровским сдвигом частоты поля, становится пренебрежимо малым и может быть отброшено.

Таким образом, релятивистские эффекты с наибольшей силой влияют на результирующую картину движения в типичном случае слабо распространяющихся или вовсе нераспространяющихся силовых резонансных полей.

В заключение остается еще выполнить преобразование интегрального слагаемого последнего из уравнений (36). Опуская промежуточные выкладки, которые не содержат новых для нас элементов техники преобразования, формулируем сразу окончательный результат:

$$\begin{aligned}\dot{\Theta} = {} & \omega\left(1-\frac{\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}}\right)-n\Omega_i+\left[\omega\left(1-\frac{\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}}\right)\frac{1-\beta_\text{ф}\beta_{zi}}{\beta_\text{ф}^2-\beta_\text{ф}\beta_{zi}}-\right.\\ & \left.-n\Omega_i\right]\left(\sqrt{\frac{1-\beta^2}{1-\beta_i^2}}-1\right)+\frac{\eta\sqrt{1-\beta^2}n}{v_t}\left(\frac{1-\beta_z/\beta_\text{ф}}{\beta_t}\right)\left\{\frac{1-\beta_\text{ф}\beta_z}{\beta_\text{ф}}\times\right.\\ & \times\left(\frac{\beta_t}{n}\right)\frac{\partial}{\partial\beta_t}\operatorname{Re}\left(\Pi_n^e F^e\exp j\Theta\right)+\left(1-\frac{\beta_z}{\beta_\text{ф}}\right)\left[1-\frac{\beta_t^2(\beta_\text{ф}^2-1)}{(\beta_\text{ф}-\beta_z)^2}\right]\times\\ & \left.\times\operatorname{Re}\left(\Pi_n^m F^m\exp j\Theta\right)\right\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Этим результатом, наконец, завершается доказательство теоремы о возможности определения усредненного винтового движения электронов целиком в терминах только рабочей гармоники электрической и магнитной скалярных функций Герца заданного резонансного силового поля типа бегущей или типа слабо распространяющейся волны. Одновременно *дан рецепт построения полного набора соответствующих усредненных дифференциальных уравнений. Это — система уравнений (17), (18) для описания поперечного дрейфа, (22), (23) — для дрейфовой и орбитальной скоростей и (31) — для учета текущей расфазировки электрона в его колебательной части движения относительно резонансных сил переменного электромагнитного поля.*