МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. I. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ДИНАМИКЕ МАГНИТОНАПРАВЛЯЕМЫХ ПОТОКОВ

В. А. Жураховский

Киев

Особенностью и сложностью магнитонаправляемого винтового движения является релятивистская зависимость массы и, следовательно, собственной частоты вращения электрона (гирочастоты, от его энергии, непрерывно изменяющейся под воздействием внешних резонансных сил. При этом с течением времени может наблюдаться существенное возмущение в первую очередь фазы колебания частицы, приводящее к смене самого характера воздействия поля на частицу (например, вместо первоначального увеличения ее кинетической энергии начинается уменьшение последней), поэтому привлечение *релятивистских* уравнений становится *неизбежным* даже при скоростях движения, в несколько раз меньших скорости света. На это важное обстоятельство впервые обратили внимание независимо друг от друга А. В. Гапонов и Ю. Шнейдер в 1959 году.

Ниже предпринята попытка систематизации различных подходов к проблеме анализа возмущенного магнитонаправляемого движения электронов. Предлагается, как нам кажется, в достаточной мере простая и математически обоснованная методика построения нелинейной системы дифференциальных уравнений усредненного винтового движения электронов в силовых электромагнитных полях при гирорезонансе.

Невозмущенное движение

Запишем релятивистское векторное уравнение движения электронов, направляемых однородным полем $\vec{1}_z M$, в дополнительном электромагнитном поле $\vec{E}$, $\vec{B}$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = -\eta\left\{\vec{E} + \left[\vec{v},\ \vec{B} + \vec{1}_z M\right]\right\}. \quad (1)$$

Здесь τ — продолжительность движения;

$\vec{v}$ — вектор скорости;

β — отношение абсолютной величины скорости частицы к скорости света c;

η — модуль удельного заряда электрона при нулевой скорости.

В тривиальном случае отсутствия дополнительного поля $\left(\vec{E} = \vec{B} = 0\right)$ имеем

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) + \eta\left[\vec{v},\ \vec{1}_z M\right] = 0. \quad (2)$$

Как известно, при движении заряженной частицы в магнитном поле величина ее полной скорости остается неизменной. В этом легко убедиться. Умножим (2) скалярно на $\vec{v}$:

$$\vec{v} d\left(\vec{v}/\sqrt{1-\beta^2}\right)/d\tau = 0. \quad (3)$$

Раскроем скобки и обозначим $\left|\vec{v}\right| = v$

$$\frac{v\dot{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{v^2\beta\dot{\beta}}{(1-\beta^2)^{3/2}} = \frac{v\dot{v}}{(1-\beta^2)^{3/2}} = c^2\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = 0, \quad (4)$$

где точкой над символом переменной обозначено дифференцирование по τ. На основании (4) $\left(1/\sqrt{1-\beta^2}\right) = \text{const}$, откуда

$$\beta = \beta_i = \text{const}. \quad (5)$$

Здесь i — индекс начальных условий (initial).

Используя этот факт, распишем (2) покоординатно:

$$\dot{v}_z = 0,\ \dot{v}_x + \Omega_i v_y = 0,\ \dot{v}_y - \Omega_i v_x = 0, \quad (6)$$

где

$$\Omega_i = \Gamma\sqrt{1-\beta_i^2},\ \ \Gamma = \eta M.$$

Вводя для краткости записи комплексную скорость $v_x + jv_y$ $(j = \sqrt{-1})$, вместо (6) имеем

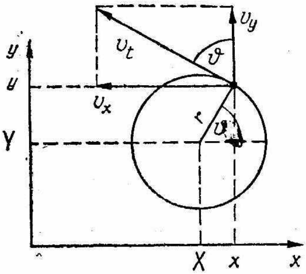
$$\dot{v}_z = 0, \frac{d}{d\tau}(v_x + jv_y) - j\Omega_i(v_x + jv_y) = 0, \tag{7}$$

откуда, выбирая начальные условия

$$v_{zi}, \ v_{xi} + jv_{yi} \equiv jv_{ti} \exp j\vartheta_i, \tag{8}$$

получаем решения

$$v_z = v_{zi}, \ v_x + jv_y = jv_{ti} \exp j(\Omega_i\tau + \vartheta_i), \tag{9}$$



где v_{zi}, v_{ti} и ϑ_i — постоянные. Разделяя действительные и мнимые части, окончательно получаем

$$v_z = v_{zi}; \ v_x = -v_{ti}\sin(\Omega_i\tau + \vartheta_i);$$
$$v_y = v_{ti}\cos(\Omega_i\tau + \vartheta_i). \tag{10}$$

Решения (10) означают, что частица движется по *винтовой* траектории с постоянной продольной v_{zi} и поперечной v_{ti} составляющими линейной скорости и с постоянной скоростью Ω_i изменения фазы, причем ϑ_i — начальная фаза (Ω_i — гирочастота).

Элементы поперечной части движения (как невозмущенного, так и возмущенного) дополнительно пояснены на рисунке.

Возмущение скоростей и фазы

Возвращаясь к (1), рассмотрим общий случай $\vec{E}, \vec{B} \neq 0$. Пусть $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$, $v_x^2 + v_y^2 \equiv v_t^2$, $\vec{\beta} \equiv \vec{v}/c$. Распишем (1) покоординатно

$$\dot{v}_z + \frac{\beta_z}{1-\beta^2}(\beta_z\dot{v}_z + \beta_t\dot{v}_t) = a_z\sqrt{1-\beta^2};$$
$$\dot{v}_x + v_y\Gamma\sqrt{1-\beta^2} + \frac{\beta_x}{1-\beta^2}(\beta_z\dot{v}_z + \beta_t\dot{v}_t) = a_x\sqrt{1-\beta^2}; \tag{11}$$
$$\dot{v}_y - v_x\Gamma\sqrt{1-\beta^2} + \frac{\beta_y}{1-\beta^2}(\beta_z\dot{v}_z + \beta_t\dot{v}_t) = a_y\sqrt{1-\beta^2}.$$

Здесь через $\vec{a} \equiv -\eta\left\{\vec{E} + \left[\vec{v}, \vec{B}\right]\right\}$ обозначено ускорение нерелятивистской теории.

Вводя для краткости записи комплексную скорость $v_x + jv_y$, имеем

$$\mathring{v}_x + j\mathring{v}_y - j(v_x + jv_y)\Gamma\sqrt{1-\beta^2} + \frac{\beta_x + j\beta_y}{1-\beta^2} \times$$
$$\times (\beta_z\mathring{v}_z + \beta_t\mathring{v}_t) = (a_x + ja_y)\sqrt{1-\beta^2}. \tag{12}$$

При наличии электромагнитного поля $\vec{E}$, $\vec{B}$ движение электрона удобно трактовать как возмущение винтового движения, рассмотренного выше. Поэтому целесообразно ввести *мгновенную* фазу ϑ распределения декартовых компонент поперечной скорости v_t с помощью соотношений, напоминающих (10), что

$$v_x = -v_t \sin\vartheta, \quad v_y = v_t \cos\vartheta. \tag{13}$$

Иначе, мы совершаем замену переменных v_x, v_y на v_t, ϑ. Выбор именно такой замены объясняется тем, что в тривиальном случае $v_t = v_{tt} = \text{const}$, $\dot{\vartheta} = \Omega_t = \text{const}$. Поэтому есть основания надеяться, что в возмущенном движении величины v_t, ϑ представятся главным образом медленно меняющимися членами, а слагаемые, описывающие мелкие вибрации, можно будет усреднить.

Подставим (13) в (12):

$$v_t\left(\Gamma\sqrt{1-\beta^2}-\dot{\vartheta}\right)+j\left[\dot{v}_z\frac{\beta_z\beta_t}{1-\beta^2}+\right.$$
$$\left.+\dot{v}_t\left(1+\frac{\beta_t^2}{1-\beta^2}\right)\right]=(a_x+ja_y)\sqrt{1-\beta^2}\exp(-j\vartheta). \tag{14}$$

Разделяя здесь действительные и мнимые части и привлекая первое из соотношений (11), имеем

$$\begin{aligned}
\dot{v}_z(1-\beta_t^2)+\dot{v}_t\beta_z\beta_t &= a_z(1-\beta^2)^{3/2};\\
\dot{v}_z\beta_z\beta_t+\dot{v}_t(1-\beta_z^2) &= -(a_x\sin\vartheta-a_y\cos\vartheta)(1-\beta^2)^{3/2};\\
v_t\left(\dot{\vartheta}-\Gamma\sqrt{1-\beta^2}\right) &= -(a_x\cos\vartheta+a_y\sin\vartheta)\sqrt{1-\beta^2}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Решая первую пару уравнений относительно $\dot{v}_z$, $\dot{v}_t$, получаем систему дифференциальных уравнений движения в *нормальной* форме:

$$\begin{aligned}
\dot{v}_z &= \left[(a_x\sin\vartheta-a_y\cos\vartheta)\,\beta_z\beta_t+a_z(1-\beta_z^2)\right]\sqrt{1-\beta^2};\\
\dot{v}_t &= \left[-(a_x\sin\vartheta-a_y\cos\vartheta)(1-\beta_t^2)-a_z\beta_z\beta_t\right]\sqrt{1-\beta^2};\\
\dot{\vartheta} &= \left[\Gamma-v_t^{-1}(a_x\cos\vartheta+a_y\sin\vartheta)\right]\sqrt{1-\beta^2}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Возмущение координат

Входящие в правую часть (16) компоненты вектора $\vec{a}$ зависят в общем случае от времени и от координат, поэтому наряду с уравнениями (16) для *скоростей* необходимо дополнительно рассмотреть уравнения, описывающие изменение *координат* электрона в процессе его движения.

В тривиальном случае при $\vec{a}=0$ из (10) получаем

$$x = X_l + (v_{tl}/\Omega_l)\cos(\Omega_l\tau + \vartheta_l);$$
$$y = Y_l + (v_{tl}/\Omega_l)\sin(\Omega_l\tau + \vartheta_l);$$
$$z = z_l + v_{zl}\tau, \tag{17}$$

где X_l, Y_l — координаты оси винтовой траектории частицы;

$v_{tl}/\Omega_l = v_{tl}/\Gamma\sqrt{1-\beta_l^2}$ — радиус ее движения;

Ω_l — угловая скорость.

Все названные величины постоянны.

При $\vec{a}\neq 0$ вследствие сохранения общего характера движения как винтового, можно говорить о *мгновенных* координатах оси X, Y, радиусе r, угловой фазе (азимуте) δ. Основную информацию об этих величинах, следует ожидать, несут медленно меняющиеся слагаемые их точных выражений. Поэтому вместо (17), следуя идее метода вариации произвольных постоянных, имеем

$$x + jy = X + jY + r\exp j\delta. \tag{18}$$

Здесь *две* декартовы координаты частицы x, y выражены через *четыре* неизвестных функции X, Y, r, δ, поэтому последние определяются неоднозначно. Для их однозначного определения необходимо наложить какие-либо *два* дополнительных условия. Этими условиями распорядимся так, чтобы при переходе к тривиальному случаю $\vec{a}=0$ получалось $X = X_l$, $Y = Y_l$, $r = v_{tl}/\Gamma\times\times\sqrt{1-\beta_l^2}$, $\delta=\vartheta=\Omega_l\tau+\vartheta_l$. Выбираем

$$r = v_t/\Gamma\sqrt{1-\beta^2},\ \delta = \vartheta, \tag{19}$$

тогда вместо (18) имеем

$$x + jy = X + jY + \left(v_t/\Gamma\sqrt{1-\beta^2}\right)\exp j\vartheta, \tag{20}$$

и подлежащими определению остаются две функции X, Y. Для их отыскания используется самоочевидная связь координат и скоростей

$$\dot{x} + j\dot{y} = v_x + jv_y,\ \dot{z} = v_z. \tag{21}$$

Из (20) имеем

$$\dot{x} + j\dot{y} = \dot{X} + j\dot{Y} + \left[\frac{\dot{v}_z\beta_z\beta_t + \dot{v}_t(1-\beta_z^2)}{\Gamma(1-\beta^2)^{3/2}} + j\frac{v_t\dot{\vartheta}}{\Gamma\sqrt{1-\beta^2}}\right]\exp j\vartheta, \tag{22}$$

т. е. на основании (15)

$$\dot{x} + j\dot{y} = \dot{X} + j\dot{Y} + (a_y - ja_x)/\Gamma + jv_t\exp j\vartheta. \tag{23}$$

С другой стороны, из (13), (21)

$$\dot{x} + j\dot{y} = jv_t \exp j\vartheta. \tag{24}$$

Сравнивая правые части (23) и (24), заключаем

$$\dot{X} = -a_y/\Gamma, \ \dot{Y} = a_x/\Gamma. \tag{25}$$

Резонансные силы

Будем рассматривать движение электронов в полых электродинамических системах — волноводах и волноводных резонаторах, где поля представлены бегущими или стоячими волнами и в общем случае зависят от координат и времени по типу

$$\Pi(x, y) F(z) f(p), \ p \equiv \omega \left(t - \frac{z}{v_ф}\right) + p_i, \tag{26}$$

где амплитуда ΠF есть функция поперечных координат x, y и может также «медленно» меняться вдоль продольной координаты z; периодическая (с периодом 2π) функция $f(p)$ учитывает «быстрые» изменения поля вдоль продольной координаты z и с течением времени t, ω — частота, $v_ф$ — фазовая скорость бегущей волны (формальный переход $v_ф \to \pm\infty$ с учетом зависимости F от z дает возможность описать также случай стоячих волн); p может рассматриваться как фаза, причем p_i — начальная фаза в системе отсчета неподвижного наблюдателя.

Если теперь перейти к системе отсчета, связанной с движущимся электроном (т. е. фактически от переменных Эйлера к переменным Лагранжа), следует положить

$$t = t_i + \tau, \ z = z_i + \zeta, \tag{27}$$

где t_i — момент влета рассматриваемой частицы в силовое поле, т. е. прохождения ею входного сечения $z = z_i$. Вместо (26) имеем

$$\Pi(x, y) F(z_i + \zeta) f(p); \tag{28}$$

$$p = \omega (t_i + \tau - z_i/v_ф - \zeta/v_ф) + p_i.$$

Рассмотрим условие осуществления кумулятивного, т. е. резонансного, квазистационарного взаимодействия движущегося по винтовой траектории электрона с полем типа (28). Это условие (назовем его условием гирорезонанса) состоит в том, что скорость изменения фазы сил поля $\dot{p} = \omega(1 - v_z/v_ф)$, испытываемых электроном, должна быть приблизительно кратной азимутальной скорости частицы $\dot{\vartheta}$. Согласно (16), при сохранении винтового характера движения электронов азимутальная координата ϑ меняется приблизительно со скоростью $\dot{\vartheta} \approx \Gamma \sqrt{1 - \beta^2}$, поэтому условие гирорезонанса имеет вид

$$\dot{p} \approx n\dot{\vartheta}, \ \omega(1 - v_z/v_ф) \approx n\Gamma \sqrt{1 - \beta^2}, \tag{29}$$

где n — порядок резонанса (целое положительное число).

Целесообразно ввести в рассмотрение относительную фазу

$$\theta \equiv p - n\vartheta, \quad \theta_i = \omega\,(t_i - z_i/v_\phi) + p_i - n\vartheta_i, \tag{30}$$

являющуюся мерой *расфазировки* электрона в его движении относительно переменного поля. Скорость изменения относительной фазы θ, согласно (16), есть

$$\dot{\theta} = \omega\,(1 - v_z/v_\phi) - n\Gamma\sqrt{1-\beta^2} + n v_t^{-1}\,(a_x \cos\vartheta + a_y \sin\vartheta)\sqrt{1-\beta^2}. \tag{31}$$

Начальные условия

Вопрос о начальных условиях колебательного движения материальных частиц, попадающих в переменное *резонансное* силовое поле, является далеко не тривиальным. Имеется в виду то чрезвычайно важное обстоятельство, что в системе Эйлера вслед за *переменным во времени* (пульсирующим) характером силового поля также и граничные условия движения суть величины отнюдь не постоянные, но *функции времени*. Иными словами, *судьба движущегося электрона предопределяется той фазой поля, с которой он встречается в момент $t = t_i$ пролета входного сечения z_i*, так как вследствие режима гирорезонанса эта фаза *сопровождает* данный электрон и при $t > t_i$, лишь медленно меняясь с течением времени.

Таким образом, для уяснения картины взаимодействия сплошного потока частиц (в целом) с периодическим силовым полем следует рассматривать поведение не просто отдельно взятого электрона, но изучать *коллективное движение* сразу континуального множества «частиц», различающихся начальными условиями. В случае колеблющегося во времени поля (которое, собственно, и представляет предмет нашего исследования), когда картина электронно-волнового взаимодействия периодически повторяется, в качестве означенного континуального множества можно принять к рассмотрению любой мысленно выделенный отрезок потока, прошедший в зону силового поля через входное сечение z_i за непрерывный промежуток времени влета t_i длительностью ровно в один период колебаний поля (безразмерное время влета ωt_i при этом получает приращение в 2π).

В простейшей задаче об *однородном* (на входе) потоке начальные значения координат и скоростей есть константы, и лишь начальное значение относительной фазы θ_i (30) линейно меняется с ростом ωt_i, поэтому упомянутый выше континуальный отрезок потока может быть представлен произвольным сплошным промежутком значений θ_i длительностью в 2π. Например, принимается

$$X_i = \text{const}, \quad Y_i = \text{const}; \quad v_{zi} = \text{const}, \quad v_{ti} = \text{const};$$

$$\theta_i \in [-\pi;\ +\pi]. \tag{32}$$

В более сложных задачах встречаются случаи *предварительного управления* начальными условиями движения электронов, когда функциями времени являются наряду с относительной фазой θ_i также координаты X_i, Y_i и скорости v_{zi}, v_{ti} во входном сечении z_i (или некоторые из них). Допустим, управляющее устройство снова представляет собой уже знакомое нам пространственно-ограниченное резонансное силовое поле или последовательность таких полей (тогда индекс i будем рассматривать как нумерующий индекс, $i = 1, 2, \ldots$). Во *входное* сечение z_1 управляющего устройства поступает *однородный* сплошной поток с начальными условиями типа (32), где $i = 1$.

Тогда математическое описание управляющего устройства представляет собой набор «передаточных» функций типа

$$X_i = X_i(\theta_1);\quad Y_i = Y_i(\theta_1);\quad v_{zi} = v_{zi}(\theta_1);$$
$$v_{ti} = v_{ti}(\theta_1);\quad \theta_i = \theta_i(\theta_1);\quad \theta_1 \in [-\pi;\ +\pi], \qquad (33)$$

которые по существу и выполняют роль континуальных начальных условий для основной дифференциальной задачи.

Мы будем исходить из *возможности* наличия управляющего устройства, а также считать принятыми начальные условия в форме (33), которые при необходимости редуцируются до (32) в частном случае $i = 1$.

Усредненная система уравнений движения

Сведем вместе все полученные выше результаты. В итоговой системе уравнений целесообразно *выделить медленные движения* на фоне вибраций, связанных с быстроменяющейся фазовой переменной — азимутальной координатой электрона ϑ. С этой целью выразим фазу p силового поля, испытываемого электроном, через азимутальную координату последнего ϑ из (30)

$$p = \theta + n\vartheta, \qquad (34)$$

и заменим всюду в функциях a_x, a_y, a_z, представляющих данное силовое поле в правых частях дифференциальных уравнений (16), (25) и (31), аргумент p на $\theta + n\vartheta$ (34).

Отметим следующее существенное обстоятельство. Перечисленные уравнения с указанной подстановкой образуют прежде всего *нормальную* систему. Данная нормальная система является и так называемой *стандартной* (по Н. Н. Боголюбову) системой, поскольку все правые части порождены в определенном смысле *малыми* силами, лишь возмущающими за время одного оборота параметры винтового движения частицы (частотная расстройка $\omega(1 - v_z/v_ф) - n\Gamma\sqrt{1-\beta^2}$ в уравнении (31) также мала: гирорезонанс). Величины X, Y, v_z, v_t, θ выступают в первую очередь как медленно меняющиеся переменные, а ϑ — как быстро вращающаяся фаза.

В связи с этим можно приближенно заменить стандартную систему упрощенной системой *сглаженных* или, как говорят, *укороченных* уравнений путем *усреднения* всех правых частей по *явно входящему* аргументу ϑ на произвольном промежутке длительностью в 2π.

Выполним указанные действия и подведем итоги.

Итак, на основании (13), (20), (21) движение электрона описывается как

$$\begin{gathered} x + jy = X + jY + \left(v_t/\Gamma\sqrt{1-\beta^2}\right)\exp j\vartheta; \\ \dot{x} + j\dot{y} = v_x + jv_y = jv_t \exp j\vartheta, \quad \dot{z} = v_z; \end{gathered} \tag{35}$$

при этом входящие в правые части (35) переменные определяются, согласно (16), (25), (31), из системы усредненных дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\dot{X} = -\frac{1}{\Gamma}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} a_y d\vartheta; \quad \dot{Y} = \frac{1}{\Gamma}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} a_x d\vartheta;$$

$$\dot{v}_z = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[(a_x \sin\vartheta - a_y\cos\vartheta)\,\beta_z\beta_t + a_z\left(1-\beta_z^2\right)\right]d\vartheta;$$

$$\dot{v}_t = \sqrt{1-\beta^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[-(a_x\sin\vartheta - a_y\cos\vartheta)\left(1-\beta_t^2\right) - a_z\beta_z\beta_t\right]d\vartheta;$$

$$\begin{gathered} \dot{\theta} = \omega\left(1 - v_z/v_\Phi\right) - n\Gamma\sqrt{1-\beta^2} + \\ + \frac{n\sqrt{1-\beta^2}}{v_t}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}(a_x\cos\vartheta + a_y\sin\vartheta)\,d\vartheta, \end{gathered} \tag{36}$$

дополненной начальными условиями (33). Под знаками интегралов берутся декартовы компоненты вектора

$$\vec{a} = -\eta\left\{\vec{E} + \left[\vec{v},\ \vec{B}\right]\right\} \tag{37}$$

с заменой аргумента $p = \omega\left(t - z/v_\Phi\right) + p_i$, *являющегося фазой переменного поля, по типу (34)*

$$\vec{a}\left[\omega\left(t - \frac{z}{v_\Phi}\right) + p_i,\ \vartheta\right] = \vec{a}\left(\theta + n\vartheta,\ \vartheta\right), \tag{38}$$

причем медленно меняющиеся переменные X, Y, v_z, v_t, θ *выступают в этих интегралах как параметры.*

В заключение приведем оценку погрешности, возникающей при сглаживании стандартных систем уравнений. Решение усредненного по быстрому вращению уравнения медленного движения аппроксимирует точное решение исходного дифференциального уравнения с *абсолютной погрешностью* не более порядка *величины правой части, деленной на угловую частоту быстрого вращения* при условии, что рассмотрение задачи ограничивается таким интервалом времени, произведение *длительности* которого на *порядок правой части* уравнения есть величина не более порядка *единицы* размерности соответствующего зависимого переменного.